

Appunti di Fisica del Reattore nucleare

Ing. Giorgio Bertucelli - (file scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

1 Avviamento di un reattore

Vediamo ora l'avviamento di un reattore termico, spoglio, dal suo innesco alla sua criticità $K = 1$.

$$D \cdot \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + q(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1)$$

dove q è il termine di sorgente:

$$q(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = p(\tau_{th}) q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) \quad (2)$$

essendo $q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t)$ soluzione di

$$\nabla^2 q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) - \frac{\partial q^*}{\partial \tau} = 0 \implies q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = Q(\mathbf{r}, t) e^{-B^2 \tau} \quad (3)$$

e per $Q(\mathbf{r}, t)$ s'era trovato

$$Q(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \eta f \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{K_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

All'età di Fermi $\tau = 0$ scriveremo:

$$q^*(\mathbf{r}, \tau_{th} = 0, t) = \frac{K_\infty}{p} \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}) \quad (5)$$

dove $S(\mathbf{r})$ è la sorgente esterna necessaria per l'innesco.

Risolviamo la (3), ricercando soluzioni fattorizzate:

$$q^*(\mathbf{r}, \tau_{th}, t) = R(\mathbf{r}) \Theta(\tau) T(t) \quad (6)$$

Cioè

$$\nabla^2 R(\mathbf{r}) \Theta(\tau) T(t) = \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} R(\mathbf{r}) T(t) \quad (7)$$

Ne segue

$$\frac{\nabla^2 R(\mathbf{r})}{R(\mathbf{r})} = \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} \implies \frac{\nabla^2 R(\mathbf{r})}{R(\mathbf{r})} = \frac{1}{\Theta(\tau)} \frac{\partial \Theta(\tau)}{\partial \tau} = -B^2 \quad (8)$$

Integrando si ricava

$$\Theta(\tau) = e^{-B^2 \tau} \quad (9)$$

Supponiamo di avere una sorgente piana infinita in un reattore di spessore a , dove il range della variabile x è $-a/2 \leq x \leq +a/2$. Allora scriveremo:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + B^2 X = 0, \quad (10)$$

la cui soluzione generale, come già visto, è

$$X(x) = C_1 e^{iBx} + C_2 e^{-iBx} \quad (11)$$

In un numero precedente abbiamo visto che possiamo scrivere per la X le seguenti autofunzioni:

$$X_n = A_n \cos B_n x \quad (12)$$

corrispondenti agli autovalori

$$B_n = \frac{n\pi}{a} \quad (13)$$

Perciò la (6) diventa:

$$q^*(x, \tau, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-B_n \tau} T(t) \quad (14)$$

Chiameremo impulso di ampiezza S una funzione $S\delta(x)$ tale che sia $S\delta(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S\delta(x) dx = S \quad (15)$$

Ricordiamo la trasformata di Fourier di $\delta(x)$:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx \quad (16)$$

In generale è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

e dunque

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = (e^{-i\omega x})_{x=0} = 1 \quad (17)$$

Una funzione del tempo t può così essere espressa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (18)$$

Ne deriva che

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega x) d\omega \quad (19)$$

giacché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x) d\omega = 0 \quad (20)$$

Sostituendo l'integrale con una sommatoria:

$$S\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (21)$$

Ricordando la (5) scriviamo

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{K_{\infty}\Sigma_a} [q^*(\mathbf{r}, \tau = 0, t) - S(\mathbf{r})] \quad (22)$$

Sostituendo qui la (14) troviamo:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{K_\infty \Sigma_a} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} A_n T_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right] \quad (23)$$

che sostituito nell'equazione di diffusione dà:

$$-\frac{p}{K_\infty} \left(\frac{DB_n^2}{\Sigma_a} + 1 \right) [AT_n(t) - S_n] + pA_n e^{-B_n^2 \tau_{th}} T_n(t) = \frac{1}{v} \frac{p}{K_\infty \Sigma_a} A_n \frac{dT_n(t)}{dt} \quad (24)$$

Ricordando che $L^2 = D/\Sigma_a$ e chiamando con $l_0 = (v\Sigma_a)^{-1}$ la vita media di un neutrone, in un mezzo infinito, si ha

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{K_n - 1}{l_n} T_n(t) + \frac{S_n}{l_n A_n} \quad (25)$$

dove

$$K_n \stackrel{def}{=} \frac{K_\infty e^{-B_n^2 \tau_{th}}}{1 + L^2 B_n^2}, \quad l_n = \frac{l_0}{1 + L^2 B_n^2} \quad (26)$$

Risolvendo l'equazione differenziale (25) si trova:

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{K_n - 1}{l_n}t\right) + \frac{S_n}{A_n(1 - K_n)} \quad (27)$$

che sostituito in (23) dà

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{p}{K_\infty \Sigma_a} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \exp\left(\frac{K_n - 1}{l_n}t\right) + \frac{K_\infty e^{-B_n^2 \tau_{th}}}{1 + L^2 B_n^2} \frac{S_n}{A_n(1 - K_n)} \right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (28)$$

Il primo termine in parentesi rappresenta il contributo del sistema moderatore-combustibile. Il secondo termine con S_n rappresenta il contributo delle sorgenti esterne. Il buckling B^2 è $B_n^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ con $n = 1, 3, 5, \dots$. Dunque ricordando il valore di K_n (26) si può scrivere la successione $K_1 > K_3 > K_5 > \dots$ corrispondente a $B_n < B_{n+3} < B_{n+5} < \dots$

Immaginiamo che sia $K_1 < 1$, ossia fissata la dimensione a del reattore B_1 è tale che $K_1 < 1$. Allora

$$\exp\left(\frac{K_n - 1}{l_n}t\right) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0, \quad \text{per ogni } n \quad (29)$$

Quando a è tale per cui $K_1 = 1$ (a è dimensione critica) allora

$$A_1 \exp\left(\frac{K_1 - 1}{l_1}t\right) = A_1 \quad \text{e} \quad \frac{S_n}{A_n(1 - K_n)} = \infty$$

quindi si ha $S_1 = 0$ ossia non ci sono sorgenti. Il flusso allora è

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi(x, t) = \frac{p}{K_\infty \Sigma_a} A_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (30)$$

Un reattore è critico quando la distribuzione del flusso neutronico non dipende dal tempo t , cioè si è in regime stazionario.

L'esperienza con cui, date ad esempio le dimensioni del reattore, si vuole pervenire alla conoscenza della massa critica di materiale fissile è la seguente.

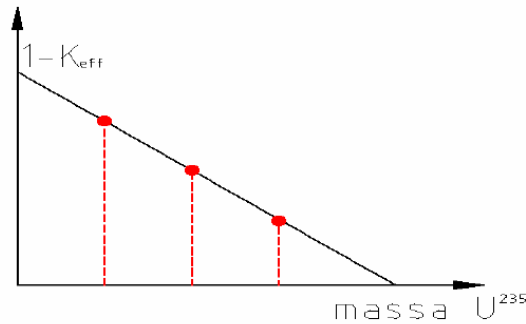


Figura 1: Determinazione della massa critica di U^{235} .

Nel caso in cui manca, per esempio, U^{235} il $K_n = 0$ e dunque il flusso Φ è proporzionale alla sorgente S_n . Si immette quindi U^{235} e si misura il flusso Φ proporzionale a $\frac{S}{1-K_1}$ con $K_1 = K_{eff}$. Così facendo si trovano diversi punti del diagramma di fig. 1.

Quando $1 - K_{eff} = 0$ si ha la massa critica di U^{235} . Analoga esperienza si può fare ponendo $1 - K_{eff}$ in funzione delle dimensioni. Riassumiamo le equazioni cui siamo pervenuti.

$$\Phi(x) = \frac{p}{K_{\infty}\Sigma_a} A_1 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad q^*(x, \tau) = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-B_n \tau_{th}} = \frac{K}{p} \Sigma_a \Phi(x) e^{-B_n \tau_{th}}$$

Riassumiamo alcune misure relative ad un reattore spoglio di forma cubica.

fuel	moderatore	refrigerante	B_g^2 [m^{-2}]	lato a [m]
U_{nat}	C	aria	0.56	7.25
U_{nat}	D ₂ O	D ₂ O	3.50	2.90
U arricchito	C	Na	5.60	2.30
U arricchito +	H ₂ O	H ₂ O	14	1.45
U arricchito ++	H ₂ O	H ₂ O	160	0.43
U arricchito +++	-	Na	350	0.29