Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Esercizio 1 *Determinare gli asintoti del grafico della funzione*

$$f(x) = 3x - \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) \tag{1}$$

Soluzione

Dobbiamo innanzitutto determinare il campo di esistenza X della funzione. Deve essere

$$\frac{2x+1}{x+2} > 0$$

Risolvendo questa disequazione otteniamo

$$X = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Segue

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -6 - \ln\left(\frac{-3}{0^-}\right) = -6 - \ln(+\infty) = -6 - (+\infty) = -\infty$$

Cioè la retta $x + 2 = 0$ è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{3}{2} - \ln\left(\frac{0^+}{-\frac{1}{2}+2}\right) = -\frac{3}{2} - \ln\left(0^+\right) = -\frac{3}{2} - (-\infty) = +\infty$$

Cioè la retta $2x + 1 = 0$ è asintoto verticale. Studiamo ora il comportamento all'infinito. Si trova facilmente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Vediamo se c'è un asintoto obliquo a destra:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[3 - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\right] \\ &= 3 - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = 3 - \frac{\ln 2}{+\infty} = 3 \\ n &= \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = -\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = -\ln 2 \end{aligned}$$

Quindi la retta $r : y = 3x - \ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Procedendo in maniera analoga per $x \to -\infty$ si ottiene la medesima retta quale asintoto obliquo. Ne concludiamo che $y = 3x - \ln 2$ è asintoto obliquo completo, come illustrato in fig. 1.

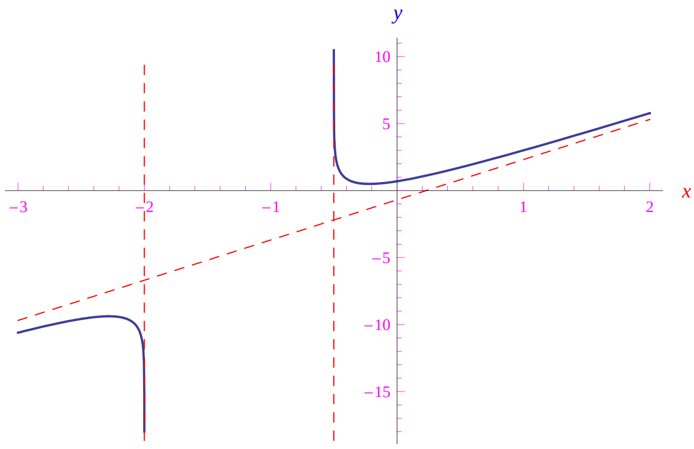

Figura 1: Esercizio 1.