Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Verificare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{x}=\frac{1}{n}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{x}=\frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\right)=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\sin x}}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}$$

Calcoliamo il limite λ_1 eseguendo il cambio di variabile $t=\sin x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$:

$$\lambda_1=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1/n}-1}{t}$$

Tenendo presente il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$, si ha $\lambda_1=\frac{1}{n}$, onde:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{x}=\frac{1}{n}$$