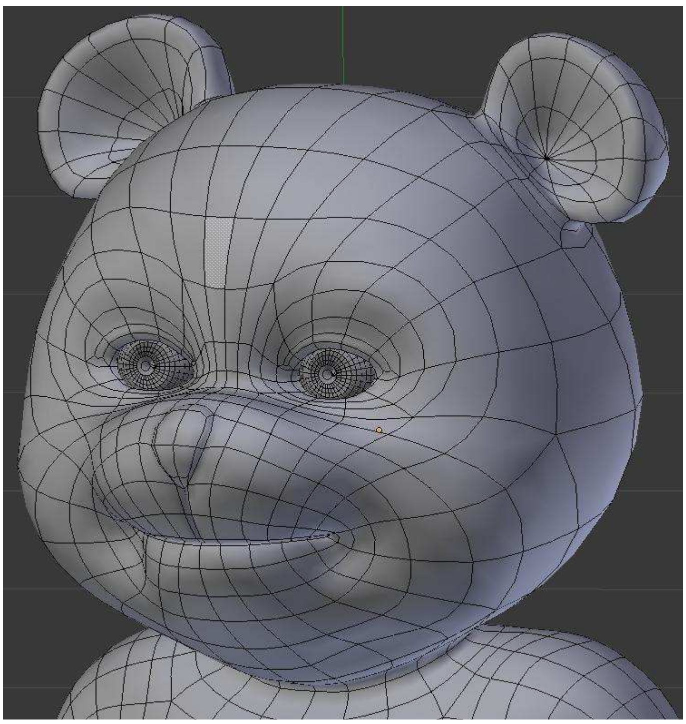
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org/
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Quaderni di Matematica – 2015

MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO

Introduzione alla Topologia

Marcello Colozzo



Indice

Parte I

Topologia generale

Capitolo 1

Topologia elementare in $\mathbb{R}^n$

1.1 Intorno di un punto

In questo paragrafo affrontiamo le principali proprietà topologiche dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Alcune di esse sono, in realtà, teoremi che verranno enunciati e dimostrati nel paragrafo successivo in riferimento a un qualunque spazio topologico.

Definizione 1 *Assegnati $A\,(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $B\,(b_1, b_2, ..., b_n)$ appartenenti allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con $a_k \leq b_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$, l'insieme dei punti :*

$$\mathcal{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k \quad (k = 1, 2, ..., n)\} \tag{1.1}$$

si dice **rettangolo chiuso di estremi** *A e B.*

Evidentemente:

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$$

Ad esempio, per $n = 2$ è $\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 \leq x \leq b_1,\ a_2 \leq x \leq b_2\ \}$ come illustrato in fig. 1.1.

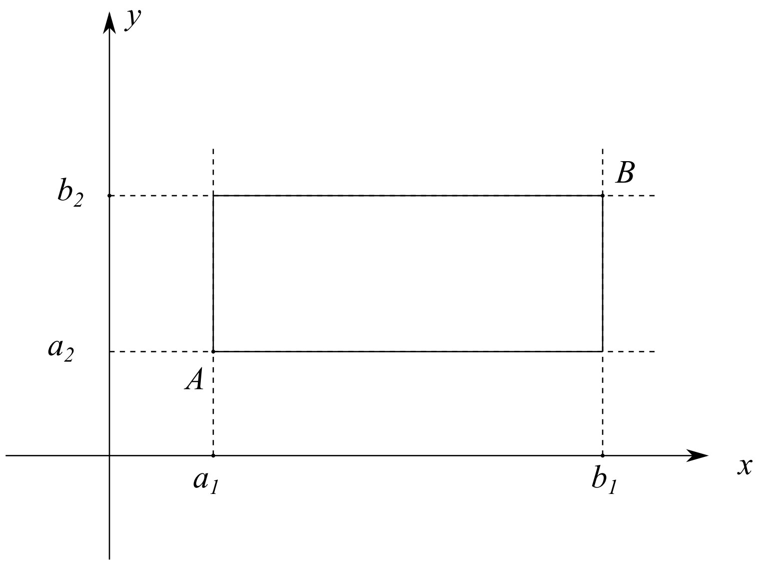


Figura 1.1: Rettangolo chiuso di estremi $A\,(a_1, a_2)$, $B\,(b_1, b_2)$.

Da tale definizione segue quest'altra:

Definizione 2 *L'insieme di punti:*

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_k < x_k < b_k \quad (k = 1, 2, ..., n)\} \tag{1.2}$$

si dice **rettangolo aperto di estremi** *A e B.*

L'insieme (1.2) è esprimibile attraverso il prodotto cartesiano di n intervalli aperti:

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n)$$

Considerando il caso $n = 2$, è $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 < x < b_1,\ a_2 < x < b_2\ \}$ come illustrato in fig. 1.2.

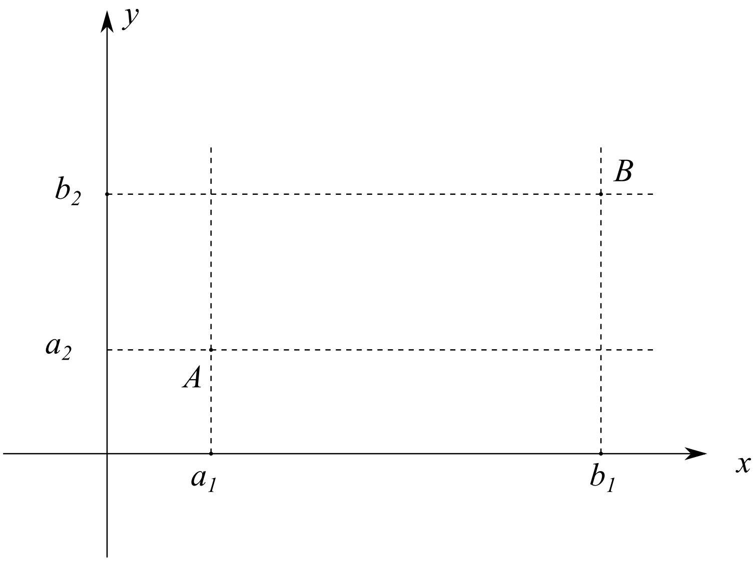


Figura 1.2: Rettangolo aperto di estremi $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$.

Definizione 3 *Assegnato il rettangolo $\mathcal{R}$ (aperto o chiuso) di estremi A e B, il* **centro** *di $\mathcal{R}$ è il punto $C(c_1, c_2, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$:*

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k), \quad k = 1, 2, ..., n$$

Denotiamo con $\mathcal{R}(C)$ un qualunque rettangolo (aperto o chiuso) centrato in C.

Definizione 4 *Assegnati $P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$ e $R \geq 0$, si dice* **cerchio chiuso di centro P_0 e raggio** *R, l'insieme di punti:*

$$\Omega_R(P_0) = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n \left(x_k - x_k^{(0)}\right)^2 \leq R^2\right\}$$

Definizione 5 *Assegnati $P_0\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$ e $R \geq 0$, si dice* **cerchio aperto di centro P_0 e raggio** *R, l'insieme di punti:*

$$\Lambda_R(P_0) = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^n \left(x_k - x_k^{(0)}\right)^2 < R^2\right\}$$

Proposizione 6

$$\forall P_0 \in \mathbb{R}^n,\ \exists \mathcal{R}(P_0) \neq \emptyset \mid \mathcal{R}(P_0) \ \text{è aperto}$$

Dimostrazione. Siano $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ le coordinate cartesiane di P_0.

$$\forall \delta > 0, \ \left(x_1^{(0)} - \delta, x_1^{(0)} + \delta\right) \times \left(x_2^{(0)} - \delta, x_2^{(0)} + \delta\right) \times ... \times \left(x_n^{(0)} - \delta, x_n^{(0)} + \delta\right) \neq \emptyset,$$

L'insieme di punti $\times_{k=1}^{n} \left(x_k^{(0)} - \delta, x_k^{(0)} + \delta\right)$ è manifestamente un rettangolo aperto centrato in P_0, onde l'asserto. ■

Allo stesso modo si dimostra la seguente proposizione:

Proposizione 7

$$\forall P_0 \in \mathbb{R}^n, \ \exists \Lambda_R (P_0) \neq \emptyset$$

Tali proposizioni suggeriscono le seguenti definizioni:

Definizione 8 *Assegnato il punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$, un* **intorno rettangolare di** *P_0 è un qualunque rettangolo aperto non vuoto, centrato in P_0.*

Definizione 9 *Un* **intorno circolare di** *P_0 è un qualunque cerchio aperto non vuoto, centrato in P_0.*

Definizione 10 *Un qualunque sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$ è un* **intorno** *di P_0 se contiene un intorno rettangolare o circolare di P_0. Indichiamo con $I(P_0)$ un intorno di P_0.*

1.2 Punti interni. Punti esterni. Punti di frontiera

Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 11 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *è* **interno** *a X) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists I(P_0) \subseteq X$,*

Evidentemente:

$$P_0 \in \mathbb{R}^n \text{ è interno a } X) \ \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \ (P_0 \in X \ ,$$

cioè l'appartenenza a X è condizione necessaria ma non sufficiente affinchè P_0 sia interno a X.

Definizione 12 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *è* **esterno** *a X) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists I(P_0) \mid I(P_0) \cap X = \emptyset$*

Denotiamo con $C(X)$ il complementare di X in $\mathbb{R}^n$:

$$C(X) = \mathbb{R}^n - X \tag{1.3}$$

Abbiamo:

$$P_0 \in \mathbb{R}^n \text{ è esterno a } X) \Longleftrightarrow (P_0 \text{ è interno a } C(X)$$

Definizione 13 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *è* **di frontiera** *per X) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} (P_0$ non è nè interno, nè esterno a $X) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (\forall I(P_0), \quad X \cap I(P_0) \neq \emptyset, \ C(X) \cap I(P_0) \neq \emptyset$*

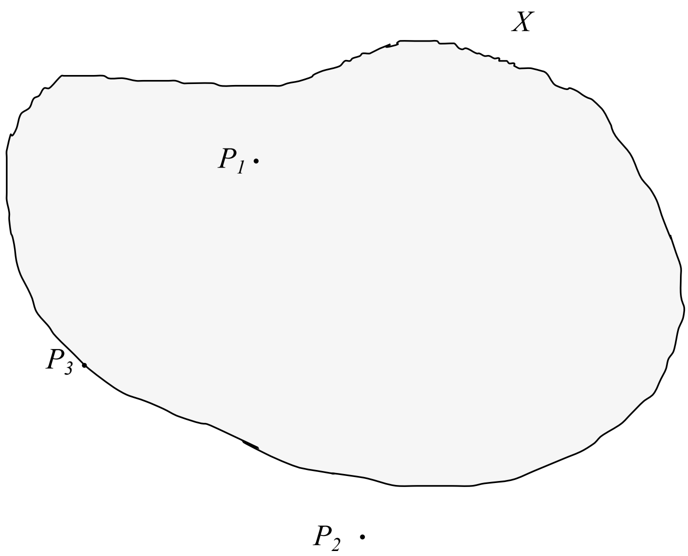


Figura 1.3: P_1 è punto interno per $X \subset \mathbb{R}^2$. Il punto P_2 è esterno, mentre il punto P_3 è di frontiera.

In fig. 1.3 riportiamo un esempio 2-dimensionale.

$$\overset{\circ}{X} \overset{def}{=} \{P \in \mathbb{R}^n \mid P \text{ è interno a } X\} \tag{1.4}$$
$$\partial X \overset{def}{=} \{P \in \mathbb{R}^n \mid P \text{ è di frontiera per } X\}$$

Si legge:

$$\overset{\circ}{X} \quad \textbf{interno di } X$$
$$\partial X \ \textbf{frontiera di } X$$

Si osservi che $\overset{\circ}{X} \subseteq X$. Nel capitolo successivo dimostreremo che l'interno di X è dato da:

$$\overset{\circ}{X} = X - \partial X$$

Per ora ci limitiamo ad enunciare (e in seguito dimostreremo):

$$X \text{ è } \textbf{chiuso }) \Longleftrightarrow \partial X \subseteq X \tag{1.5}$$
$$X \text{ è } \textbf{aperto }) \Longleftrightarrow X = \overset{\circ}{X}$$

Dalla definizione 13 segue

$$\partial X = \partial C(X), \quad \forall X \subseteq \mathbb{R}^n$$

Teorema 14 *X è chiuso [aperto] $\Longleftrightarrow C(X)$ è aperto [chiuso]*

Dimostrazione.

$$X \text{ è chiuso} \Longleftrightarrow X \supseteq \partial X \Longleftrightarrow \emptyset = C(X) \cap \partial X \underset{\partial X = \partial C(X)}{=} C(X) \cap \partial C(X),$$

cioè $C(X)$ è aperto. In maniera simile si dimostra il resto del teorema. ■

Teorema 15 *Se $\{X_k\}$ $(k = 1, 2, ..., N)$ è una famiglia di aperti, si ha:*

$$A_N \overset{def}{=} \bigcup_{k=1}^{N} X_k \text{ è un aperto} \tag{1.6}$$
$$\lim_{N \to +\infty} A_N \text{ è un aperto}$$
$$B_N \overset{def}{=} \bigcap_{k=1}^{N} X_k \text{ è un aperto}$$

Dimostrazione. $P \in A_N \Longrightarrow \exists h \in \{1,2,...,N\} \mid P \in X_h \underset{X_h = \mathring{X}_h}{\Longrightarrow} \exists I(P) \subseteq X_h \Longrightarrow I(P) \subset \bigcup_{k=1}^{N} X_k$

Cioè:

$$\forall P \in A_N, \ \exists I(P) \subset A_N,$$

onde la prima delle (1.6). Per dimostrare la seconda poniamo:

$$A_\infty = \lim_{n \to +\infty} A_N,$$

quindi:

$$\forall P \in A_\infty, \ \exists I(P) \subset A_\infty) \Longrightarrow A_\infty \text{ è aperto}$$

Pertanto l'unione di un numero infinito numerabile di aperti è un insieme aperto. Dimostriamo la terza.

$$P \in B_N \Longrightarrow (P \in X_k, \ \forall k \in \{1,2,...,N\}) \underset{X_k = \mathring{X}_k}{\Longrightarrow} \exists I_{\delta_k}(P) \subset X_k,$$

essendo $I_{\delta_k}(P)$ un intorno circolare di P di raggio δ_k. Posto

$$\delta = \min_{k \in \{1,2,...,N\}} \{\delta_k\},$$

si ha:

$$I_\delta(P) \subset X_k, \quad \forall k \in \{1,2,...,N\},$$

cioè

$$I_\delta(P) \subset B_N \Longrightarrow B_N \text{ è un aperto}$$

■

Osservazione 16

$$\{X_k\} \ \textit{famiglia di aperti} \nRightarrow \lim_{N \to +\infty} \bigcap_{k=1}^{N} X_k \ \textit{è aperto}$$

Consideriamo ad esempio $X_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \Delta_k^2\}$, *con* $\Delta_k = 1 + \frac{1}{k}$, *essendo* $k = 1,2,...,N$. $\{X_k\}$ *è l'insieme dei cerchi aperti centrati nell'origine del piano cartesiano e di raggio* Δ_k, *come illustrato in fig. 1.4. Studiamo l'insieme:*

$$B_N = \bigcap_{k=1}^{N} X_k$$

A tale scopo fissiamo $N = 2$*:*

$$B_2 = X_1 \cap X_2 = X_2$$

Per ogni $N \in \mathbb{N} - \{0\}$*:*

$$B_N = X_N = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \Delta_N^2\right\}$$

Al crescere indefinito di N *i cerchi tendono ad addensarsi sul cerchio chiuso di raggio unitario, risultando:.*

$$\lim_{N \to +\infty} \bigcap_{k=1}^{N} X_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

che è un insieme chiuso.

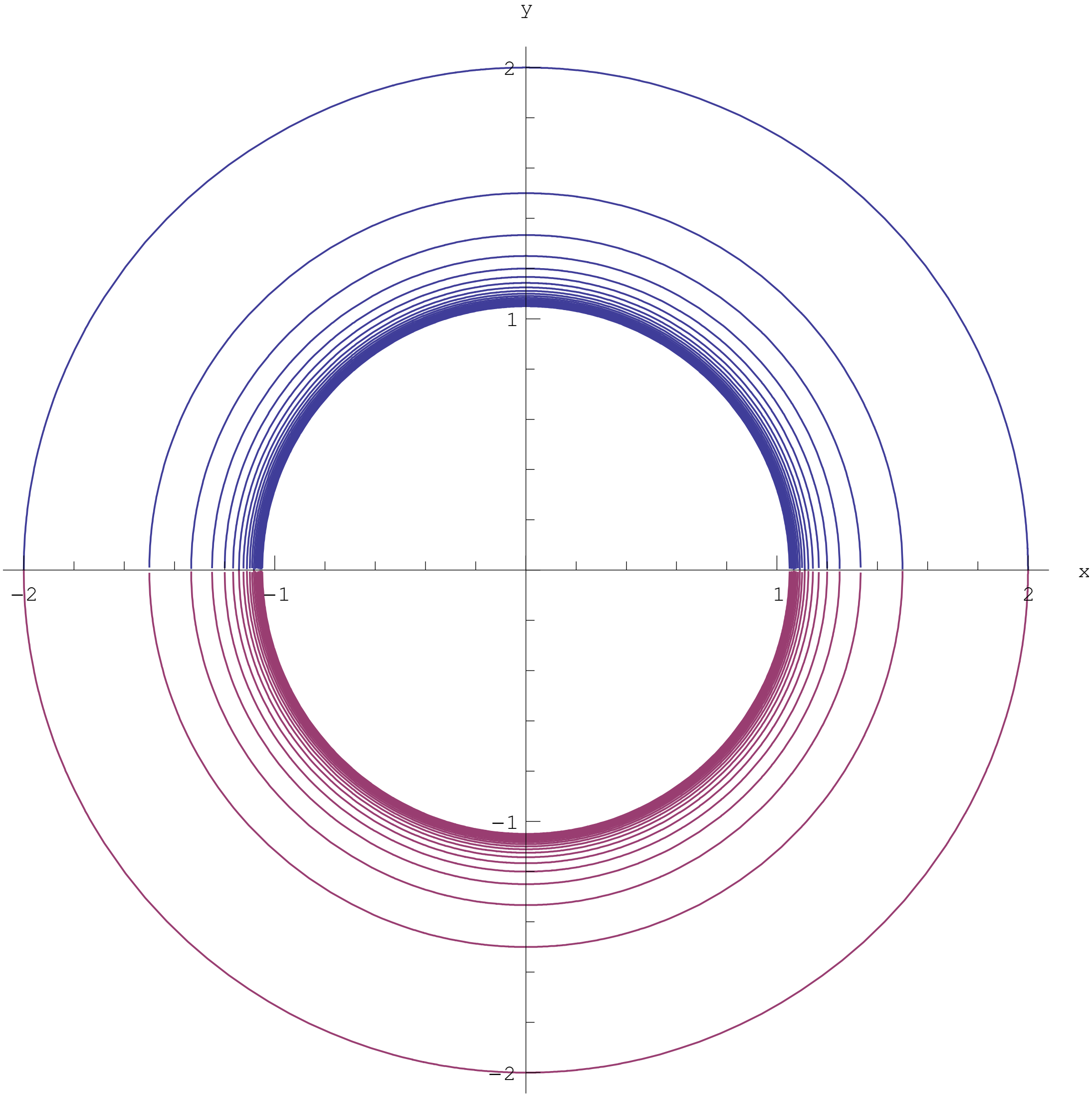


Figura 1.4: La famiglia $\{X_k\}$ è un insieme di cerchi aperti centrati nell'origine e di raggio $\Delta_k = 1 + \frac{1}{k}$ con $k = 1, 2, ..., N$. Al crescere indefinito di $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, i cerchi si addensano sul cerchio chiuso di raggio unitario.

Esempio 17 *Sia*

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$$

Cioè, X è l'insieme dei punti di piano le cui coordinate cartesiane sono numeri razionali.

$$(q_1, q_2) \in X \Longleftrightarrow q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$$

Preso ad arbitrio il punto $P(q_1, q_2) \in X$, si ha:

$$\left.\begin{array}{c} \forall I_{\delta_x}(q_1) = (q_1 - \delta_x, q_1 + \delta_x), \ \exists x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \mid x \in I_{\delta_x}(q_1) \\ \forall I_{\delta_y}(q_2) = (q_2 - \delta_y, q_2 + \delta_y), \ \exists y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \mid x \in I_{\delta_y}(q_2) \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall P \in X, \, \exists I(P) = I_{\delta_x}(q_1) \times I_{\delta_y}(q_2) \mid I(P) \nsubseteq X$$

$$\Longrightarrow \mathring{X} = \emptyset$$

Quindi X è privo di punti interni. Ciò implica che X non è aperto. Per stabilire se X è chiuso, consideriamo il suo complementare:

$$C(X) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\right\}$$

Abbiamo:

$$\forall P \in C(X), \, \nexists I(P) \subset C(X) \Longrightarrow C(X) \ \textit{non è aperto}$$

Ne concludiamo che X non è nè aperto e nè chiuso. Inoltre preso ad arbitrio $P \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall I(P), \quad X \cap I(P_0) \neq \emptyset, \ C(X) \cap I(P_0) \neq \emptyset$$

Cioè $\partial X = \mathbb{R}^2$: ogni punto del piano è punto di frontiera per X.

Esempio 18 *Sia $X = \{P\}$, essendo P un punto assegnato di $\mathbb{R}^n$. Il complementare di X è $C(X) = \mathbb{R}^n - \{P\}$. Abbiamo:*

$$\nexists I(P) \mid I(P) \subseteq X \Longrightarrow P \notin \mathring{X}$$

ma $\exists! P \in X$, per cui: $\mathring{X} = \emptyset \Longrightarrow X$ non è aperto. Inoltre:

$$\forall I(P), \ \left\{\begin{array}{c} X \cap I(P) = \{P\} \neq \emptyset \\ C(X) \cap I(P) = I(P) - \{P\} \neq \emptyset \end{array}\right) \Longrightarrow P \in \partial X$$

Quindi $\partial X = X \Longrightarrow X$ è chiuso.

Esempio 19 *Assegnati N punti distinti $P_1, P_2, ..., P_N \in \mathbb{R}^n$, sia $X = \{P_1, P_2, ..., P_N\}$. In modo analogo all''esempio precedente, si dimostra che X è chiuso.*

Esempio 20 *Assegnato $R > 0$, sia*

$$X = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x^2 = R^2\right\}$$

Cioè, X è la superficie di una ipersfera di raggio R centrata nell'origine. Il complementare di X è:

$$C(X) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

dove:

$$\Sigma_1 = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x^2 < R^2\right\}$$

$$\Sigma_1 = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x^2 > R^2\right\}$$

Gli insiemi $\Sigma_{1,2}$ sono manifestamente aperti e tale è la loro unione, cioè $C(X)$. Ne concludiamo che X è chiuso.

Capitolo 2

Spazi topologici

2.1 Definizione assiomatica

Gli argomenti presentati nel capitolo precedente, si riferiscono a sottoinsiemi dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. In realtà, tali argomenti possono essere generalizzati a un qualunque insieme S non vuoto. Più specificatamente, riassumiamo le proprietà che ci interessano.

Sia Θ la totalità degli insiemi aperti[1] di $\mathbb{R}^n$. Nel capitolo precedente abbiamo visto che Θ verifica le seguenti proprietà:

1. $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \Theta$
2. $X_k \in \Theta$, $(k = 1, 2, ..., N < +\infty) \Longrightarrow \displaystyle\bigcap_{k=1}^{N} X_k \in \Theta$
3. $X_k \in \Theta$, $(k = 1, 2, ..., N \leq +\infty) \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{k=1}^{N} X_k \in \Theta$

Ciò premesso, a un qualunque insieme S possiamo univocamente associare l'insieme i cui elementi sono i sottoinsiemi di S. Denotando con $\mathcal{P}(S)$ tale insieme, si ha:

$$\mathcal{P}(S) = \{S' \mid S' \subseteq S\} \tag{2.1}$$

Definizione 21 *Chiamiamo $\mathcal{P}(S)$* **insieme della parti di** *S.*

Riesce:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \tag{2.2}$$

e

$$\emptyset, S \in \mathcal{P}(S), \quad \forall S \neq \emptyset$$

Proposizione 22

$$\mathcal{P}(S) \neq \emptyset, \quad \forall S$$

Dimostrazione. $S \neq \emptyset \Longrightarrow S \in \mathcal{P}(S) \Longrightarrow \mathcal{P}(S) \neq \emptyset$

$S = \emptyset \underset{\text{eq. (2.2)}}{\Longrightarrow} \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ ■

Definizione 23 $\Theta \subseteq \mathcal{P}(S)$ *è una* **topologia** *per S, se sono verificate le seguenti proprietà:*

[1] Incluso l'insieme vuoto, giacchè è facile persuadersi che $\emptyset$ è contemporaneamente aperto e chiuso.

1. $\emptyset, S \in \Theta$

2. $X_k \in \Theta$, $(k = 1, 2, ..., N < +\infty) \Longrightarrow \bigcap_{k=1}^{N} X_k \in \Theta$

3. $X_k \in \Theta$, $(k = 1, 2, ..., N \leq +\infty) \Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{N} X_k \in \Theta$

La coppia ordinata (S, Θ) si chiama **spazio topologico**. *Gli elementi di Θ sono gli* **insiemi aperti** *o semplicemente gli* **aperti** *di S. Gli elementi di S sono i* **punti** *dello spazio topologico (S, Θ). Gli* **insiemi chiusi** *di S sono, invece, tutti e soli i sottoinsiemi di S il cui complementare (in S) è aperto. Cioè:*

$$Y \subseteq S \text{ è } \textbf{chiuso} \overset{def}{\Longleftrightarrow} C(Y) \in \Theta$$

Proposizione 24

$$\forall S \neq \emptyset, \quad \Theta = \{\emptyset, S\} \text{ è una topologia per } S$$

Dimostrazione. Il primo assioma è banalmente verificato. Riesce:

$$\emptyset \cap S = \emptyset, \;\; \emptyset \cup S = S,$$

per cui sono verificati gli assiomi 2 e 3. ■

Definizione 25 $\Theta = \{\emptyset, S\}$ *è detta* **topologia banale**

Esempio 26 *La topologia banale per $\mathbb{R}^n$ è $\Theta = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$. In tale topologia, l'unico aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$ è $\mathbb{R}^n$ medesimo. Tuttavia, in $\mathbb{R}^n$ la topologia naturale è quella euclidea. Più precisamente:*

$$\Theta_e = \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^n \mid \forall P_0 \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)} \right) \in A, \, \exists U_{\delta \geq 0, P_0} \subseteq A \right\}, \tag{2.3}$$

essendo:

$$U_{\delta \geq 0, P_0} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^{(0)} \right) < \delta^2 \right\}, \tag{2.4}$$

cioè $U_{\delta \geq 0, P_0}$ è un cerchio aperto centrato in P_0 di raggio $\delta \geq 0$, onde $U_{\delta = 0, P_0} = \emptyset$. Nel caso speciale $n = 1$:

$$\Theta_e = \left\{ A \subseteq \mathbb{R}^1 \mid \forall x_0 \in A, \, \exists U_{\delta \geq 0, x_0} \subseteq A \right\},$$

dove:

$$U_{\delta \geq 0, x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

2.2 Punti interni. Intorno di un punto. Punti di frontiera

La definizione 11 di punto interno e la definizione 10 di intorno di un punto si generalizzano a un qualunque spazio topologico (S, Θ).

Definizione 27

$$x \in S \text{ è } \textbf{interno} \text{ a } X \subseteq S) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists A \in \Theta \mid A \subseteq X, \;\; x \in A$$

(fig. 2.1).

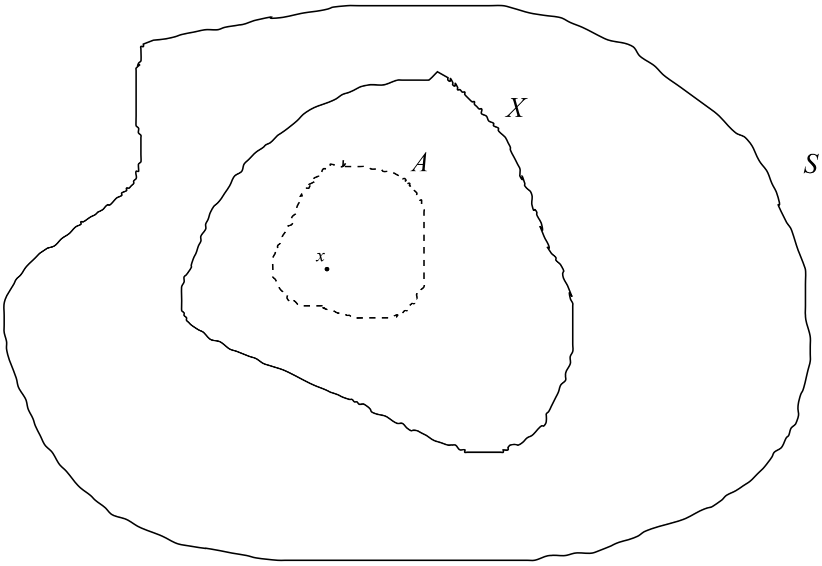


Figura 2.1: x è interno all'insieme $X \subseteq S$, se esiste almeno un aperto contenuto in X e contenente x.

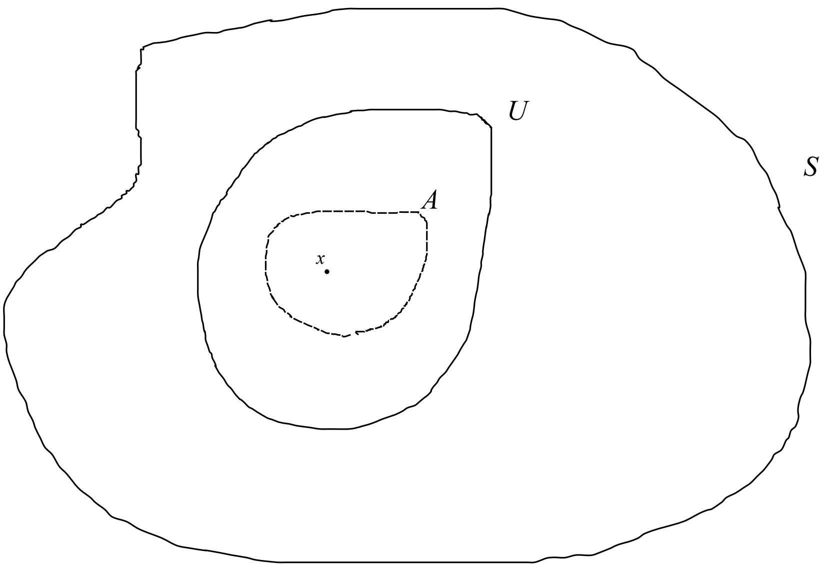


Figura 2.2: U è un intorno di x (definizione 28).

Definizione 28

$$U \subseteq S \text{ è un } \textbf{intorno} \text{ di } x \in S) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x \text{ è interno a } U$$

Cioè $U \subseteq S$ è un intorno di $x \in S$ se $\exists A \in \Theta \mid A \subseteq U, \ \ x \in A$ (cfr. fig. 2.2).
Assegnato $x \in S$, poniamo:

$$\mathcal{U}_x \overset{def}{=} \{U \subseteq S \mid U \text{ è un intorno di } x\} \tag{2.5}$$

Cioè chiamiamo $\mathcal{U}_x$ l'insieme i cui elementi sono gli intorni di x. Pertanto la definizione 28 può essere riformulata:

$$U \in \mathcal{U}_x \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists A \in \Theta \mid A \subseteq U, \quad x \in A \tag{2.6}$$

Osservazione 29 *Nella (2.6) l'aperto A è, a sua volta, un intorno di x. Infatti:*

$$A \in \Theta \mid A \subseteq A, \, x \in A \Longrightarrow A \in \mathcal{U}_x$$

Proposizione 30

$$V \subset S \mid V \supset U \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow V \in \mathcal{U}_x \tag{2.7}$$

$$U, V \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x \tag{2.8}$$

$$U \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow \exists V \in \mathcal{U}_x \mid U \in \mathcal{U}_y, \ \forall y \in V \tag{2.9}$$

Dimostrazione. La (2.7) si dimostra banalmente.
La (2.8):

$$U, V \in \mathcal{U}_x \Longrightarrow \exists A, B \in \Theta \mid \begin{cases} A \subseteq U, \ x \in A \\ B \subseteq V, \, x \in B \end{cases}$$
$$\Longrightarrow x \in A \cap B \subseteq U \cap V \underset{A \cap B \in \Theta}{\Longrightarrow} U \cap V \in \mathcal{U}_x$$

La (2.9):

$$U \in \mathcal{U}_x \Longleftrightarrow (\exists A \in \Theta \mid A \subseteq U, \ x \in A) \Longrightarrow \exists V \mid A \subseteq V \subseteq U$$
$$\Longrightarrow (\exists B \in \Theta \mid B \subseteq U, \ \ y \in B, \ \ \forall y \in V) \Longrightarrow U \in \mathcal{U}_y$$

■

Esempio 31 *Nel caso della topologia banale $\Theta = \{\emptyset, S\}$, risulta: $\forall x \in S, \ \mathcal{U}_x = \{S\}$. Riprendendo l'esempio 26 nel caso $n = 1$, si ha che mentre nella topologia euclidea un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ è ogni intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, nella topologia banale $\Theta = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ l'unico intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ è l'insieme medesimo $\mathbb{R}$.*

Estendiamo le definizioni 13-1.4 a un qualunque spazio topologico (S, Θ).

Definizione 32 *Dicesi* **interno di** *di $X \subseteq S$ l'insieme:*

$$\overset{\circ}{X} = \{x \in S \mid x \text{ è interno a } X\} \subseteq X, \tag{2.10}$$

secondo la definizione 27.

$$\text{Un punto } x \in S \text{ è di } \textbf{frontiera} \text{ per } X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall U \in \mathcal{U}_x, \ \begin{cases} X \cap U \neq \emptyset \\ C(X) \cap U \neq \emptyset \end{cases}, \tag{2.11}$$

dove $C(X)$ è il complementare di X in S. Dicesi **frontiera di** *X l'insieme:*

$$\partial X = \{x \in S \mid x \text{ è di frontiera per } X\} \tag{2.12}$$

Nel caso dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ abbiamo definito gli insiemi aperti mediante la seconda delle (1.5) che è, in realtà, un teorema. Iniziamo con il dimostrare il seguente lemma:

Lemma 33 *Sia* (S,Θ) *uno spazio topologico.*

$$\forall X \subseteq S, \ \ \mathring{X} = \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A \ \ \text{e } \mathring{X} \text{ è il più grande aperto contenuto in } X$$

Dimostrazione. Iniziamo con il dimostrare che $\mathring{X}$ è l'unione di tutti e soli gli aperti di (S,Θ) contenuti in X. Per definizione di punto interno a X:

$$x \in \mathring{X} \Longrightarrow \exists A \in \Theta \mid A \subseteq X, \ \ x \in A,$$

per cui al variare di x in $\mathring{X}$ riesce $x \in \bigcup\limits_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A$. Quindi:

$$\left. x \in \mathring{X} \Longrightarrow x \in \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A \right) \Longrightarrow \mathring{X} \subseteq B \stackrel{def}{=} \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A$$

Viceversa, preso ad arbitrio $x \in B$, si ha:

$$B \in \Theta \mid B \subseteq X, \ \ x \in B) \Longrightarrow x \in \mathring{X}, \tag{2.13}$$

onde in forza dell'arbitriarietà di x:

$$\left. x \in \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A \Longrightarrow x \in \mathring{X} \right) \Longrightarrow \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A \subseteq \mathring{X}$$

In definitiva:

$$\bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A \subseteq \mathring{X} \subseteq \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A \Longrightarrow \mathring{X} = \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A$$

Per dimostrare la seconda parte del lemma, osserviamo innanzitutto che da

$$\mathring{X} = \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A$$

segue $\mathring{X} \in \Theta$, $\mathring{X} \subseteq X$. Inoltre:

$$\forall A_0 \in \Theta \mid A_0 \subseteq X \Longrightarrow \ A_0 \subseteq \bigcup_{\substack{A\in\Theta \\ A\subseteq X}} A = \mathring{X},$$

per cui $\mathring{X}$ è il più grande aperto contenuto in X ■

Teorema 34

$$X \text{ è aperto} \Longleftrightarrow X = \mathring{X}$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria.

Per ipotesi è $X = \mathring{X}$. Nel corso della dimostrazione del lemma precedente abbiamo mostrato che $\mathring{X} \in \Theta$, per cui $X \in \Theta$.

La condizione è sufficiente

Per ipotesi X è aperto $\Longrightarrow$ il più grande aperto contenuto in X è X medesimo. Per il lemma precedente, il più grande aperto contenuto in X è $\mathring{X}$, onde $X = \mathring{X}$. ■

2.3 Base di uno spazio topologico

Sia (S, Θ) uno spazio topologico.

Definizione 35 *$\mathcal{B} \subseteq \Theta$ è una* **base**[2] *di S se ogni aperto di S si esprime come unione di elementi di $\mathcal{B}$. In simboli:*

$$\left.\begin{array}{c}\mathcal{B} \subseteq \Theta \text{ è una } \textbf{base} \\ \text{di } S\end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\forall A \in \Theta,\ \exists B_a \in \mathcal{B} \mid A = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} B_a\ ,\right.$$

Definizione 36

$$S \text{ è a } \textbf{base numerabile}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \mathcal{B} \text{ base di } S \mid \mathcal{A} \text{ è al più infinito numerabile}$$

dove $\mathcal{A}$ è tale che $A = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} B_a$, $\forall B_a \in \mathcal{B}$ e per un assegnato $A \in \Theta$.

Consideriamo ad esempio la **topologia discreta**:

$$\Theta_d = \mathcal{P}(S) \tag{2.14}$$

Ogni sottoinsieme di S è un aperto di S. In particolare, $\forall x \in S$, $\{x\} \in \Theta_d$, i.e. $\{x\}$ è un aperto di S. Ogni sottoinsieme $\{x\}$ costituito da un solo elemento di S, è denominato *singoletto*. È facile persuadersi che $\mathcal{B} = \{\{x\}\}_{x \in S} \subset \Theta_d$ è una base di S. Ad esempio, se prendiamo l'aperto $A = S \in \Theta_d$, si ha: $S = \bigcup_{x \in S} B_x$, dove $B_x = \{x\}$. Ne consegue che lo spazio topologico (S, Θ_d) è a base numerabile se e solo se l'insieme S è al più infinito numerabile. I due esempi seguenti chiariranno i concetti appena esposti.

Esempio 37 *Sia $S = \left\{\sqrt{2}, \pi, e\right\}$, dove e è la base dei logaritmi naturali. La* topologia discreta *è:*

$$\Theta_d = \left\{\emptyset, S, \left\{\sqrt{2}\right\}, \{\pi\}, \{e\}, \left\{\sqrt{2}, \pi\right\}, \left\{\sqrt{2}, e\right\}, \{\pi, e\}\right\}$$

Una base è:

$$\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \in \mathcal{A}}\ ,$$

dove $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ e $B_1 = \left\{\sqrt{2}\right\}$, $B_2 = \{\pi\}$, $B_z = \{e\}$. Quindi (S, Θ_d) è a base numerabile. Inoltre, per definizione di base, un qualunque aperto di S (compreso S, giacchè è un aperto) si esprime come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Più precisamente:

$$S = \bigcup_{k=1}^{3} B_k = \left\{\sqrt{2}\right\} \cup \{\pi\} \cup \{e\}$$

I rimanenti aperti:

$$\begin{aligned} \left\{\sqrt{2}\right\} &= B_1 \quad \text{e simili} \\ \left\{\sqrt{2}, \pi\right\} &= B_1 \cup B_2 \\ \{\pi, e\} &= B_2 \cup B_3 \\ \left\{\sqrt{2}, e\right\} &= B_1 \cup B_3 \end{aligned}$$

[2] Un'altra denominazione è *base degli aperti di S*, o ancora *base della topologia Θ*.

Esempio 38 *Sia* $S = \mathbb{R}$. *Nella topologia discreta una base è:*

$$\mathcal{B} = \{B_x\}\,,\ con\ B_x = \{x\}_{x\in\mathbb{R}}$$

Un qualunque aperto di $\mathbb{R}$ *(compreso* $\mathbb{R}$*, giacchè è un aperto, i.e. è un elemento di* $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \Theta_d$*) si esprime come unione di elementi di* $\mathcal{B}$*. Più precisamente:*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} B_x = \bigcup_{x=-\infty}^{+\infty} \{x\} = (-\infty, +\infty)$$

Quindi $(\mathbb{R}, \Theta_d)$ *non è a base numerabile.*

2.4 Sottospazio topologico

Proposizione 39 *Sia* (S, Θ) *uno spazio topologico, dove* $\Theta = \{A_h\}_{h\in H}$*. Per ogni* $Y \subseteq S$*, l'insieme* $\Theta_Y = \{A_h \cap Y\}_{h\in H}$ *definisce una topologia su* Y*, denominata* **topologia indotta** *.*

Dimostrazione. $\emptyset \cap Y = \emptyset$, $S \cap Y = Y \Longrightarrow \emptyset, Y \in \Theta_Y$, per cui è verificato il primo assioma di spazio topologico.

Poniamo $A'_h = A_h \cap Y$.

$$\underbrace{\left(\bigcup_{h\in H} A_h\right) \cap Y}_{\in\Theta_Y} = \bigcup_{h\in H} (A_h \cap Y) = \bigcup_{h\in H} A'_h$$

Cioè $\bigcup_{h\in H} A'_h \in \Theta_Y$.

$$\bigcap_{h\in H} (A_h \cap Y) = \underbrace{\left(\bigcap_{h\in H} A_h\right) \cap Y}_{\in\Theta_Y} \Longrightarrow \bigcap_{h\in H} (A_h \cap Y) \in \Theta_Y$$

Restano dunque verificati i rimanenti assiomi di spazio topologico. ■

Definizione 40 *Sia* (S, Θ) *uno spazio topologico. Per ogni* $Y \subseteq S$ *non vuoto, chiamiamo* ***sottospazio di*** S*, la coppia ordinata* (Y, Θ_Y)*, dove* Θ_Y *è la topologia indotta da* Θ*.*

Proposizione 41 *Se* $\mathcal{B} = \{B_h\}_{h\in H}$ *è una base per gli aperti dello spazio topologico* (S, Θ)*, una base per gli aperti di un qualunque sottospazio* (Y, Θ_Y) *è* $B_Y = \{B'_h = B_h \cap Y\}_{h\in H}$ *è una base per gli aperti di* Y*.*

Dimostrazione. Omessa. ■

2.5 Punti di accumulazione. Punti isolati. Punti di aderenza

Definizione 42 *Sia* (S, Θ) *uno spazio topologico. Assegnato* $X \subseteq S$*,*

$$x_0 \in S \text{ è } \textbf{punto di accumulazione} \text{ per } X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall U \in \mathcal{U}_{x_0},\ \exists x \in U \cap (X - \{x_0\}) \tag{2.15}$$

In altri termini, x_0 è di accumulazione per X se in *ogni* suo intorno cade *almeno* un punto di X *distinto* da x_0.

Definizione 43

$$x_0 \in X \text{ è } \textbf{punto isolato} \text{ di } X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (x_0 \text{ non è punto di accumulazione per } X) \Longleftrightarrow \tag{2.16}$$
$$\Longleftrightarrow (\exists U \in \mathcal{U}_{x_0} \mid \; U \cap (X - \{x_0\}) = \emptyset$$

Cioè, x_0 è punto isolato di X se esiste almeno un intorno di x_0 in cui non cade nessun punto di X distinto da x_0.

Definizione 44 *Dicesi* **insieme derivato** *di X, o semplicemente* **derivato** *di X, il seguente sottoinsieme di S:*

$$D_r(X) = \{x \in S \mid x \text{ è di accumulazione per } X \subseteq S\} \tag{2.17}$$

Osservazione 45

$$x_0 \in D_r(X) \nLeftrightarrow x_0 \in X$$

Cioè $x_0 \in D_r(X)$ e $x_0 \in X$ esprimono due proprietà indipendenti del punto x_0. In altri termini, l'appartenenza di x_0 a $D_r(X)$ non è condizione necessaria e nè sufficiente, affinchè il punto x_0 appartenga ad X.

La nozione di insieme derivato permette di riformulare la definizione 43:

$$x_0 \text{ è punto isolato di } X \overset{def}{\Longleftrightarrow} x_0 \in X, \;\; x_0 \notin D_r(X)$$

Definizione 46

$$x_0 \in S \text{ è } \textbf{punto di aderenza} \text{ per } X \text{ (o } \textbf{aderente ad } X)) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \; \exists x \in X \cap U \tag{2.18}$$

In altri termini, x_0 è di punto di aderenza per X se in *ogni* suo intorno cade *almeno* un punto di X *non necessariamente distinto* da x_0.

Definizione 47 *L'insieme dei punti di aderenza per X si chiama* **la chiusura** *o* **l'aderenza** *di X e si indica con $\bar{X}$. Quindi:*

$$\bar{X} = \{x \in S \mid x \text{ è punto di aderenza per } X\}$$

Quindi, assegnato lo spazio topologico (S, Θ) per ogni sottoinsieme X di S, sono univocamente definiti gli insiemi $D_r(X)$ e $\bar{X}$. Risulta:

$$D_r(\emptyset) = \emptyset, \quad \bar{\emptyset} = \emptyset \tag{2.19}$$

Più avanti stabiliremo un'importante relazione che lega l'insieme X al suo derivato e alla sua chiusura.

Teorema 48 *Sia (S, Θ) uno spazio topologico.*

$$\partial X = \bar{X} \cap \overline{C(X)}, \quad \forall X \subseteq S \tag{2.20}$$

Dimostrazione. Preso ad arbitrio $x_0 \in \partial X$, per definizione di punto di frontiera (cfr. relazione (2.11)):

$$x_0 \in \partial X \Longrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \begin{cases} X \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow x_0 \in \bar{X} \\ C(X) \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow x_0 \in \overline{C(X)} \end{cases} \Longrightarrow x_0 \in \bar{X} \cap \overline{C(X)}$$

In forza dell'arbitrarietà di x_0, l'implicazione precedente restituisce la relazione di inclusione:

$$\partial X \subseteq \bar{X} \cap \overline{C(X)} \tag{2.21}$$

D'altra parte preso ad arbitrio $x_0 \in \bar{X} \cap \overline{C(X)}$ si ha $x_0 \in \partial X$, onde:

$$\bar{X} \cap \overline{C(X)} \subseteq \partial X$$

Aggregando a tale relazione di inclusione la relazione (2.21):

$$\bar{X} \cap \overline{C(X)} \subseteq \partial X \subseteq \bar{X} \cap \overline{C(X)} \Longrightarrow \partial X = \bar{X} \cap \overline{C(X)}$$

■

È chiaro che

$$x_0 \in D_r(X) \Longrightarrow x_0 \in \bar{X} \tag{2.22}$$

In forza dell'arbitrarietà di $x_0 \in D_r(X)$:

$$D_r(X) \subseteq \bar{X} \tag{2.23}$$

Si osservi che l'implicazione (2.22) non è invertibile, giacchè l'aderenza è una condizione più debole dell'essere punto di accumulazione. Infatti, ogni punto isolato di X è un elemento di $\bar{X}$, i.e. un punto di aderenza per X:

$$\begin{aligned} x_0 \in X, \ \ x_0 \notin D_r(X) &\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \ x_0 \in X \cap U \\ &\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \ X \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow x_0 \in \bar{X} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dalle (2.22)-(2.24) segue che l'appartenenza di x_0 a $\bar{X}$ è condizione necessaria ma non sufficiente per l'appartenenza del punto x_0 all'insieme a $D_r(X)$. Cioè:

$$x_0 \in \bar{X} \nRightarrow x_0 \in D_r(X) \tag{2.25}$$

Inoltre:

$$X \subseteq \bar{X} \tag{2.26}$$

Dalle (2.10)-(2.26) segue che un qualunque sottoinsieme X di uno spazio topologico (S, Θ) verifica la doppia relazione di inclusione:

$$\mathring{X} \subseteq X \subseteq \bar{X}, \quad \forall X \subseteq S \tag{2.27}$$

Lemma 49 *Ogni punto di aderenza di X non appartenente a X, è punto di accumulazione per X. In simboli:*

$$x_0 \in \bar{X}, \ \ x_0 \notin X \Longrightarrow x_0 \in D_r(X)$$

Dimostrazione. Sia x_0 un qualunque punto di aderenza di X non appartenente a X:

$$x_0 \in \bar{X}, \ x_0 \notin X$$

Per definizione di punto di aderenza:

$$\forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \ \ X \cap U \neq \emptyset \underset{x_0 \notin X}{\Longrightarrow} U \cap (X - \{x_0\}) \neq \emptyset,$$

cioè x_0 è punto di accumulazione per X. ■

Teorema 50 *Sia* (S, Θ) *uno spazio topologico.*

$$\bar{X} = X \cup D_r(X), \quad \forall X \subseteq S \tag{2.28}$$

Dimostrazione. Dalle (2.23)-(2.26):

$$X \cup D_r(X) \subseteq \bar{X} \tag{2.29}$$

D'altra parte, preso ad arbitrio $x_0 \in \bar{X}$, tenendo conto della (2.26), i casi possibili sono:

1. $x_0 \in X \Longrightarrow x_0 \in X \cup D_r(X)$
2. $x_0 \notin X \underset{\text{Lemma 49}}{\Longrightarrow} x_0 \in D_r(X) \Longrightarrow x_0 \in X \cup D_r(X)$

Quindi, in entrambi i casi è $x_0 \in X \cup D_r(X)$. In forza dell'arbitrarietà di x_0:

$$\bar{X} \subseteq X \cup D_r(X)$$

Aggregando a tale relazione di inclusione la (2.29):

$$X \cup D_r(X) \subseteq \bar{X} \subseteq X \cup D_r(X) \implies \bar{X} = X \cup D_r(X)$$

■

La (2.28) è la relazione che avevamo anticipato, la quale stabilisce un legame tra X e $D_r(X)$, $\bar{X}$. Inoltre, la (2.28) conferma le affermazioni precedenti. In particolare, le implicazioni (2.22)-(2.25) che qui riscriviamo:

$$x_0 \in D_r(X) \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} x_0 \in \bar{X}$$

Tuttavia, se $x_0 \in \bar{X}$, $x_0 \notin D_r(X)$, necessariamente $x_0 \in X$. In altri termini, sussiste il seguente corollario che è complementare al lemma 49:

Corollario 51 *Ogni punto di aderenza di* X *che non sia punto di accumulazione per* X*, appartiene ad* X*.*

In simboli:

$$x_0 \in \bar{X}, \ x_0 \notin D_r(X) \Longrightarrow x_0 \in X$$

Osserviamo poi che la (2.28) permette di ridefinire la nozione di insieme chiuso:

Definizione 52 *Assegnato lo spazio topologico* (S, Θ)*, un sottoinsieme* $X \subseteq S$ *è chiuso se e solo se coincide con la propria chiusura, cioè:*

$$X = \bar{X}$$

Osservazione 53 *In virtù della (2.20) per ogni* $X \subseteq S$*, si ha che* ∂X *è un insieme chiuso, in quanto intersezione di chiusi:*

$$\partial X = \overline{\partial X}$$

Teorema 54 *Sia* (S, Θ) *uno spazio topologico.*

$$X \subseteq S \text{ è chiuso} \iff X \supseteq D_r(X)$$

Dimostrazione. X è chiuso $\iff X = \bar{X} \iff X = X \cup D_r(X) \iff X \supseteq D_r(X)$ ■

Lemma 55 *Ogni punto di aderenza di X non appartenente a X, è punto di frontiera per X. In simboli:*

$$x_0 \in \bar{X}, \quad x_0 \notin X \Longrightarrow x_0 \in \partial X$$

Dimostrazione. $x_0 \in \bar{X}, \quad x_0 \notin X \Longrightarrow x_0 \in \bar{X} \cap C(X) \Longrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_{x_0}, \begin{cases} X \cap U \neq \emptyset \\ C(X) \cap U \neq \emptyset \end{cases} \Longrightarrow$ $x_0 \in \partial X$ ∎

Teorema 56 *Se (S, Θ) è un qualunque spazio topologico:*

$$\forall X \subseteq S, \quad \begin{cases} \bar{X} = X \cup \partial X \\ \mathring{X} = X - \partial X \end{cases} \tag{2.30}$$

Dimostrazione. Dalle (2.26)-(2.20) si ha $X \cup \partial X \subseteq \bar{X}$. D'altra parte, se comunque prendiamo $x_0 \in \bar{X}$, si verifica uno dei casi seguenti:

1. $x_0 \in X \Longrightarrow x_0 \in X \cup \partial X$
2. $x_0 \notin X \underset{\text{Lemma } 55}{\Longrightarrow} x_0 \in \partial X \Longrightarrow x_0 \in X \cup \partial X$

Quindi, in entrambi i casi è $x_0 \in X \cup \partial X$. In forza dell'arbitrarietà di x_0:

$$\bar{X} \subseteq X \cup \partial X$$

Aggregando a tale relazione di inclusione la $X \cup \partial X \subseteq \bar{X}$:

$$X \cup \partial X \subseteq \bar{X} \subseteq X \cup \partial X \Longrightarrow \bar{X} = X \cup \partial X$$

Dimostriamo la seconda delle (2.30).

$$x_0 \in \mathring{X} \Longrightarrow x_0 \in X - \partial X$$

In forza dell'arbitrarietà di x_0, l'implicazione precedente restituisce la relazione di inclusione:

$$\mathring{X} \subseteq X - \partial X \tag{2.31}$$

D'altra parte preso ad arbitrio $x_0 \in X - \partial X \Longrightarrow x_0 \notin \partial X \Longrightarrow x_0 \in \mathring{X}$, onde:

$$X - \partial X \subseteq \mathring{X}$$

Aggregando a tale relazione di inclusione la (2.31):

$$X - \partial X \subseteq \mathring{X} \subseteq X - \partial X \Longrightarrow \mathring{X} = X - \partial X$$

∎

Corollario 57 *Se (S, Θ) è un qualunque spazio topologico:*

$$\forall X \subseteq S, \quad \begin{cases} X \text{ è chiuso} \Longleftrightarrow X \supseteq \partial X \\ X \text{ è aperto} \Longleftrightarrow C(X) \supseteq \partial X \end{cases} \tag{2.32}$$

Dimostrazione. X è chiuso $\Longleftrightarrow X = \bar{X} \Longleftrightarrow X = X \cup \partial X \Longleftrightarrow X \supseteq \partial X$
X è aperto $\Longleftrightarrow X = \mathring{X} \Longleftrightarrow X = X - \partial X \Longleftrightarrow X = X \cap C(\partial X) \Longleftrightarrow X \subseteq C(\partial X) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow C(X) \supseteq \partial X$ ∎

2.6 Spazi di Hausdorff

Definizione 58

$$\left.\begin{array}{c}\textit{Lo spazio topologico } (S,\Theta)\\ \textit{è uno } \textbf{spazio di Hausdorff}\end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x,y\in S \quad (x\neq y),\ \exists\,(U,V)\in\mathcal{U}_x\times\mathcal{U}_y \mid U\cap V=\emptyset$$

In altri termini, (S,Θ) è uno spazio di Hausdorff se e solo se comunque prendiamo due punti distinti x e y di S, è possibile trovare un intorno U di x e un intorno V di y disgiunti.

Teorema 59

$$(S,\Theta) \ \textit{è uno spazio di Hausdorff} \Longrightarrow \bigcap_{U\in\mathcal{U}_x} U=\{x\}\,, \quad \forall x\in S$$

Cioè, se (S,Θ) è uno spazio di Hausdorff, comunque prendiamo $x\in S$, l'intersezione di tutti e soli gli intorni di x è un insieme contenente il solo punto x.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. La negazione della tesi è:

$$\exists y\in\bigcap_{U\in\mathcal{U}_x} U \mid y\neq x, \qquad \forall x\in S$$

Preso ad arbitrio un intorno V di y, per definizione di intorno (eq. 2.6):

$$V\in\mathcal{U}_y \Longrightarrow \exists A\in\Theta \mid A\subseteq V, \quad y\in A \tag{2.33}$$

Riesce:

$$\begin{aligned}&\exists y\in\bigcap_{U\in\mathcal{U}_x} U \mid y\neq x \Longrightarrow \forall U\in\mathcal{U}_x,\ \ y\in U \underset{2.33}{\Longrightarrow} y\in U\cap A \underset{A\subseteq V}{\Longrightarrow} y\in U\cap V\\ &\Longrightarrow U\cup V\neq\emptyset,\end{aligned}$$

cosicchè:

$$\forall\,(U,V)\in\mathcal{U}_x\times\mathcal{U}_y, \quad U\cap V\neq\emptyset$$

Ciò implica che lo spazio topologico (S,Θ) non è uno spazio di Hausdorff (negazione dell'ipotesi), onde l'asserto. ■

2.7 Spazio connesso

Sia (S,Θ) uno spazio topologico.

Definizione 60

$$X\subseteq S \ \textit{è } \textbf{connesso} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\nexists A,B\subseteq X \ \textit{non vuoti} \ \mid A\cup B\supseteq X,\ \ A\cap B=\emptyset\\ A \ \textit{e} \ B \ \textit{sono entrambi aperti o entrambi chiusi}\end{array}\right.$$

In altri termini, X è connesso se non esiste alcuna partizione di X in due sottoinsiemi A e B che siano entrambi aperti o entrambi chiusi.

Definizione 61

$$X \ \textit{è } \textbf{sconnesso} \overset{def}{\Longleftrightarrow} X \ \textit{non è connesso}$$

Cioè X è sconnesso se e solo se esiste una coppia di aperti/chiusi non vuoti (A,B) tali che $A\cup B\supseteq X$, $A\cap B=\emptyset$. Si dice che A e B **ricoprono** X o che compongono un **ricoprimento** di X. Nel caso particolare $X=S$:

Definizione 62

$$S \text{ è } \textbf{connesso} \overset{def}{\iff} \begin{cases} \nexists A, B \subseteq S \text{ non vuoti } \mid A \cup B \supseteq S, \;\; A \cap B = \emptyset \\ A \text{ e } B \text{ sono entrambi aperti o entrambi chiusi} \end{cases}$$

Intuitivamente, uno spazio topologico connesso è costituito da una sola "porzione" di spazio.

Esempio 63 *Assegnato lo spazio topologico* $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$*, sia:*

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \;\; 0 < y < 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 2, \;\; 1 < y < 1\right\} \tag{2.34}$$

Cioè, X è un sottoinsieme dello spazio topologico $\mathbb{R}^2$ (con topologia euclidea) dato dall'unione dei quadrati aperti (cfr. definizione 2) $(0,1) \times (0,1)$ e $(1,2) \times (1,2)$ come illustrato in fig. 2.3.

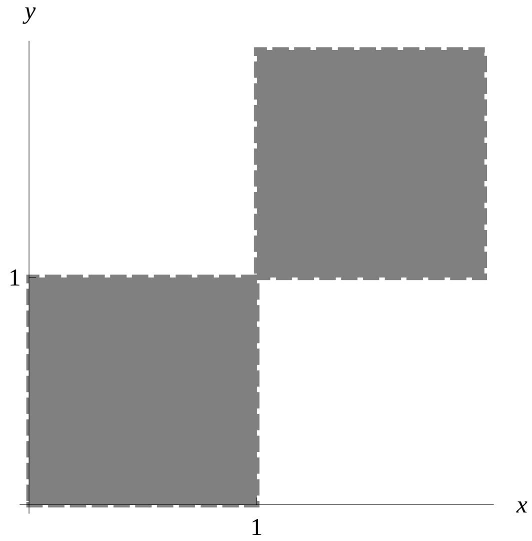


Figura 2.3: Il sottoinsieme X (eq. (2.34)) è l'unione di due aperti A e B disgiunti. Si tratta, quindi, di uno spazio sconnesso.

Posto:

$$A = (0,1) \times (0,1), \quad B = (1,2) \times (1,2),$$

si ha $A \cup B = X, \;\; A \cap B = \emptyset$. Ne consegue che X è sconnesso.

Esempio 64 *Assegnato lo spazio topologico* $(\mathbb{R}^2, \Theta_e)$*, sia:*

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \;\; 0 \leq y \leq 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \;\; 1 \leq y \leq 1\right\} \tag{2.35}$$

Cioè, X è un sottoinsieme dello spazio topologico $\mathbb{R}^2$ (con topologia euclidea) dato dall'unione dei quadrati chiusi (cfr. definizione 1) $[0,1] \times [0,1]$ e $[1,2] \times [1,2]$ come illustrato in fig. 2.4.

Posto:

$$A = [0,1] \times [0,1], \quad B = [1,2] \times [1,2],$$

si ha $A \cup B = X, \;\; A \cap B = \{(1,1)\} \neq \emptyset$. È facile persuadersi che non esiste alcuna coppia di aperti o chiusi la cui unione contenga X. Ne concludiamo che X è connesso.

Il teorema seguente fornisce una notevole caratterizzazione degli spazi connessi:

Teorema 65

$$S \text{ è connesso } \iff \left(X \subseteq S \mid X = \mathring{X} = \bar{X} \Longrightarrow X = \emptyset, S \right.$$

In altri termini, in uno spazio connesso S gli unici sottoinsiemi simultaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e S.

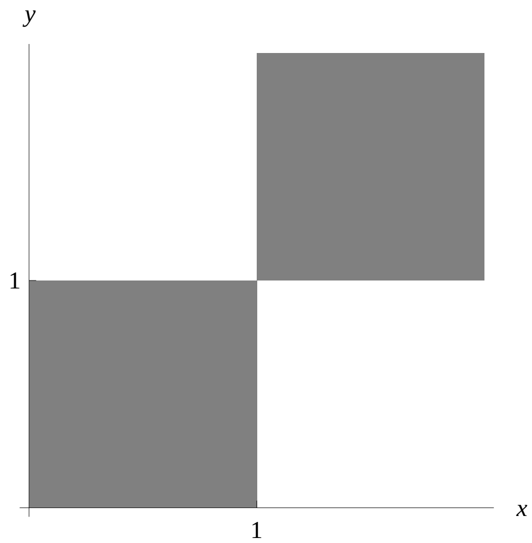


Figura 2.4: Il sottoinsieme X (eq. (2.35)) è l'unione di due quadrati chiusi, la cui intersezione è non vuota.

Dimostrazione. La condizione è sufficiente.

Procediamo per assurdo. La negazione della tesi è:

$$\exists X \subseteq S \mid X = \overset{\circ}{X} = \bar{X} \neq \emptyset$$

Da ciò segue:

$$S = X \cup C(X), \quad X \cap C(X) = \emptyset,$$

cioè $(X, C(X))$ è una partizione di S con $X, C(X) \neq \emptyset$. Inoltre X è aperto $\Longrightarrow C(X)$ è chiuso. Ma X è anche chiuso, per cui $C(X)$ è aperto. Quindi X e $C(X)$ sono entrambi aperti[3] e come tali compongono un ricoprimento di S, per cui S è sconnesso, contraddicendo l'ipotesi.

La condizione è necessaria.

Per assurdo S è sconnesso $\Longrightarrow \exists A, B \subset S \mid A, B \neq \emptyset, \ A \cup B = S, \ A \cap B = \emptyset$. Senza perdita di generalità supponiamo che A e B siano entrambi aperti.

B è aperto $\Longrightarrow C(A) = S - A = B$ è aperto $\Longrightarrow A$ è chiuso.

Ma A è anche aperto e non vuoto. Inoltre è $A \neq S$, giacchè $C(A) = B \neq \emptyset$. Esiste, dunque, un sottoinsieme A non vuoto di S simultaneamente aperto e chiuso:

$$A \subset S, \quad A = \overset{\circ}{A} = \bar{A},$$

che è una negazione dell'ipotesi, onde l'asserto. ■

Teorema 66

$$S \text{ è connesso} \iff \partial X \neq \emptyset, \ \forall X \subset S$$

Cioè S è connesso se e solo se la frontiera di ogni sottoinsieme non vuoto di S, non è l'insieme vuoto.

Dimostrazione. La condizione è sufficiente

Procediamo per assurdo. La negazione della tesi è: $\exists X \subset S \mid \partial X = \emptyset, \ X \neq \emptyset$. Dalle (2.30) si ha $X = \overset{\circ}{X} = \bar{X} \neq \emptyset \Longrightarrow \emptyset \neq X \subset S$ è simultaneamente aperto e chiuso $\underset{\text{Teorema 65}}{\Longrightarrow}$ S è sconnesso, che è contro l'ipotesi.

La condizione è necessaria

[3] Per quanto detto, sono anche entrambi chiusi.

Per assurdo: S è sconnesso $\Longrightarrow \exists A, B \subset S \mid A, B \neq \emptyset, \;\; A \cup B = S, \;\; A \cap B = \emptyset$. Supponendo che A e B siano entrambi chiusi, dalla (2.20) segue:

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{C(A)} \underset{C(A)=B}{=} \bar{A} \cap \bar{B} = A \cap B = \emptyset,$$

che è contro l'ipotesi. ■

Definizione 67 *Assegnato lo spazio topologico* (S, Θ), *dicesi* **ricoprimento** *di* $X \subseteq S$ *una qualunque partizione* $\mathcal{R}$ *di* X, *cioè un qualunque insieme* $\mathcal{R} = \{G_k\}$ *con* $k = 1, 2, ..., N$, *i cui elementi* G_k *sono sottoinsiemi non vuoti di* X *e tali che:*

$$\bigcup_{k=1}^{N} G_k \supseteq X, \quad G_k \cap G_{k'} = \emptyset, \quad \forall k, k' \in \{1, 2, ..., N\}, \;\; k \neq k'$$

Se $N < +\infty$ *il ricoprimento si dice* **finito** *e l'intero naturale* N *si dice* **ordine** *del ricoprimento. Nel caso contrario* ($N = +\infty$), *si dice* **infinito**.

Definizione 68 *Dicesi* **ricoprimento aperto** *di* X *ogni ricoprimento di* X *costituito da aperti non vuoti.*

Osservazione 69 *La definizione precedente continua a valere se* $X = S$. *Incidentalmente, abbiamo ipotizzato* $X \subseteq S$.

Esempio 70 *Sia* (S, Θ_d) *uno spazio topologico, essendo* $S = \{x, y\}$ *con* $x \neq y$ *e* $\Theta_d = \mathcal{P}(S) = \{\emptyset, S, \{x\}, \{y\}\}$ *la topologia discreta. Risulta:*

$$S = \{x\} \cup \{y\}, \;\; \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$$

Quindi S *è sconnesso. Tale risultato si generalizza, ovvero se* $S = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *con* $x_k \neq x_{k'}$ $\forall k, k' \in \mathbb{N}$ $(k \neq k')$ *e* $\Theta = \Theta_d$, *lo spazio topologico* (S, Θ_d) *è sconnesso.*

2.8 Spazio compatto. Spazio precompatto

In topologia generale un ruolo fondamentale è svolto dai cosiddetti *spazi compatti*, introdotti nel 1920 da P.S. Alexandrov e P.S. Uryson. Per lo studio di tali spazi riprendiamo la nozione di ricoprimento aperto (cfr. definizione 68), dimostrando il teorema:

Teorema 71 *Sia* (S, Θ) *uno spazio topologico.*

$$\forall X \subseteq S, \; \exists \text{ un ricoprimento aperto di } X$$

Dimostrazione. $S \in \Theta \Longrightarrow \mathcal{R} = \{S\}$ è un ricoprimento aperto di X, $\forall X \subseteq S$. ■

Dal teorema appena dimostrato segue che comunque prendiamo un sottoinsieme di uno spazio topologico, esiste almeno un ricoprimento aperto di tale sottoinsieme. Gli spazi compatti compongono una particolare classe di spazi topologici per i quali ogni ricoprimento aperto contiene un ricoprimento finito. Più precisamente, abbiamo la seguente definizione:

Definizione 72 *Sia* (S, Θ) *uno spazio topologico.*

$X \subseteq S$ *è* **compatto** *se ogni ricoprimento aperto di* X *contiene un ricoprimento finito di* X. *Cioè:*

$$X \subseteq S \text{ è } \textbf{compatto}) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \mathcal{R}_N = \{A_1, A_2, ..., A_{N \leq +\infty}\} \subseteq \Theta, \;\; \exists \mathcal{R}_n = \{B_1, B_2, ..., B_{n<+\infty}\} \subset \mathcal{R}_N,$$

dove $\mathcal{R}_N$ è un ricoprimento aperto di X:

$$\bigcup_{k=1}^{N} A_k \supseteq X, \quad A_k = \mathring{A}_k \ (k = 1, 2, ..., N), \quad A_k \cap A_{k'} = \emptyset, \quad k \neq k', \quad \forall k, k' \in \{1, 2, ..., N\},$$

mentre $\mathcal{R}_n$ è un ricoprimento finito di X. Si badi che tale proprietà deve essere verificata per ogni *ricoprimento aperto di X.*

Esempio 73 *Assegnato lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \Theta_e)$ sia:*

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} \subset \mathbb{R}$$

Consideriamo i seguenti aperti:

$$A_n = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 2 \right\} = \left(\frac{1}{2}, 2 \right), & n = 1 \\ \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n-1} \right\} = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right), & n > 1 \end{cases} \tag{2.36}$$

Risulta:

$$\frac{1}{n} \in A_n, \quad \forall n \geq 1 \tag{2.37}$$

Ciò implica:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \supseteq X$$

Inoltre, gli aperti (2.36) sono a due a due disgiunti:

$$A_n \cap A_{n'} = \emptyset, \quad \forall n, n' \in \mathbb{N} - \{0\}, \ (n \neq n'),$$

onde

$$\mathcal{R}_\infty = \left\{ \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right\}, \tag{2.38}$$

è un ricoprimento aperto di X. Dalla (2.37) segue:

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad X \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \Big) \Longrightarrow \left\{ \bigcup_{n \in \mathcal{N}} A_n \right\} \subset X, \quad \forall \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \mid card\,(\mathcal{N}) < +\infty$$

Cioè $\mathcal{R}_\infty$ non contiene alcun ricoprimento aperto di X. Ne concludiamo che X non è compatto.

I sottoinsiemi compatti di uno spazio di Hausdorff verificano un'importante proprietà espressa dal seguente teorema:

Teorema 74 *Sia (S, Θ) uno spazio di Hausdorff.*

$$X \subseteq S \mid X \text{ è compatto}) \Longrightarrow X \text{ è chiuso}$$

Cioè, ogni sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff è necessariamente chiuso.

Dimostrazione. (S, Θ) è uno spazio di Hausdorff, onde:

$$\forall (x, y) \in X \times C(X), \ \exists (U, V) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y \mid U \cap V = \emptyset$$

Riesce:

$$\bigcup_{x \in X} U \supseteq X,$$

cioè $\{U \in \mathcal{U}_x\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto[4] di X. Ma X è per ipotesi compatto, onde $\{U \in \mathcal{U}_x\}_{x\in X}$ contiene un ricoprimento finito di X:

$$X \text{ è compatto } \Longrightarrow \exists \mathcal{R}_n = \{U_1, U_2, ..., U_n\} \subset \{U \in \mathcal{U}_x\}_{x\in X} \mid \bigcup_{k=1}^{n} U_k \supseteq X, \quad U_k \cap U_{k'} = \emptyset$$

A ogni U_k corrisponde $V_k \in \mathcal{U}_y$ tale che

$$U_k \cap V_k = \emptyset, \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{2.39}$$

Risulta:

$$W \stackrel{def}{=} \bigcap_{k=1}^{n} V_k \Longrightarrow W \in \mathcal{U}_y$$

Inoltre:

$$x \in W \cap X \Longrightarrow x \in X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k \Longrightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{n} U_k \Longrightarrow \exists h \in \{1, 2, ..., n\} \mid x \in U_h$$

Ma

$$x \in W \Longrightarrow (x \in V_k, \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}) \Longrightarrow x \in V_h,$$

cosicchè

$$x \in U_h \cap V_h \Longrightarrow U_h \cap V_h \neq \emptyset,$$

contraddicendo la (2.39), per cui deve essere necessariamente $x \notin W \Longrightarrow x \notin W \cap X$. Abbiamo quindi trovato un intorno W di $y \in C(X)$ in cui non cade nessun elemento di X:

$$\exists W \in \mathcal{U}_y \mid W \cap X = \emptyset \Longrightarrow y \notin \bar{X} \Longrightarrow y \in C(\bar{X})$$

In definitiva:

$$\forall y \in C(X), \quad y \in C(\bar{X}) \Longrightarrow C(X) \subseteq C(\bar{X}) \Longrightarrow X \supseteq \bar{X}$$

Aggregando a tale relazione di inclusione la (2.26) si ottiene:

$$X \subseteq \bar{X} \subseteq X \Longrightarrow X = \bar{X},$$

onde l'asserto. ■

Il teorema appena dimostrato non è invertibile:

$$X \subseteq S \mid X \text{ è chiuso}) \not\Rightarrow X \text{ è compatto} \tag{2.40}$$

Cioè la chiusura di un sottoinsieme X di uno spazio di Hausdorff, è condizione necessaria ma non sufficiente per la compattezza di X. Tale condizione diviene sufficiente se (S, Θ) oltre ad essere uno spazio di Hausdorff è uno spazio compatto. Sussiste infatti il teorema:

Teorema 75 *Sia (S, Θ) uno spazio di Hausdorff compatto.*

$$X \subseteq S \mid X \text{ è chiuso}) \Longleftrightarrow X \text{ è compatto}$$

Dimostrazione. La dimostrazione dell'implicazione inversa è la dimostrazione del teorema precedente, per cui dimostriamo solo l'implicazione diretta (sufficienza della condizione).

Comunque prendiamo un ricoprimento aperto ρ di X, dal momento che $C(X)$ è aperto (in quanto X è chiuso per ipotesi) si ha che $\mathcal{R} \stackrel{def}{=} \rho \cup C(X)$ è un ricoprimento aperto di S. Dalla compattezza di S segue:

$$S \text{ è compatto } \Longrightarrow \exists \mathcal{R}_n = \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \mathcal{R},$$

essendo $\mathcal{R}_n$ un ricoprimento aperto di S di ordine n. I casi possibili sono:

[4]Senza perdita di generalità, supponiamo $U = \mathring{U}, \ \forall U \in \mathcal{U}_x$.

1. $\mathcal{R}_n \subset \rho$.

2. $\mathcal{R}_n \nsubseteq \rho$.

Nel caso 1

$$\forall \rho, \ \exists \mathcal{R}_n \subset \rho,$$

per cui X è compatto, e il teorema è dimostrato. Nel caso 2 senza perdita di generalità, supponiamo che

$$\exists m < n \mid A_1, A_2, ..., A_m \notin \rho \Longrightarrow A_1, A_2, ..., A_m \subseteq C(X)$$

Cioè:

$$\overbrace{\underbrace{\{A_1, A_2, ..., A_m\}}_{\text{ricopre } C(X)} \cup \underbrace{\{A_{m+1}, ..., A_n\}}_{\text{è contenuto in } \rho}}^{\text{ricopre } S},$$

cosicchè:

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k = C(X),$$

che ci consente di esprimere $\mathcal{R}_n$ nel seguente modo:

$$\mathcal{R}_n = C(X) \cup \{A_{m+1}, ..., A_n\}$$

Quindi:

$$C(X) \cup \left(\bigcup_{k=m+1}^{n} A_k \right) = S \Longrightarrow \bigcup_{k=m+1}^{n} A_k = X$$
$$\Longrightarrow \{A_{m+1}, A_{m+2}, ..., A_n\} \text{ è un ricoprimento aperto di } X \text{ contenuto in } \rho$$

Cioè ogni ricoprimento aperto di X contiene un ricoprimento finito di X, onde l'asserto. ■

Ne consegue che in uno spazio di Hausdorff compatto, la compatezza e la chiusura sono nozioni equivalenti.

Definizione 76 *Sia (S, Θ) uno spazio topologico.*

$$X \subseteq S \text{ è uno } \textbf{spazio precompatto} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \bar{X} \text{ è compatto}$$

Teorema 77 *Sia (S, Θ) uno spazio topologico.*

$$S \text{ è compatto } \Longrightarrow \forall x \in S, \ \exists U \in \mathcal{U}_x \mid U \text{ è compatto}$$

Dimostrazione. $\forall x \in S, \ S \in \mathcal{U}_x$ ed è compatto (per ipotesi). ■

Il teorema appena dimostrato non è invertibile:

$$\forall x \in S, \ \exists U \in \mathcal{U}_x \mid U \text{ è compatto} \not\Rightarrow S \text{ è compatto}$$

In altri termini, la compattezza di un intorno di x ($\forall x \in S$), non implica la compattezza di S. Ciò suggerisce la definizione di compattezza locale contrapposta alla compattezza globale o semplicemente, compattezza:

Definizione 78

$$S \text{ è } \textbf{localmente compatto} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in S, \ \exists U \in \mathcal{U}_x \mid U \text{ è compatto}$$

Per quanto precede, la compattezza locale è una condizione necessaria ma non sufficiente per la compattezza di uno spazio topologico.

2.9 Spazi separabili

Sia (S, Θ) uno spazio topologico. Assegnati $X, Y \subseteq S$, sussistono le seguenti definizioni:

Definizione 79 *Y è* **denso rispetto a** *X se assegnato ad arbitrio $x \in X$, in ogni intorno di x cade almeno un elemento di Y. Cioè ogni punto di X è punto di aderenza per Y: $X \subseteq \bar{Y}$.*

Definizione 80 *Se $X = S$ si dice che Y è* **ovunque denso in** *S. Cioè se assegnato ad arbitrio $x \in S$, in ogni intorno di x cade almeno un elemento di Y, per cui $\bar{Y} = S$.*

Da tale definizione segue che un qualunque sottoinsieme Y di S ovunque denso in S, verifica la doppia relazione:

$$Y \subseteq \bar{Y} = S$$

Definizione 81 *S è* **separabile** *se sono verificate le seguenti proprietà:*

1. *$\exists Y \subseteq S$ ovunque denso in S;*
2. *Y è al più infinito numerabile.*

Cioè uno spazio topologico S è separabile se preso ad arbitrio $x \in S$, in ogni intorno di x cade almeno un punto di un sottoinsieme di S al più infinito numerabile.

Criterio 82 *Sia (S, Θ) uno spazio topologico.*

$$S \text{ è a base numerabile} \Longrightarrow S \text{ è separabile}$$

Dimostrazione. Se $\mathcal{B}$ è una base numerabile di S, si ha:

$$\forall A \in \Theta, \ \exists B_k \in \mathcal{B} \mid A = \bigcup_{k=1}^{N \leq +\infty} B_k$$

Poniamo:

$$Y \stackrel{def}{=} \{x_k \mid x_k \in B_k, \ \ (k = 1, 2, ..., N)\} \subset S \tag{2.41}$$

In altri termini, per un assegnato $A \in \Theta$:

$$\begin{array}{cccccc} A = & B_1 & \cup & B_2 & \cup ... \cup & B_N \ , \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & x_1 & & x_2 & & x_N \end{array}$$

per cui:

$$Y = \{x_1, x_2, ..., x_N\} \,,$$

con $x_1 \in B_1, \ x_2 \in B_2, ..., x_N \in B_N$. Preso ad arbitrio $x \in S$, se U è un qualunque intorno di x, per definizione di intorno deve essere:

$$\exists X \in \Theta \mid X \subseteq U, \ \ x \in X$$

Inoltre $X \in \Theta \Longrightarrow \exists h \in \{1, 2, ..., N\} \mid X \supseteq B_h \in \mathcal{B}$, giacchè X è l'unione di elementi di $\mathcal{B}$. Per come abbiamo definito l'insieme Y (cfr. eq. (2.41)), si ha $\exists x_h \in B_h \mid x_h \in Y$. Riesce:

$$x_h \in B_h \subseteq X \subseteq U \Longrightarrow x_h \in U$$

Quindi:

$$\forall U \in U_x, \ \exists x_h \in Y \cap U,$$

Ne consegue che $\forall x \in S, \ \ x$ è punto di aderenza per Y, per cui Y è ovunque denso in S. Inoltre dalla (2.41) si ha che Y è al più infinito numerabile, onde l'asserto. ■

Per il teorema appena dimostrato, si ha che la numerabilità di una base di S è condizione sufficiente per la separabilità di S. Ne consegue che tale teorema fornisce un criterio sufficiente per la separabilità di uno spazio topologico.

2.10 Successioni convergenti

Denotiamo con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di uno spazio topologico (S,Θ) comunque assegnato.

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ... \tag{2.42}$$

Definizione 83 *La successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge*** *a* $\xi_0 \in S$ *se:*

$$\forall U \in \mathcal{U}_{\xi_0},\ \exists \nu \in \mathbb{N} \mid n > \nu \Longrightarrow x_n \in U \tag{2.43}$$

Si scrive:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi_0$$

In tal caso si dice che il punto ξ_0 è il limite della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente (senza specificare il limite a cui tende).

Teorema 84 *(**Teorema di unicità del limite**)*

$$\left(\begin{array}{c}(S,\Theta)\ \text{è uno spazio}\\ \text{di Hausdorff}\end{array}\right) \Longrightarrow \left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S \text{ convergente} \Longrightarrow \exists! \xi_0 \in S \mid \lim_{n\to+\infty} x_n = \xi_0\right.$$

Cioè, in uno spazio di Hausdorff una successione convergente non può convergere a due limiti distinti.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Negazione della tesi:

$$\exists \xi_0, \eta_0 \in S \quad (\xi_0 \neq \eta_0) \mid \lim_{n\to+\infty} x_n = \xi_0,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = \eta_0$$

Abbiamo:

$$S \text{ è uno spazio di Hausdorff} \Longrightarrow \exists\,(U,V) \in \mathcal{U}_{\xi_0} \times \mathcal{U}_{\eta_0} \mid U \cap V = \emptyset$$

Inoltre per definizione di limite:

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{U}_{\xi_0} &\Longrightarrow (\exists \nu' \in \mathbb{N} \mid n > \nu' \Longrightarrow x_n \in U \\ V \in \mathcal{U}_{\eta_0} &\Longrightarrow (\exists \nu'' \in \mathbb{N} \mid n > \nu'' \Longrightarrow x_n \in V\ , \end{aligned}$$

per cui

$$n > \max\{\nu', \nu''\} \Longrightarrow x_n \in U \cap V,$$

ma $U \cap V = \emptyset$, assurdo. ■

Il teorema non è invertibile: l'unicità del limite di una successione convergente non implica che S sia uno spazio di Hausdorff. Pertanto tale teorema fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per l'unicità del limite. Ciò implica che in uno spazio topologico che non sia di Hausdorff, possono esistere successioni convergenti ad un unico limite. Più avanti vedremo alcuni esempi.

2.11 Funzioni convergenti

Assegnati gli spazi topologici (S,Θ), (S',Θ'), consideriamo la funzione:

$$f : X \to S', \tag{2.44}$$

dove $X \subseteq S$. Dato $x_0 \in D_r(X)$, sussiste la seguente definizione:

Definizione 85 *La funzione f* **converge** *a $l \in S'$ in x_0 (o che l è il* **limite** *di f per $x \to x_0$) se:*

$$\forall V \in \mathcal{U}_l, \ \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} \mid x \in X \cap U - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in V$$

e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Teorema 86 *(**Teorema di unicità del limite**)*

$$\left(\begin{array}{c} (S', \Theta') \text{ è uno spazio} \\ \text{di Hausdorff} \end{array} \right) \Longrightarrow \left(f : X \to S' \text{ convergente in } x_0 \Longrightarrow \exists! l \in S' \mid \lim_{x \to x_0} f(x) = l \right.$$

Cioè, in uno spazio di Hausdorff una successione convergente non può convergere a due limiti distinti.

Dimostrazione. È simile a quella del teorema 84 ■

Ritroviamo le definizioni di convergenza (sia nel caso delle successioni che in quello delle funzioni), nonchè i teoremi di unicità che si studiano in Analisi. La differenza risiede nel fatto che ora ci riferiamo a uno spazio topologico qualsiasi e non allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Considerazione simile per la nozione di continuità di una funzione. Più specificatamente:

Definizione 87 *La funzione (2.44) è* **continua** *in $x_0 \in X \cap D_r(X)$ se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Cioè se

$$\forall V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}, \ \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} \mid x \in X \cap U \Longrightarrow f(x) \in V$$

Definizione 88 *La funzione (2.44) è continua in X se è continua $\forall x \in X$.*

Osservazione 89 *La continuità di una funzione è una particolare convergenza della funzione medesima.*

Rammentiamo che a una qualunque funzione (2.44) sono univocamente definiti i seguenti sottoinsiemi di S' e X rispettivamente:

$$f(X) = \{f(x) \in S' \mid x \in X\} \quad \text{(immagine di } X \text{ mediante } f)$$
$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\} \quad \text{(immagine inversa di } A' \subseteq S' \text{ mediante } f)$$

Teorema 90

$$f \text{ è continua in } X \Longleftrightarrow \left(\forall A' \subseteq S' \mid A' \in \Theta' \Longrightarrow f^{-1}(A') \in \Theta \right.$$

Cioè f è continua in X se e solo se l'immagine inversa di un qualunque aperto (in S') è un aperto in X.

Dimostrazione. Implicazione diretta.

Prendiamo ad arbitrio $x_0 \in f^{-1}(A')$, cioè $f(x_0) \in A'$. Risulta:

$$A' \in \Theta' \Longrightarrow A' \in \mathcal{U}_{f(x_0)} \underset{f \text{ è continua in } X}{\Longrightarrow} (\exists U \in \mathcal{U}_{x_0} \mid x \in X \cap U \Longrightarrow f(x) \in A'$$

Cioè:

$$x \in X \cap U \Longrightarrow x \in f^{-1}(A') \subseteq X) \Longrightarrow U \subseteq f^{-1}(A') \Longrightarrow f^{-1}(A') \in \mathcal{U}_{x_0}$$

In forza dell'arbitrarietà di x_0, ne consegue che $f^{-1}(A')$ è un intorno di ogni punto di X, per cui è un aperto.

Implicazione inversa.
Per un arbitrario $x_0 \in X$, sia $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$, per cui

$$\exists A' \in \Theta' \mid A' \subseteq V, \ \ f(x_0) \in A' \tag{2.45}$$

E per definizione di immagine inversa:

$$f(x_0) \in A' \Longrightarrow x_0 \in f^{-1}(A')$$

Per ipotesi $f^{-1}(A') \in \Theta$ che assieme alla (2.45) ci dice che $f^{-1}(A')$ è un intorno di x_0. Inoltre preso ad arbitrio x:

$$x \in f^{-1}(A') \Longleftrightarrow f(x) \in A' \subseteq V,$$

cosicché:

$$\forall A' \in \mathcal{U}_{f(x_0)}, \ \exists f^{-1}(A') \in \mathcal{U}_{x_0} \mid x \in f^{-1}(A') \Longrightarrow f(x) \in A',$$

da cui la continuità di f in x_0. E dall'arbitrarietà di x_0 segue l'asserto. ■

Teorema 91

$$f \textit{ è continua in } X \Longleftrightarrow \left(\forall B' \subseteq S' \mid B' \textit{ è chiuso (in } S'\textit{)} \Longrightarrow f^{-1}(B') \textit{ è chiuso (in } X\textit{)}\right.$$

Cioè f è continua in X se e solo se l'immagine inversa di un qualunque chiuso (in S') è un insieme chiuso (in X).

Dimostrazione. Risulta:

$$X - f^{-1}(B') = f^{-1}(S' - B') \tag{2.46}$$

Inoltre:

$$B' \text{ è chiuso (in } S') \Longrightarrow S' - B' \text{ è aperto (in } S') \underset{\text{teorema } 90}{\Longrightarrow} f^{-1}(S' - B') \text{ è aperto}$$

Per la (2.46) $X - f^{-1}(B')$ è aperto (in X) $\Longrightarrow f^{-1}(B')$ è chiuso. ■

Lemma 92 *Assegnata una funzione $f : X \to S'$, si ha:*

$$Y \subseteq f^{-1}(f(Y)), \quad \forall Y \subseteq X \tag{2.47}$$

In particolare:

$$Y = f^{-1}(f(Y)), \quad \forall Y \subseteq X, \ \forall f \ \ \textit{iniettiva} \tag{2.48}$$

Se $Y = X$:

$$X = f^{-1}(f(X)) \tag{2.49}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} &f\left(f^{-1}(T')\right) \subseteq T', \quad \forall T' \subseteq S' \\ &f\left(f^{-1}(T')\right) = T', \quad \forall T' \subseteq S' \mid T' \subseteq f(X) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la (2.48) iniziamo con l'osservare che

$$f^{-1}(f(Y)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(Y)\} \tag{2.51}$$

Per definizione di iniettività:

$$f \text{ è iniettiva} \Longrightarrow (f(x') = f(x'') \Longrightarrow x' = x'') \Longrightarrow \exists! x \in X \mid f(x) \in f(Y) \Longrightarrow x \in Y,$$

da cui la (2.48). Se f non è iniettiva, è valida la (2.47). Per dimostrare la (2.49) osserviamo che dalla (2.51) si ha $f^{-1}(f(Y)) \subseteq X$, che aggregata alla (2.47) restituisce la doppia relazione di inclusione:

$$Y \subseteq f^{-1}(f(Y)) \subseteq X,$$

che per $Y = X$ porge $f^{-1}(f(X)) = X$.

Per dimostrare la prima delle (2.50) osserviamo che

$$\begin{aligned} f^{-1}(T') &= \{x \in X \mid f(x) \in T'\} \subseteq X \\ f\left(f^{-1}(T')\right) &= \left\{f(x) \in S' \mid x \in f^{-1}(T')\right\} \subseteq S' \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$T' \subseteq S' \mid T' \supset f(X) \Longrightarrow f^{-1}(T') = f^{-1}(f(X)) \underset{\text{eq. (2.49)}}{=} X \Longrightarrow f\left(f^{-1}(T')\right) = f(X) \subset T'$$

Dimostriamo la seconda delle (2.50); deve essere $T' \subseteq f(X)$, onde preso ad arbitrio $y_0 \in T'$

$$y_0 \in T' \Longrightarrow \exists x_0 \in X \mid y_0 = f(x_0) \Longrightarrow x_0 \in f^{-1}(T') \Longrightarrow y_0 = f(x_0) \in f\left(f^{-1}(T')\right)$$

In forza dell'arbitrarietà di $y_0 \in T'$:

$$T' \subseteq f\left(f^{-1}(T')\right)$$

Aggregando a tale relazione la prima delle (2.50):

$$f\left(f^{-1}(T')\right) \subseteq T' \subseteq f\left(f^{-1}(T')\right) \Longrightarrow f\left(f^{-1}(T')\right) = T'$$

■

Illustriamo la prima delle (2.50) con un esempio nell'Euclideo. Precisamente, consideriamo lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \Theta_e)$:

Esempio 93 *Sia $f(x) = \arctan x$, onde è $X = \mathbb{R}$ e $f(X) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, come mostrato in fig. 2.5.*

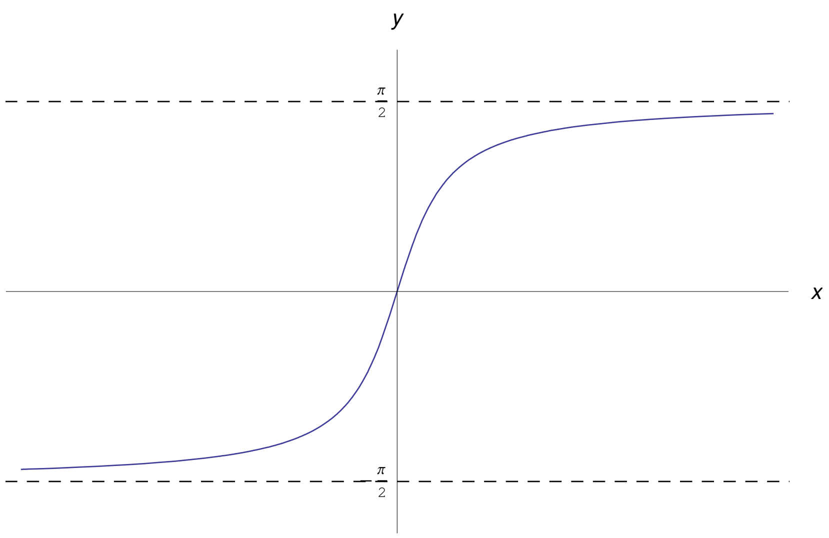


Figura 2.5: Grafico di $\arctan x$.

Sia $T' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ per cui $T' \supset f(X)$. Quindi:

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \mathbb{R} &\Longrightarrow f\left(f^{-1}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)\right) = f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Longrightarrow f\left(f^{-1}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)\right) \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Teorema 94 *Sia* $f : X \to S$

$$f \text{ è continua in } X \text{ compatto} \Longrightarrow f(X) \text{ è compatto}$$

Cioè, il codominio di una funzione continua in un compatto, è uno spazio compatto.

Dimostrazione. Prendiamo ad arbitrio un ricoprimento aperto (in S') $\mathcal{R}$ di $f(X)$. Quindi:

$$f(X) = \bigcup_{A \in \mathcal{R}} A \Longrightarrow f^{-1}(f(X)) = f^{-1}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{R}} f^{-1}(A)$$

Per il lemma 92:

$$X = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{A \in \mathcal{R}} f^{-1}(A),$$

per cui $\{f^{-1}(A)\}_{A \in \mathcal{R}}$ è un ricoprimento di X. Più precisamente, è un ricoprimento aperto in forza del teorema 90. Per ipotesi X è compatto, quindi $\{f^{-1}(A)\}_{A \in \mathcal{R}}$ contiene un ricoprimento finito di X:

$$\exists \left\{f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n)\right\} \subset \left\{f^{-1}(A)\right\}_{A \in \mathcal{R}} \mid X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(A_k) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$
$$\Longrightarrow f(X) = f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right)$$

Riesce

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq f(X),$$

onde per il lemma 92:

$$f\left(f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

quindi:

$$f(X) = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Ne consegue che $\mathcal{R}$ contiene il ricoprimento finito $\{A_1, ..., A_n\}$. In virtù dell'arbitrarietà di $\mathcal{R}$, si ha che ogni ricoprimento aperto di $f(X)$ contiene un ricoprimento finito, onde l'asserto. ■