Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Per quale valore di n è verificata la seguente identità?*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{n}}\frac{1-(n-1)\cos x}{\pi-nx}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{1}$$

Soluzione.
Una condizione necessaria è che il rapporto

$$\frac{1-(n-1)\cos x}{\pi-nx}$$

si presenti nella forma indeterminata $0/0$ per $x\to\pi/n$. Ne segue che n deve essere tale che

$$1-(n-1)\cos\frac{\pi}{n}=0\Longrightarrow\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{n-1},$$

che è soddisfatta per $n=3$. A questo punto non ci resta che verificare il risultato, eseguendo il cambio di variabile $t=\frac{\pi}{3}-x$ e applicando le formule di addizione:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right)=\frac{1}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{n}}\frac{1-(n-1)\cos x}{\pi-nx}&=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t-\sqrt{3}\sin t}{3t}=\frac{0}{0}\\&=\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{3t}}_{=0}-\frac{\sqrt{3}}{3}\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$