Esercizio di Meccanica Quantistica

Testo tratto da *Problemi di Meccanica quantistica elementare* di G. Passatore, edito da F. Angeli.
(La soluzione è nostra – http://www.extrabyte.info)

1. Determinare la probabilità che un elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, si trovi in un cono di vertice nel nucleo, asse l'asse z, e di semiapertura $\pi/3$.

2. Determinare la probabilità di cui al punto 1, per uno stato con momento angolare $l = 1$, $m = 0$.

Soluzione
Quesito 1
La funzione d'onda è l'autofunzione dell'energia con $n = 1, l = 0, m = 0$:

$$u_{100}(r) = R_{10}(r) Y_0^0 \tag{1}$$

Consultando il formulario per ciò che riguarda le armoniche sferiche e le autofunzioni radiali, si ha:

$$u_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \tag{2}$$

La densità di probabilità è

$$\rho_{100}(r) = |u_{100}(r)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \tag{3}$$

Siamo interessati a "trovare" l'elettrone nel cono di vertice nel nucleo (origine degli assi coordinati), asse z e angolo di semiapertura $\theta_0 = \pi/3$, ovvero nel dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ in coordinate sferiche

$$D = \left\{ (r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r < +\infty, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\} \tag{4}$$

Segue la probabilità richiesta:

$$\begin{aligned} P &= \int_D \rho_{100}(r) \, dV = \frac{1}{\pi a_0^3} \iiint_D e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi a_0^3} \underbrace{\int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}}_{=\frac{a_0^3}{4}} \underbrace{\int_0^{\pi/3} d\theta \sin\theta}_{=\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \end{aligned}$$

Cioè

$$P = \frac{1}{4} \tag{5}$$

Quesito 2

Ricordiamo che nel caso dell'elettrone in uno stato legato dell'atomo di idrogeno, per un assegnato numero quantico $n \geq 1$, il numero quantico l può assumere i valori:

$$l = 0, 1, ..., n - 1$$

Quindi

$$l = 1 \Longrightarrow n > 1,$$

cioè l'elettrone è in uno stato eccitato o più in generale in

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n>1} c_n u_{n,1,0}(r, \theta, \varphi) \tag{6}$$

Senza perdita di generalità, supponiamo che lo stato sia $u_{n,1,0}(r,\theta,\varphi)$ con $n>1$. Quindi

$$u_{n,1,0}(r,\theta,\varphi)=R_{n1}(r)\,Y_1^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$

Segue

$$\rho_{n,1,0}(r,\theta,\varphi)=\frac{3}{4\pi}\left|R_{n1}(r)\right|^2\cos^2\theta \tag{7}$$

La probabilità

$$\begin{aligned}P&=\frac{3}{4\pi}\iiint_D\left|R_{n1}(r)\right|^2r^2\sin\theta\cos^2\theta drd\theta d\varphi\\&=\frac{3}{4\pi}\underbrace{\int_0^{+\infty}drr^2\left|R_{n1}(r)\right|^2}_{=1}\underbrace{\int_0^{\pi/3}d\theta\sin\theta\cos^2\theta}_{=\frac{7}{24}}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}\end{aligned}$$

Cioè

$$P=\frac{7}{16} \tag{8}$$

In fig.

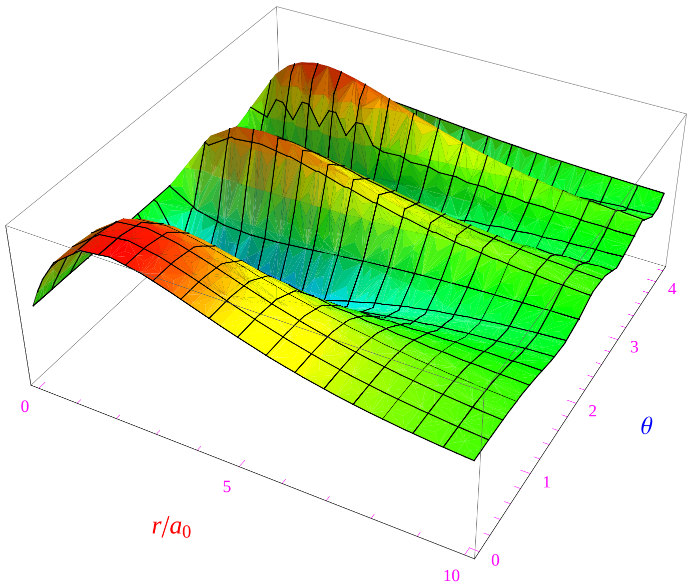

Figura 1: Andamento di $\rho_{210}(r,\theta)$.