Introduzione al Calcolo delle Variazioni

[File scaricato da http://www.extrabyte.info]

1 Calcolo variazionale - Equazione di Eulero

Consideriamo una funzione reale $y = y(x)$ con $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$, i.e. $y = y(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ ed è ivi dotata di derivata prima continua. In tale ipotesi, per ogni $x \in \mathbb{R}$ sono univocamente definiti i numeri reali $y(x)$ e $y'(x)$. La coppia ordinata $(x, y(x))$ descrive il diagramma cartesiano della funzione $y(x)$:

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, \; y = y(x)\right\}$$

Assegnato ad arbitrio il dominio internamente connesso $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $\Gamma \cap D \neq \emptyset$, denotiamo con γ_D l'arco di Γ contenuto in D. Cioè:

$$\gamma_D = \Gamma \cap D$$

Per un'assegnata funzione $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e per x variabile in un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$, la coppia ordinata $(x, y(x))$ descrive l'arco γ_D. Di contro, per tutte le funzioni $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$, la coppia ordinata $(x, y(x))$ descrive la totalità degli archi γ_D contenuti nel dominio. Possiamo poi considerare una funzione:

$$f : D \times \mathbb{R} \underset{(x,y,y') \to f(x,y,y')}{\longrightarrow} \mathbb{R}, \tag{1}$$

Evidentemente:

$$D \times \mathbb{R} = \left\{(x, y, y') \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, \; y' \in \mathbb{R}\right\} \tag{2}$$

Osserviamo che x, y, y' non sono variabili indipendenti, giacchè è $y = y(x)$ e $y' = y'(x)$, per cui viene a definirsi la funzione composta $\psi(x) = f[x, y(x), y'(x)]$. Assumendo f continua in $D \times \mathbb{R}$, per un noto teorema si ha:

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ è continua in } D \times \mathbb{R} \\ y(x), y'(x) \text{ continue in } \mathbb{R} \end{array}\right) \Longrightarrow \psi(x) \text{ è continua in } A \subseteq \mathbb{R}$$

Supponendo - senza perdita di generalità - che A sia un intervallo, risulta dotato di senso l'integrale definito $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\, dx$, per x_1, $x_2 \in A$. Per $x_1 < x_2$ il dominio di integrazione è l'intervallo $[x_1, x_2]$.

Esempio 1 *Sia dato il dominio di* $\mathbb{R}^2$*:*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$$

e la funzione:

$$f : \underset{(x,y,y') \to f(x,y,y')}{D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

tale che:

$$f(x, y, y') = \sqrt{x} + y - y', \quad \forall y(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

Prendendo $y(x) = x^2$*:*

$$\psi(x) = \sqrt{x} + x^2 - 2x,$$

cheè manifestamente continua in $A = [0, +\infty)$*. Pertanto, ha senso l'integrale definito* $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\, dx$, $\forall x_1 x_2 \in A$*.*

Osservazione 2 $\int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)]\, dx$ *assume valori diversi al variare di* $y(x)$ *in* $C^1(\mathbb{R})$*. In altri termini, l'integrale definito* $\int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)]\, dx$ *è una funzione della funzione* $y(x)$ *o, ciò che è lo stesso, della curva* $y = y(x)$ *per* $x \in [x_1, x_2]$*.*

Esempio 3 *Riprendiamo l'esempio precedente.*

Per $y(x) = x^2$*:*

$$\psi(x) = \sqrt{x} + x^2 - 2x$$

Assumendo $[x_1, x_2] = [0, 1]$*:*

$$\int_0^1 \psi(x)\, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + x^2 - 2x\right) dx = 0$$

Per $y(x) = x^3$*:*

$$\psi(x) = \sqrt{x} + x^3 - 3x^2,$$

onde:

$$\int_0^1 \psi(x)\, dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + x^3 - 3x^2\right) dx = -\frac{1}{12}$$

In tal modo abbiamo introdotto una nuova nozione di funzione. Più specificatamente, accanto alla definizione di funzione di punto:

$$g : \underset{x \longrightarrow g(x)}{X \to \mathbb{R}}, \quad X \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

abbiamo la definizione di *funzione di linea*:

$$J : \underset{y(x) \to J(y)}{C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}}, \tag{4}$$

dove:

$$J(y) \stackrel{def}{=} \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)]\, dx, \tag{5}$$

Infatti, mentre la legge (3) associa a un punto di $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ un numero reale $g(x)$, la legge (4) associa a una *linea* $y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ un numero reale $J(y)$. Alcuni autori utilizzano la notazione $J[y]$ per evidenziare il fatto che J non è una funzione della variabile reale y, ma della funzione $y(x)$. Chiamiamo la legge (4) **funzionale di** y.

A questo punto ci poniamo il problema della ricerca degli estremi assoluti del funzionale $J(y)$. Procediamo sulla falsariga della ricerca degli estremi di una funzione reale di una variabile reale, partendo dalla determinazione degli estremi relativi.

Senza perdita di generalità, continuiamo a supporre $x_1 < x_2$, quindi consideriamo i punti $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \in \mathring{D}$ in modo da poter definire la famiglia di curve:

$$\mathcal{F} = \left\{ \gamma : y = y(x) \mid y(x) \in C^1([x_1, x_2]),\ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2,\ \gamma \subset D \right\}, \tag{6}$$

come illustrato in fig. 1. Cioè, $\mathcal{F}$ è l'insieme dei grafici $y = y(x) \in C^1([x_1, x_2])$ aventi per estremi i punti P_1, P_2 e contenuti in D.

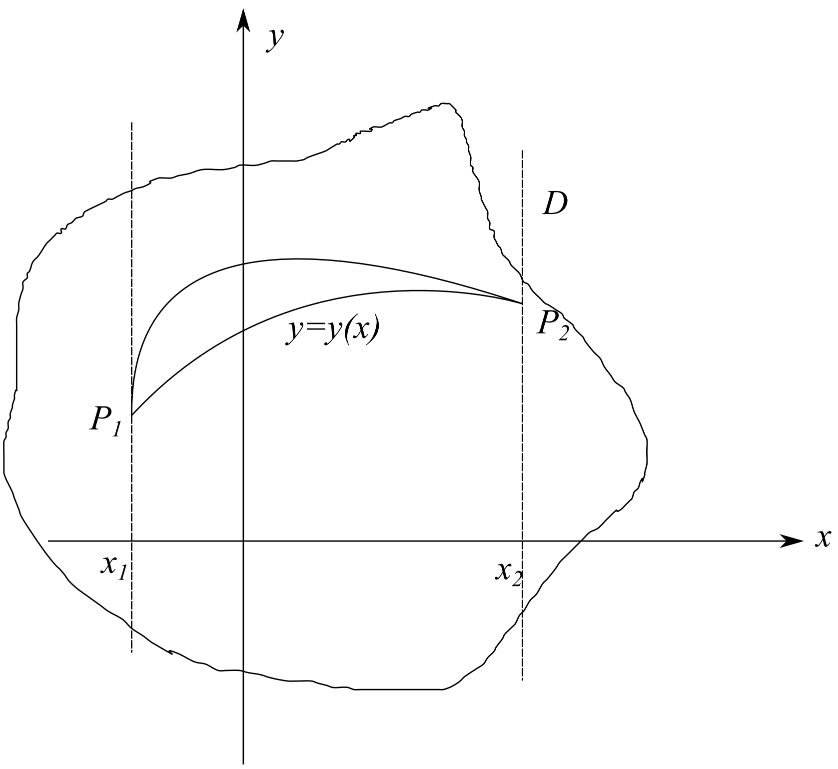

Figure 1: La famiglia (6) è l'insieme delle curve regolari passanti per i punti P_1, P_2 e contenute nel dominio D.

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 4 *Assegnata la curva* $\gamma_0 \in \mathcal{F}$ *di equazione* $y = y_0(x)$ *e un numero reale* $\varepsilon > 0$, *chiamiamo* ε***-intorno*** *di* γ_0 *(o di* $y_0(x)$*), il sottoinsieme di* $\mathcal{F}$*:*

$$I_\varepsilon[y_0(x)] = \{y(x) \in \mathcal{F} \mid |y(x) - y_0(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in [x_1, x_2]\}$$

In parole povere, un ε-intorno di $\gamma_0 \in \mathcal{F}$ è l'insieme delle curve di $\mathcal{F}$ le cui ordinate dei punti differiscono di un ε dalle ordinate dei punti di γ_0.

Osservazione 5 *Si noti l'analogia con la nozione di intorno di un punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ *:*

$$I_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Abbiamo dunque:

Definizione 6
$$\left.\begin{array}{c}\text{la curva } y_0(x) \in \mathcal{F} \\ \text{è una curva di minimo relativo per } J(y)\end{array}\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\exists I_\varepsilon[y_0(x)] \mid y(x) \in I_\varepsilon[y_0(x)] \Longrightarrow J(y) \geq J(y_0)$$

In maniera simile:

$$\left.\begin{array}{c}\text{la curva } y_0(x) \in \mathcal{F} \\ \text{è una curva di massimo relativo per } J(y)\end{array}\right) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\exists I_\varepsilon[y_0(x)] \mid y(x) \in I_\varepsilon[y_0(x)] \Longrightarrow J(y) \leq J(y_0)$$

Definizione 7 *Una curva* $y_0(x)$ *che sia di minimo o di massimo relativo per* $J(y)$ *è detta* ***estremante****.*

Lemma 8 *Sia* $g(x) \in C^1([x_1, x_2])$,

$$\left.\forall \eta(x) \in C^1([x_1, x_2]) \mid \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \ \int_{x_1}^{x_2} g(x)\eta(x)\,dx = 0\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow g(x) = 0, \ \forall x \in [x_1, x_2]$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo: $\exists \xi \in (x_1, x_2) \mid g(\xi) > 0$

In forza della continuità di $g(x)$, ciò implica:

$$\exists I_\delta(\xi) = (\xi - \delta, \xi + \delta) \subset (x_1, x_2) \mid g(x) > 0, \forall x \in I_\delta(\xi)$$

La funzione $\eta(x)$ è arbitaria, per cui scegliamo:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [x_1, \xi - \delta] \\ [x - (\xi - \delta)]^2 [x - (\xi + \delta)]^2, \ x \in I_\delta(\xi) \\ 0, \ x \in [\xi + \delta, x_2] \end{cases}$$

Risulta $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$, mentre la derivata è:

$$\eta'(x)=\begin{cases} 0, \ x\in[x_1,\xi-\delta] \\ 2[x-(\xi-\delta)][x-(\xi+\delta)]^2+2[x-(\xi-\delta)]^2[x-(\xi+\delta)], \ x\in I_\delta(\xi) \\ 0, \ x\in[\xi+\delta,x_2] \end{cases}$$

La derivata prima $\eta'(x)$ è manifestamente continua in $[x_1,\xi-\delta)$, $I_\delta(\xi)$ e in $(\xi+\delta,x_2]$. Studiamo il suo comportamento nei punti di raccordo $\xi\pm\delta$, dove $\eta'(x)$ può avere al più una discontinuità di prima specie. Abbiamo:

$$\begin{gathered}\lim_{x\to(\xi-\delta)^-}\eta'(x)=0, \quad \lim_{x\to(\xi-\delta)^+}\eta'(x)=0\Longrightarrow\lim_{x\to(\xi-\delta)}\eta'(x)=0 \\ \lim_{x\to(\xi+\delta)^-}\eta'(x)=0, \quad \lim_{x\to(\xi+\delta)^+}\eta'(x)=0\Longrightarrow\lim_{x\to(\xi+\delta)}\eta'(x)=0\end{gathered}$$

Quindi la funzione $\eta(x)$ ha derivata continua in $[x_1,x_2]$. Inoltre:

$$\int_{x_1}^{x_2}g(x)\eta(x)\,dx=\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\underbrace{g(x)[x-(\xi-\delta)]^2[x-(\xi+\delta)]^2}_{>0}dx>0,$$

ma ciò è assurdo, poichè per ipotesi l'integrale è nullo, donde l'asserto. ■

Ciò premesso, sussite il teorema:

Teorema 9 *Assegnato il funzionale (5) dove $f\in C^2(D\times\mathbb{R})$, condizione necessaria affinchè $y_0(x)\in C^1([x_1,x_2])$ sia estremante per $J(y)$ è che $y_0(x)$ sia un integrale dell'equazione differenziale:*

$$f_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}f_{y'}(x,y,y')=0 \tag{7}$$

Dimostrazione. Per definizione di estremante:

$$\exists I_\varepsilon[y_0(x)] \mid y(x)\in I_\varepsilon[y_0(x)]\Longrightarrow J(y)\geq J(y_0) \ \ [\text{oppure } J(y)\leq J(y_0)]$$

Senza perdita di generalità supponiamo che valga la prima, cioè $J(y)\geq J(y_0)$. Sia $\eta(x)\in C^1([x_1,x_2]) \mid \eta(x_1)=\eta(x_2)=0$, per cui consideriamo la funzione:

$$y(x)=y_0(x)+\lambda\eta(x), \ \lambda\in\left[-\frac{\varepsilon}{M},\frac{\varepsilon}{M}\right], \tag{8}$$

dove $M=\max_{[x_1,x_2]}|\eta(x)|$. Risulta:

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0\Longrightarrow y(x_1)=y_0(x_1), \ \ y(x_2)=y_0(x_2)$$

Inoltre:

$$|y(x) - y_0(x)| = |\lambda \eta(x)| = |\lambda| |\eta(x)| \leq \frac{\varepsilon}{M} |\eta(x)| \leq \varepsilon$$

Quindi:

$$y(x) \in I_\varepsilon [y_0(x)] \Longrightarrow J(y_0 + \lambda\eta) \geq J(y_0)$$

L'espressione di $J(y_0 + \lambda\eta)$ è:

$$J(y_0 + \lambda\eta) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_0(x) + \lambda\eta(x), y_0'(x) + \lambda\eta'(x)]\, dx$$

Siccome $y_0(x)$ è assegnata, si ha che $J(y_0 + \lambda\eta)$ si riduce a una funzione reale della variabile reale λ (per un'assegnata $\eta(x)$). Scriviamo dunque:

$$F(\lambda) \stackrel{def}{=} J(y_0 + \lambda\eta) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_0(x) + \lambda\eta(x), y_0'(x) + \lambda\eta'(x)]\, dx,$$

dove:

$$F : \left[-\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\varepsilon}{M}\right] \to \mathbb{R}$$

Per ipotesi la curva $y_0(x)$ è un estremante per il funzionale J. Ciò implica che il punto $\lambda = 0$ è un estremante per la funzione F. Abbiamo dunque:

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ è derivabile in } \left[-\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\varepsilon}{M}\right] \\ 0 = \lambda \in \left(-\frac{\varepsilon}{M}, \frac{\varepsilon}{M}\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow F'(0) = 0$$

Calcoliamo $F'(\lambda)$:

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\lambda} f[x, y_0(x) + \lambda\eta(x), y_0'(x) + \lambda\eta'(x)]\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \{ f_y[x, y_0(x) + \lambda\eta(x), y_0'(x) + \lambda\eta'(x)] \cdot \eta(x) \\ &+ f_{y'}[x, y_0(x) + \lambda\eta(x), y_0'(x) + \lambda\eta'(x)] \cdot \eta'(x) \} dx \end{aligned}$$

Quindi:

$$F'(0) = 0 \Longleftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} \{ f_y[x, y_0(x), y_0'(x)] \cdot \eta(x) + f_{y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] \cdot \eta'(x) \}\, dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_{x_1}^{x_2} f_y[x, y_0(x), y_0'(x)] \cdot \eta(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f_{y'}[x, y_0(x), y_0'(x)] \cdot \eta'(x)\, dx = 0$$

Il secondo integrale può essere calcolato per parti:

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{y'}\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right] \cdot \eta'(x)\, dx = \underbrace{\eta(x) f_{y'}\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right]\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \tfrac{d}{dx} f_{y'}\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right] dx$$

cosicchè:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right] - \frac{d}{dx} f_{y'}\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right] \right\} \cdot \eta(x)\, dx = 0 \qquad (9)$$

La (9) deve essere verificata per ogni $\eta(x) \in C^1([x_1, x_2])$ tale che $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Ciò implica (per il lemma 8):

$$f_y\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right] - \frac{d}{dx} f_{y'}\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right] = 0,$$

cioè l'asserto. ■

Definizione 10 *L'equazione differenziale (7) è l'**equazione di Eulero**[1] **relativa al funzionale** (5).*

Esaminiamo la struttura matematica dell'equazione di Eulero. Iniziamo con l'osservare che per la determinazione di $\frac{d}{dx} f_{y'}\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right]$ non possiamo applicare il teorema di derivazione delle funzioni composte, poichè non abbiamo fatto alcuna ipotesi sull'esistenza della derivata seconda $y''(x)$. Ciò dipende dalla eventuale presenza degli zeri della derivata parziale seconda $f_{y'y'}(x, y, y')$. Infatti:

Proposizione 11

$$\forall f \in C^2(D \times \mathbb{R}),\ \exists \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} \right) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f_{y'y'}\left[x, y(x), y'(x)\right] \neq 0$$

Dimostrazione. Poniamo per definizione:

$$F(x) \stackrel{def}{=} f_{y'}\left[x, y(x), y'(x)\right] \qquad (10)$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} f_{y'}\left[x, y(x), y'(x)\right] = \frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}, \qquad (11)$$

[1] Nella notazione di Leibniz l'equazione di Eulero si scrive:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

dove

$$\begin{aligned}\Delta F &= F\left(x+\Delta x\right)-F\left(x\right) \qquad (12)\\ &= f_{y'}\left[x+\Delta x, y\left(x+\Delta x\right), y'\left(x+\Delta x\right)\right]-f_{y'}\left[x, y\left(x\right), y'\left(x\right)\right]\\ &= f_{y'}\left(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y'\right)-f_{y'}\left(x,y,y'\right)\\ &= \Delta f_{y'}\end{aligned}$$

La funzione $f_{y'}\left(x,y,y'\right)$ è manifestamente differenziabile, onde per il teorema del differenziale totale:

$$\Delta f_{y'} = df_{y'} + o\left(\rho\right), \qquad (13)$$

In questa equazione $df_{y'}$ è il differenziale totale:

$$df_{y'} = f_{y'x}\left(x,y,y'\right)\Delta x + f_{y'y}\left(x,y,y'\right)\Delta y + f_{y'y'}\left(x,y,y'\right)\Delta y' \qquad (14)$$

Inoltre: $\rho = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2+\left(\Delta y'\right)^2}$, mentre $o\left(\rho\right)$ è un infinitesimo di ordine superiore a ρ per $\rho \to 0$. Vediamo come scrivere in maniera concisa l'infinitesimo $o\left(\rho\right)$. Più precisamente, scriviamo $o\left(\rho\right)$ come $\omega\left(\rho\right)\rho$, dove $\omega\left(\rho\right)$ è un infinitesimo per $\rho \to 0$. Infatti:

$$\lim_{\rho\to 0}\omega\left(\rho\right)=0 \Longrightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\omega\left(\rho\right)\rho}{\rho}=0$$

Cioè $\omega\left(\rho\right)\rho$ è un infinitesimo di ordine superiore ρ. Quindi:

$$\Delta f_{y'} = df_{y'} + \omega\left(\rho\right)\rho$$

Dividendo per Δx e tenendo conto della (12):

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F}{\Delta x} &= f_{y'x}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]+f_{y'y}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\frac{\Delta y}{\Delta x}+ \qquad (15)\\ &+ f_{y'y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\frac{\Delta y'}{\Delta x}+\omega\left(\rho\right)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y'}{\Delta x}\right)^2}\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$y\left(x\right),\ y'\left(x\right)\ \text{continue}) \Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y' = 0 \Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\rho = 0 \Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\omega\left(\rho\right)=0$$

$$y\ \text{è derivabile}) \Longrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'\left(x\right),$$

per cui eseguendo nella (15) l'operazione di passaggio al limite per $\Delta x \to 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} &= f_{y'x}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]+f_{y'y}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]y'\left(x\right)+\\ &+f_{y'y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x}+\left[\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\omega\left(\rho\right)}_{=0}\right]\left[\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y'}{\Delta x}\right)^2}\right]\\ &= f_{y'x}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]+f_{y'y}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]y'\left(x\right)+f_{y'y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x},\end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ (tenendo conto della (11)):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y'}{\Delta x}=\frac{\frac{d}{dx}f_{y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]-f_{y'x}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]-f_{y'y}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]y'\left(x\right)}{f_{y'y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]},$$

da cui l'asserto. ■

Dalla proposizione appena dimostrata, segue che per $f_{y'y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\neq 0$, risulta:

$$\frac{d}{dx}f_{y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]=f_{y'x}\left(x,y,y'\right)+f_{y'y}\left(x,y,y'\right)\cdot y'+f_{y'y'}\left(x,y,y'\right)\cdot y'',$$

per cui l'equazione di Eulero, nella notazione apicale di Lagrange, si scrive:

$$a\left(x,y,y'\right)\cdot y''+b\left(x,y,y'\right)\cdot y'=c\left(x,y,y'\right), \tag{16}$$

dove:

$$\begin{aligned}a\left(x,y,y'\right) &\stackrel{def}{=} f_{y'y'}\left(x,y,y'\right)\\ b\left(x,y,y'\right) &\stackrel{def}{=} f_{y'y}\left(x,y,y'\right)\\ c\left(x,y,y'\right) &\stackrel{def}{=} -f_{y'x}\left(x,y,y'\right)+f_{y}\left(x,y,y'\right)\end{aligned}$$

Nella notazione di Leibnitz:

$$\alpha\left(x\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\beta\left(x\right)\frac{dy}{dx}=\gamma\left(x\right) \tag{17}$$

dove:

$$\alpha\left(x\right)=a\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right],\ \beta\left(x\right)=b\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right],\ \gamma\left(x\right)=c\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]$$

Si tratta, dunque, di un'equazione differenziale ordinaria lineare del second'ordine nella $y\left(x\right)$. Si badi che le derivate parziali $f_{y'y'}\left(x,y,y'\right)$, $f_{y'y}\left(x,y,y'\right)$

sono i coefficienti dell'equazione, mentre $f_{y'x}(x, y, y') - f_y(x, y, y')$ è il termine noto, giacchè la funzione f è nota, mentre l'incognita è la funzione $y(x)$. L'integrale generale è della forma $y(x, c_1, c_2)$, dove c_1, c_2 sono costanti (reali) arbitrarie. Un integrale particolare è univocamente determinato dalle condizioni ai limiti $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Conclusion 12 *Per la proposizione 11, segue che l'equazione di Eulero (7) può essere scritta nella forma (16) per tutti i valori di x per i quali $f_{y'y'}[x, y(x), y'(x)] \neq 0$. Ne consegue che - per tali valori - la funzione $f(x, y, y')$ non è mai una funzione lineare di y'. Cioè:*

$$\nexists A(x, y),\ B(x, y) \mid f(x, y, y') = A(x, y) + B(x, y) \cdot y'$$

Osservazione 13 *Il teorema 9 fornisce una condizione necessaria ma non sufficiente affinchè una curva $y = y(x)$ sia una estremante del funzionale $J(y)$.*

Ciò suggerisce la seguente definizione:

Definizione 14 *Si dice* ***estremale*** *del funzionale (5) ogni curva $y = y(x)$ soluzione dell'equazione di Eulero relativa a $J(y)$.*

Pertanto, le (eventuali) curve estremanti di $J(y)$ vanno ricercate tra le estremali relative al medesimo funzionale. Per maggiori dettagli rimandiamo a [**?**].

1.1 Casi particolari

Assegnato il funzionale:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y(x), y'(x)]\, dx, \tag{18}$$

nella notazione di Leibnitz l'equazione di Eulero relativa a $J(y)$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{19}$$

Esaminiamo il caso particolare in cui f non dipende da y:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y'(x)]\, dx, \tag{20}$$

onde l'equazione di Eulero (19) si scrive:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

Cioè:

$$f_{y'}\left[x,y'\left(x\right)\right]=c, \tag{21}$$

essendo c una costante reale.

Ne concludiamo che se f non dipende da y, l'equazione di Eulero si riduce all'equazione del prim'ordine (21).

Esempio 15 *Assegnata la funzione $f\left(x,y'\right)=x-y'^2$, consideriamo il funzionale:*

$$J\left(y\right)=\int_0^1 f\left[x,y'\left(x\right)\right]dx \tag{22}$$

Determiniamo l'eventuale curva estremale passante per $P_1\left(0,1\right)$ e $P_2\left(1,2\right)$.

Dobbiamo integrare l'equazione di Eulero con le condizioni ai limiti $y\left(0\right)=1$, $y\left(1\right)=2$. È $f\left(x,y'\right)$ per cui l'equazione di Eulero si riduce a:

$$f_{y'}\left(x,y'\right)=c$$

Cioè:

$$y'=-\frac{c}{2},$$

da cui:

$$y\left(x\right)=-\frac{c}{2}x+c_1$$

La curva estremale che stiamo cercando è $y=y_0\left(x\right)$ tale che:

$$\begin{cases} y_0\left(0\right)=1 \\ y_0\left(1\right)=2\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ -\frac{c}{2}+c_1=2\end{cases},$$

da cui:

$$c=-2,\ c_1=1$$

Ne concludiamo che la curva estremale relativa al funzionale (22) e passante per P_1,P_2 è il segmento di retta $y_0\left(x\right)=x+1$.

Passiamo ora al caso in cui f non dipende esplicitamente da x:

$$J\left(y\right)=\int_{x_1}^{x_2} f\left[y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]dx \tag{23}$$

Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 16 *Ogni integrale dell'equazione di Eulero relativa al funzionale (23) è un integrale dell'equazione differenziale del primo ordine:*

$$y' f_{y'}(y, y') - f(y, y') = c, \tag{24}$$

essendo c una costante reale. Viceversa, ogni integrale (con derivata prima priva di zeri al finito) dell'equazione (24), è un integrale dell'equazione di Eulero.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[y' f_{y'}(y, y') - f(y, y')\right] \\ &= y'' \cdot f_{y'}(y, y') + y' \frac{d}{dx}\left[f_{y'}(y, y')\right] - f_y(y, y') \cdot y' - f_{y'}(y, y') \cdot y'' \\ &= -y' \left[f_y(y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(y, y')\right] \end{aligned}$$

Cioè:

$$\frac{d}{dx}\left[y' f_{y'}(y, y') - f(y, y')\right] = -y' \left[f_y(y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(y, y')\right] \tag{25}$$

Sia $y_0(x)$ è un integrale dell'equazione di Eulero. Quindi:

$$y_0(x) \mid f_y(y_0, y_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(y_0, y_0') = 0$$

Dalla (25):

$$\frac{d}{dx}\left[y_0' f_{y'}(y_0, y_0') - f(y_0, y_0')\right] = 0 \Longrightarrow y_0' f_{y'}(y_0, y_0') - f(y_0, y_0') = c,$$

onde $y_0(x)$ è un integrale dell'equazione (24). Riscriviamo ora la (25):

$$f_y(y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(y, y') = -\frac{1}{y'} \frac{d}{dx}\left[y' f_{y'}(y, y') - f(y, y')\right] \tag{26}$$

Sia:

$$\tilde{y}_0(x) \mid \tilde{y}_0'(x) \neq 0, \; \tilde{y}_0' f_{y'}(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0') - f(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0') = c$$

Dalla (26) si ha:

$$f_y(\tilde{y}_0, \tilde{y}_0') - \frac{d}{dx} f_{y'}(y_0, \tilde{y}_0') = 0$$

■

Osservazione 17 *Se la derivata prima* $\tilde{y}_0'(x)$ *ha uno zero in* $\xi \in \mathbb{R}$*, nel limite per* $x \to \xi$ *il secondo membro della (26) si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*.*

Esempio 18 *Consideriamo il funzionale:*

$$J(y) = \int_0^1 f(x, y, y')\, dx,$$

con $f(x, y, y') = y'^2$*. Determiniamo l'eventuale curva estremante di* $J(y)$ *passante per* $P_1(0,1)$*,* $P_2(1,-1)$*.*

Risulta $f_y(x, y, y') = 0$*,* $f_{y'}(x, y, y') = 2y'$*, per cui l'equazione di Eulero si scrive:*

$$\frac{d}{dx}(2y') = 0 \Longleftrightarrow y(x) = c_1 x + c_2,$$

dove c_1, c_2 *sono costanti di integrazioni, i cui valori si calcolano imponendo il passaggio per i punti* P_1, P_2*:*

$$\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = -1 \end{cases},$$

cioè $c_1 = 1$*,* $c_2 = -2$*, per cui l'estremante cercata è il segmento di retta:*

$$y_0(x) = -2x + 1$$

Il valore assunto su $y_0(x)$ *dal funzionale è:*

$$J(y_0) = \int_0^1 f[x, y_0(x), y_0'(x)]\, dx = \int_0^1 y_0'(x)^2\, dx = 4\int_0^1 dx = 4$$

1.2 Variazione prima di $J(y)$

Alternativamente, l'equazione di Eulero può essere ricavata calcolando la *variazione prima* del funzionale $J(y)$. A tale scopo definiamo un operatore δ che agisce alla stregua di un operatore differenziale rispetto alle variabili y,y', cosicchè per ogni funzione $f(x, y, y')$ derivabile, si ha:

$$\delta f = f_y(x, y, y')\,\delta y + f_{y'}(x, y, y')\,\delta y' \qquad (27)$$

Quindi l'espressione formale di δ è:

$$\delta = \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial}{\partial y'} \qquad (28)$$

Tale operatore commuta con l'operatore di derivazione $\frac{d}{dx}$, nel senso che:

$$\left(\delta\frac{d}{dx}\right)f=\left(\frac{d}{dx}\delta\right)f,\ \forall f \text{ derivabile}$$

Sussiste perciò la seguente regola commutativa:

$$\delta\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}\delta \tag{29}$$

In maniera simile, l'operatore δ agisce sulle funzioni di una sola variabile. Ad esempio, assegnata la funzione derivabile $y(x)$, si ha:

$$\delta y=y'(x)\,\delta x$$

In forza della proprietà (29) si ha $\delta y'=\delta\left(\frac{d}{dx}y\right)=\frac{d}{dx}(\delta y)=(\delta y)'$, per cui la (27) si riscrive:

$$\delta f=f_y(x,y,y')\,\delta y+f_{y'}(x,y,y')\,(\delta y)' \tag{30}$$

Applichiamo, dunque, l'operatore δ al funzionale $J(y)$:

$$\delta J=\delta\int\limits_{x_1}^{x_2}f\left[x,y(x),y'(x)\right]dx \tag{31}$$

Dalla definizione di δ (eq. 27) vediamo che esso non agisce sulla variabile di integrazione, per cui possiamo portare tale operatore sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$\begin{aligned}\delta J&=\int\limits_{x_1}^{x_2}\delta f dx\\&=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left\{f_y\left[x,y(x),y'(x)\right]\delta y+f_{y'}\left[x,y(x),y'(x)\right](\delta y)'\right\}dx\\&=\int\limits_{x_1}^{x_2}f_y\left[x,y(x),y'(x)\right]\delta y dx+\int\limits_{x_1}^{x_2}f_{y'}\left[x,y(x),y'(x)\right](\delta y)'\,dx\end{aligned}$$

Al solito, eseguendo un integrazione per parti nell'ultimo integrale:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}f_{y'}\left[x,y(x),y'(x)\right](\delta y)'\,dx=\underbrace{\delta y f_{y'}\left[x,y(x),y'(x)\right]\Big|_{x_1}^{x_2}}_{=0}-\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}f_{y'}\left[x,y(x),y'(x)\right]\delta y dx$$

Quindi:

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left\{f_y\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]-\frac{d}{dx}f_{y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\right\}\delta y dx \tag{32}$$

In questa equazione δJ è la **variazione prima** del funzionale $J(y)$. Moltiplicando primo e secondo membro della (9) per λ:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{f_y\left[x,y_0\left(x\right),y_0'\left(x\right)\right]-\frac{d}{dx}f_{y'}\left[x,y_0\left(x\right),y_0'\left(x\right)\right]\right\}\cdot\lambda\eta\left(x\right)dx=0 \tag{33}$$

Confrontando la (32) con la (33) vediamo che $\delta y=\lambda\eta(x)$, per cui la (8) si scrive $y(x)=y_0(x)+\delta y$. In tal modo si giustifica l'annullarsi di $\delta y f_{y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\big|_{x_1}^{x_2}$, poichè $\delta y(x_k)=\lambda\eta(x_k)=0$, con $k=1,2$. Se $y_0(x)$ è un'estremante, la variazione prima δJ dovrà annullarsi per ogni δy. Riprendendo la (32):

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left\{f_y\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]-\frac{d}{dx}f_{y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]\right\}\delta y dx=0,\quad\forall\delta y$$

per cui:

$$f_y\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]-\frac{d}{dx}f_{y'}\left[x,y\left(x\right),y'\left(x\right)\right]=0$$

Cioè l'equazione di Eulero.

***

Riprendiamo il sistema di equazioni differenziali di Hamilton:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{h}\left(\mathbf{x},t\right)\\ \mathbf{x}\left(t_0\right)=\mathbf{x}_0\end{cases}, \tag{34}$$

L'integrale particolare che soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$ individua la traiettoria di fase $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$, cioè:

$$q_k=q_k\left(t\right),\ p_k=p_k\left(t\right),\ t\in\mathbb{R}$$

Tale traiettoria definisce il *moto naturale del sistema.*

Risolviamo le equazioni di Hamilton per un sistema composto da una particella (non relativistica) vincolata a muoversi in assenza di forze su una retta r. Orientando l'asse x del sistema di assi coordinati lungo r e assumendo come coordinate canoniche l'ascissa x della particella e il suo impulso $p = m\dot{x}$, l'hamiltoniana è:

$$H(p) = \frac{p^2}{2m} \tag{35}$$

Il sistema (34) si scrive:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ x(t_0) = x_0, \ p(t_0) = p_0 \end{cases} \tag{36}$$

Integrando, otteniamo - come ci si aspettava - un moto rettilineo ed uniforme con velocità scalare $v_0 = \frac{p_0}{m}$, onde la soluzione del problema di Cauchy (36) è la seguente funzione lineare:

$$x_*(t) = x_0 + v_0(t - t_0), \ \forall t \in [t_0, +\infty) \tag{37}$$

che definisce il moto naturale del sistema. All'istante $t_1 > t_0$ l'ascissa del punto materiale è:

$$x_1 = x_*(t_1) = x_0 + v_0(t_1 - t_0)$$

Prendiamo dunque in considerazione l'intervallo $[t_0, t_1]$. Siano $x(t) \in C^1(\mathbb{R}) \mid x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ e $f(t, x, \dot{x})$ definita in $D \times \mathbb{R} \mid f \in C^2(D \times \mathbb{R})$, dove D è un dominio internamente connesso di $\mathbb{R}^2$ e contenente il diagramma orario $x_*(t)$. L'equazione di Eulero relativa al funzionale:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f[t, x(t), \dot{x}(t)]\, dt, \tag{38}$$

è:

$$f_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0$$

Nella notazione di Leibnitz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{39}$$

Tale equazione è della stessa forma delle equazioni di Lagrange (**??**) che nel caso in esame si riducono all'equazione:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0, \tag{40}$$

dove L è la lagrangiana della particella. Tale analogia suggerisce di porre $f(t,x,\dot{x}) \equiv L(t,x,\dot{x})$, per cui il funzionale $J(x)$ è in realtà:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, x(t), \dot{x}(t)]\, dt$$

La lagrangiana è:

$$L(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2,$$

onde l'equazione di Eulero si scrive:

$$\ddot{x} = 0,$$

che conduce al moto naturale del sistema. In fig. 2 riportiamo accanto al diagramma orario del moto naturale, il diagramma orario di un cosiddetto **moto variato**, cioè il grafico di una funzione $x(t) \neq x_*(t)$ avente in comune con la $x_*(t)$ gli estremi.

In questo esempio specifico, abbiamo ricavato le equazioni di Lagrange partendo dal calcolo variazionale.

***

I risultati precedenti si generalizzano a più funzioni. Più precisamente, consideriamo n funzioni $y_k(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e una funzione f delle $2n+1$ variabili $(x, y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n)$:

$$f : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con $(x, y_1, ..., y_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, dove D è un dominio internamente connesso. Assumiamo $f \in C^2(D \times \mathbb{R}^n)$, dopodichè definiamo il funzionale:

$$J(y_1, ..., y_n) = \int_{x_1}^{x_2} f[x, y_1(x), ..., y_n(x), y'_1(x), ..., y'_n(x)]\, dx \qquad (41)$$

Anche qui notiamo l'analogia con la nozione di funzione di punto. Mentre una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ è una funzione di n punti $x_1, x_2, ..., x_n$, un funzionale $J(y_1, ..., y_n)$ è una funzione di n linee $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$.

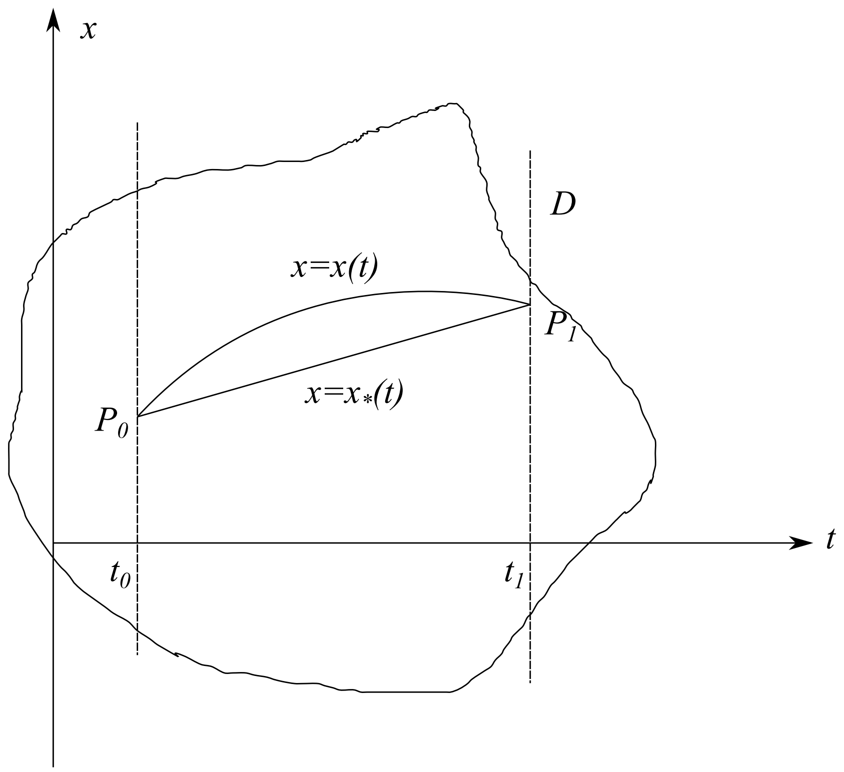

Figure 2: Assegnati i punti $P_0\,(t_0, x_0)$, $P_1\,(t_1, x_1) \in \mathring{D}$, consideriamo la famiglia dei diagrammi orari passanti per P_0, P_1 e contenuti in D. Il diagramma estremante per il funzionale $J\,(x)$ è il segmento $x_*\,(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0)$ che definisce il moto naturale del sistema.

La variazione prima di J è:

$$\begin{aligned}\delta J &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \delta f\left[x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x)\right] dx \\ &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{n} f_{y_k}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) \delta y_k dx + \\ &+ \int\limits_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{n} f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) \left(\delta y_k\right)' dx\end{aligned}$$

Eseguendo un'integrazione per parti nell'ultimo integrale:

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_1}^{x_2} f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) \left(\delta y_k\right)' dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \underbrace{\left[\delta y_k f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right)\right]_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int\limits_{x_1}^{x_2} \delta y_k \frac{d}{dx} f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ...y_n'\right) dx \right\}$$

$\left[\delta y_k f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ...y_n'\right)\right]_{x_1}^{x_2} = 0$, in quanto gli estremi sono assegnati ($\Longrightarrow$ $\delta y_k(x_1) = \delta y_k(x_2) = 0$). Quindi:

$$\begin{aligned}\delta J &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[f_{y_k}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) - \frac{d}{dx} f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right)\right] \delta y_k dx \\ &= 0, \ \forall \delta y_k \\ &\Longrightarrow f_{y_k}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) - \frac{d}{dx} f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) = 0, \ k = 1, 2, ..., n\end{aligned}$$

Ne concludiamo che se il sistema di funzioni $\left[y_1^{(0)}(x), y_2^{(0)}(x), ..., y_n^{(0)}(x)\right]$ è un estremante per il funzionale $J(y_1, ..., y_n)$, allora è un integrale del sistema di equazioni differenziali del second'ordine nelle $y_k(x)$ (*sistema di Eulero*):

$$f_{y_k}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) - \frac{d}{dx} f_{y_k'}\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right) = 0, \ \ k = 1, 2, ..., n$$

Nella notazione di Leibnitz:

$$\frac{\partial f}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k'}\right) = 0, \ \ k = 1, 2, ..., n$$

Osservazione 19 *Utilizzando la notazione vettoriale:*

$$J(\mathbf{y}) = \int_{x_1}^{x_2} f\left[x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)\right] dx,$$

il sistema di equazioni di Eulero relativo al funzionale $J(\mathbf{y})$ *si scrive:*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right) = 0$$