Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Determinare i valori del parametro $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ per i quali la seguente equazione in $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} = -4, \tag{1}$$

ammette ∞^1 soluzioni.

Soluzione

Dal momento che il limite a primo membro della (1) si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, conviene sviluppare il numeratore attraverso le formule di prostaferesi:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{a - \beta}{2},$$

che nel nostro caso si scrivono:

$$\cos ax - \cos bx = -2 \sin \left(\frac{a+b}{2} x \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} x \right),$$

cosicchè:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} = -2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a+b}{2} x \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} x \right)}{x^n}$$

Per $n = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} &= -2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a+b}{2} x \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} x \right)}{x} \\ &= -2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a+b}{2} x \right)}{x} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} \sin \left(\frac{a-b}{2} x \right)}_{=0} \end{aligned} \tag{2}$$

Riesce:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a \pm b}{2} x \right)}{x} = \frac{a \pm b}{2} \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a \pm b}{2} x \right)}{\frac{a \pm b}{2} x}}_{=1} = \frac{a \pm b}{2}$$

Quindi la (2) diventa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} = -2 \frac{a \pm b}{2} \cdot 0 = 0$$

Ciò implica che deve essere $n \geq 2$. Proviamo prima per ogni $n > 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} &= -2 \lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a+b}{2} x \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} x \right)}{x^n} \\ &= -2 \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a+b}{2} x \right)}{x}}_{= \frac{a+b}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin \left(\frac{a-b}{2} x \right)}{x}}_{= \frac{a-b}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{n-2}}}_{= \infty} \\ &= \infty \end{aligned}$$

Deve allora essere necessariamente $n=2$. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2} &= -2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a+b}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a-b}{2}}\\ &= \frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

Il problema chiede di determinare $a,b\in\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=-4$, per cui:

$$\frac{b^2-a^2}{2}=-4$$

Cioè

$$a^2-b^2-8=0, \tag{3}$$

che è un'equazione di secondo grado in a,b e come tale ammette ∞^1 soluzioni. Assumendo $b\in\mathbb{R}$ come parametro, la soluzione generale della (3) si scrive:

$$a=\pm\sqrt{b^2+8},\quad \forall b\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

o ciò che è lo stesso:

$$(a,b)=\left(\pm\sqrt{b^2+8},b\right),\quad \forall b\in\mathbb{R}$$

Osservando che $\cos\left(\pm\sqrt{b^2+8}x\right)=\cos\left(\sqrt{b^2+8}x\right)$, segue che alla soluzione generale (4) corrisponde la famiglia di funzioni:

$$\mathcal{F}=\left\{f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}(x)\right\}, \tag{5}$$

essendo:

$$f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}(x)=\frac{\cos\left(\sqrt{b^2+8}x\right)-\cos bx}{x^2} \tag{6}$$

Per quanto precede, comunque prendiamo $b\in\mathbb{R}$, la funzione $f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}(x)$ converge a -4 per $x\to 0$. In fig. 1 sono graficate alcune funzioni della famiglia (5).

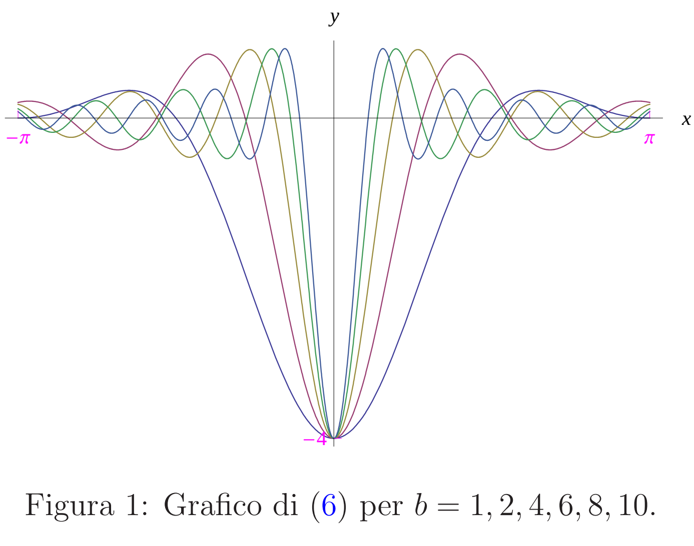

Figura 1: Grafico di (6) per $b=1,2,4,6,8,10$.