Armoniche sferiche. Polinomi di Legendre

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Siano (θ, φ) le variabili angolari di un sistema di coordinate sferiche; denotiamo con $L^2(S_2)$ l'insieme delle funzioni di quadrato sommabile

$$\begin{aligned} f &: S_2 \to \mathbb{C} \\ f &: (\theta, \varphi) \to f(\theta, \varphi) \end{aligned} \tag{1}$$

definite sulla sfera unitaria:

$$S_2 : r = 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{2}$$

Per quanto precede, è richiesta la sommabilità del modulo quadro:

$$\int_{4\pi} |f(\theta, \varphi)|^2 \, d\Omega < +\infty \tag{3}$$

dove $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ è l'angolo solido elementare, mentre l'integrazione è estesa all'angolo solido totale (4π). Precisamente:

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, |f(\theta, \varphi)|^2 \, d\Omega < +\infty \tag{4}$$

Come è noto, l'insieme $L^2(S_2)$ può essere strutturato come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, introducendo le usuali operazioni di addizione di vettori e la moltiplicazione di uno scalare per un vettore, con relativi assiomi. Introducendo il prodotto scalare:

$$\langle f, g \rangle = \int_{4\pi} f(\theta, \varphi) \, g^*(\theta, \varphi) \, d\Omega, \quad \forall f, g \in L^2(S_2) \tag{5}$$

$L^2(S_2)$ assume una struttura di **spazio di Hilbert**, una cui base ortonormale è data dalle **armoniche sferiche**:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_{lm} P_l^m(\cos\theta) \, e^{im\varphi}, \tag{6}$$

dove:

N_{lm} è una costante di normalizzazione, e $l = 0, 1, 2, ..., +\infty$, mentre per un assegnato l l'indice m assume i seguenti $2l + 1$ valori $m = -l, -l + 1, ..., l - 1, l$;

$P_l^m(\cos\theta)$ sono le **funzioni associate di Legendre**:

$$P_l^m(\xi) = (-1)^m \left(1 - \xi^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) \tag{7}$$

essendo $P_l(\xi)$ i **polinomi di Legendre**:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} \left(\xi^2 - 1\right) \quad \text{(grado } l\text{, parità di } l\text{)} \tag{8}$$

La costante di normalizzazione è data da:

$$N_{lm} = \sqrt{\frac{(2l + 1)(l - m)!}{4\pi (l + m)!}} \tag{9}$$

Il sistema $\{Y_l^m(\theta,\varphi)\}$ è ortonormale e completo.

$$\int_{4\pi} Y_l^m(\theta,\varphi)\, Y_{l'}^{*m'}(\theta,\varphi)\, d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

dove $\delta_{ll'}$ è il simbolo di Kronecker. La completezza garantisce che ogni elemento dello spazio funzionale $L^2(S_2)$ può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base $\{Y_l^m(\theta,\varphi)\}$:

$$f(\theta,\varphi) \in L^2(S_2) \Longrightarrow f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi)\, d\Omega, \tag{10}$$

dove c_{lm} sono le componenti del "vettore" $f(\theta,\varphi)$ nella predetta base:

$$c_{lm} = \int_{4\pi} f(\theta,\varphi)\, Y_l^{*m}(\theta,\varphi)\, d\Omega \tag{11}$$

La (10) rappresenta lo sviluppo in armoniche sferiche di un'assegnata funzione $f(\theta,\varphi)$ di quadrato sommabile sulla sfera unitaria.