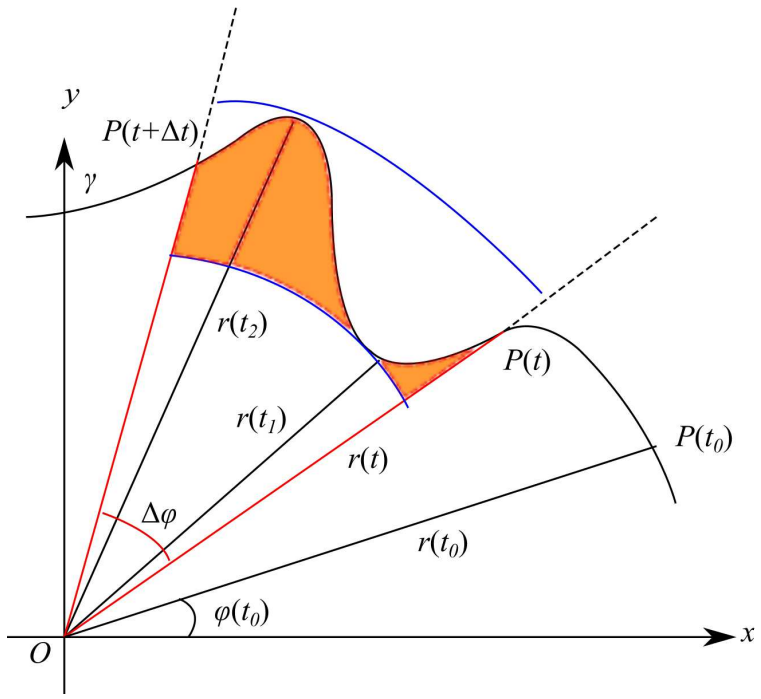
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Appunti dalle lezioni di Fisica 1

(Cinematica del punto materiale)

Marcello Colozzo



Indice

I Calcolo vettoriale 1

1 I vettori 2

1.1 Esempio introduttivo . . . 2
1.2 Grandezze scalari e grandezze vettoriali . . . 3
1.3 Campo scalare e campo vettoriale . . . 5
1.4 Algebra vettoriale. Rappresentazione cartesiana di un vettore . . . 5
1.5 Prodotto scalare . . . 7
1.6 Prodotto vettoriale . . . 8
1.7 Prodotto misto. Terne levogire e terne destrogire . . . 11
1.8 Funzioni vettoriali . . . 13
1.8.1 Continuità . . . 13
1.8.2 Derivato di un vettore . . . 15
1.8.3 Integrale di un vettore . . . 18

II Meccanica 19

2 Cinematica del punto materiale 20

2.1 Introduzione . . . 20
2.2 Punto materiale . . . 20
2.3 Sistema di riferimento . . . 20
2.4 Terna di riferimento. Equazione oraria . . . 21
2.5 Moto su traiettoria rettilinea. Diagramma orario. Velocità scalare . . . 22
2.5.1 Moto rettilineo uniforme . . . 24
2.5.2 Complementi . . . 24
2.5.3 Accelerazione nel moto rettilineo. Moto rettilineo vario e moto uniformemente accelerato
2.6 Moto piano . . . 30
2.6.1 Moto piano in coordinate cartesiane . . . 30
2.6.2 Complementi . . . 36
2.6.3 Moto piano in coordinate polari. Velocità radiale e velocità trasversale 47
2.6.4 Moto circolare uniforme. Velocità angolare . . . 49
2.6.5 Composizione di moti armonici . . . 50
2.6.6 Composizione di moti armonici con pulsazione diversa . . . 55
2.6.7 Pulsazione dipendente dal tempo . . . 57
2.6.8 Il cuscino di Lassjous . . . 59
2.6.9 Velocità areolare . . . 60
2.6.10 Complementi. Accelerazione radiale e accelerazione trasversale . . . 63
2.7 Principio dei moti relativi . . . 66

2.7.1 Derivazione assoluta e relativa di una funzione vettoriale. Lemma di Coriolis 67
2.7.2 Teorema del Coriolis 69
2.7.3 Il lemma di Coriolis e le formule di Poisson. Il gruppo ortogonale $O(3)$ 72
2.7.4 Il concetto di base ortonormale rotante 76
2.7.5 La formica di Coriolis 84

Parte I

Calcolo vettoriale

Capitolo 1

I vettori

1.1 Esempio introduttivo

L'esempio proposto presuppone la conoscenza del calcolo vettoriale (quindi il lettore inesperto può passare direttamente al paragrafo 1.2), ed espone in maniera chiara la straordinaria efficacia di tale paradigma. L'esempio è tratto da [1]; la soluzione è nostra.

Esempio 1 *Una squadriglia di boy-scout è rimasta bloccata in mezzo alla foresta, lontana dal suo attendamento (fig. 1.1).*

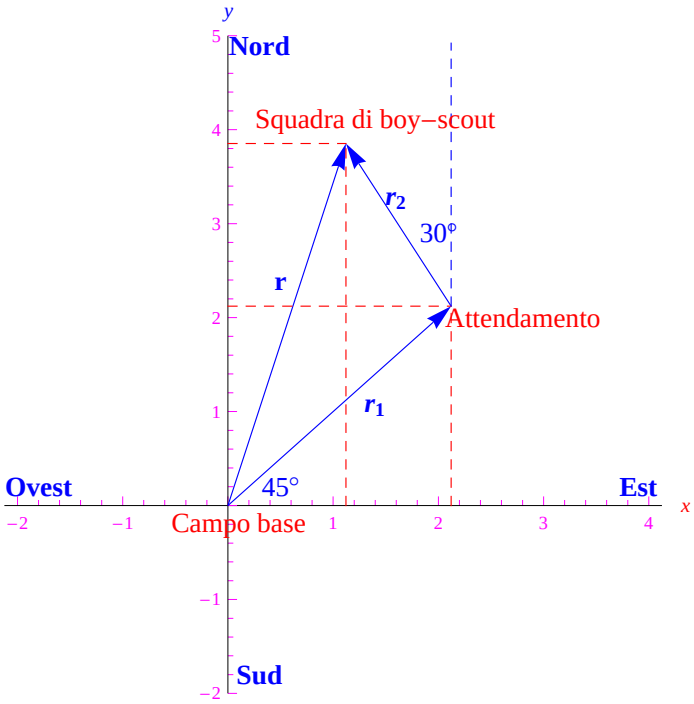


Figura 1.1: Esempio 1.

Basandosi sulle loro osservazioni, gli esploratori sanno di trovarsi a 2.0 km *di distanza dalle tende nella direzione che forma un angolo di* 30° *verso ovest rispetto al nord. Essi sanno anche che il loro attendamento è piantato a* 3.0 km *di distanza dal campo base nella direzione che forma un angolo di* 45° *verso est rispetto al nord. Per ottenere soccorso devono comunicare via radio al campo base il luogo in cui si trovano. Come possono definire la loro posizione rispetto al campo base?*

Soluzione

Questo esercizio si risolve facilmente con l'algebra vettoriale. Innanzitutto fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxyz)$ con l'origine nel campo base, e con gli assi coordinati orientati verso Est e Nord, rispettivamente (fig. 1.1). Il problema consiste nel determinare il vettore $\mathbf{r}$ che definisce la posizione dei boy-scout rispetto al campo base. Risulta:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \tag{1.1}$$

La (1.1) è un'equazione vettoriale che può essere *proiettata* sugli assi coordinati, ossia scritta componente per componente:

$$\begin{cases} r_x = r_{1x} + r_{2x} \\ r_y = r_{1y} + r_{2y} \end{cases}, \tag{1.2}$$

essendo (r_{1x}, r_{1y}) le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{r}_1$, mentre la coppia ordinata (r_{2x}, r_{2y}) definisce le componenti del vettore $\mathbf{r}_2$. Dalla fig. 1.1

$$r_{1x} = r_1 \cos 45^\circ = 2.12\,\text{km}, \;\; r_{1y} = 2.12\,\text{km}$$

Passiamo al vettore $\mathbf{r}_2$

$$r_{2x} = -r_2 \cos 60^\circ = -1\,\text{km}, \;\; r_{2y} = r_2 \cos 30^\circ = 1.73\,\text{km}$$

Sostituendo questi dati nelle (1.1):

$$r_x = 1.12\,\text{km}, \;\; r_y = 3.85\,\text{km}$$

A questo punto non dobbiamo fare altro che calcolare modulo e direzione del vettore $\mathbf{r}$:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = 4.0\,\text{km}, \quad \alpha = \arctan \frac{r_y}{r_x} = 73^\circ\, 46'.8$$

Conclusione: i boy scout possono comunicare via radio la loro posizione, asserendo che si trovano a 4.0 km dal campo base, nella direzione che forma un angolo di $73^\circ\, 46'.8$ verso est rispetto al nord.

1.2 Grandezze scalari e grandezze vettoriali

In Fisica alcune grandezze sono univocamente determinate da un numero reale che esprime il rapporto tra il valore della grandezza e una fissata *unità di misura*. Altre grandezze, invece, necessitano di ulteriori parametri. Questa prima e approssimata classificazione, suggerisce la seguente definizione:

Definizione 2 *Si dicono* **grandezze scalari** *o semplicemente* **scalari**, *tutte e sole le grandezze fisiche univocamente determinate da un numero reale dato dal rapporto tra il valore della grandezza e una fissata unità di misura.*

Esempi di grandezze scalari: temperatura, pressione, energia. Anche grandezze fondamentali quali lunghezza e tempo (intervalli di tempo) sono grandezze scalari. Nella dinamica del punto materiale incontreremo un'importante grandezza scalare: la *massa*.

Per quanto precede, esistono grandezze che non sono univocamente determinate dall'"ampiezza numerica". Si pensi ad esempio, allo spostamento di un corpo: una locuzione del tipo "il

corpo si è spostato di 10 metri", è del tutto insufficiente per determinare l'effettivo spostamento, giacché occorre definire la *direzione orientata* secondo cui avviene lo spostamento medesimo. Quindi, accanto al numero che esprime l'ampiezza, vale a dire 10 metri, occorre specificare la *direzione* e il *verso*.

Generalizzando, possiamo dire che molti enti fisici sono rappresentati da particolari enti geometrici caratterizzati da una lunghezza ovvero un'*ampiezza*, e da una direzione orientata.

Definizione 3 *Tali enti si dicono* **vettori** *e le grandezze rappresentate,* **grandezze vettoriali**.

Un vettore è dunque rappresentato da un segmento orientato, la cui lunghezza esprime l'ampiezza della grandezza fisica (rispetto a una unità di misura). Si badi che tale definizione può essere fuorviante, poiché un vettore costituisce ciò che in matematica si chiama *classe di equivalenza*. Detto in altro modo, si definisce dapprima una cosiddetta *relazione di equipollenza* tra segmenti orientati appartenenti allo spazio ordinario (ovvero l'usuale spazio euclideo tridimensionale). Due segmenti orientati $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ si dicono *equipollenti* se oltre ad avere la medesima lunghezza, sono paralleli e concordi. Ne consegue che un vettore è l'elemento che accomuna un insieme di segmenti equipollenti[1]. Un qualunque segmento dell'insieme rappresenta, dunque, il medesimo vettore come illustrato in fig. 1.2. La possibilità di prendere ad arbitrio uno dei predetti segmenti, si esprime dicendo che $\mathbf{v}$ è un **vettore libero**.

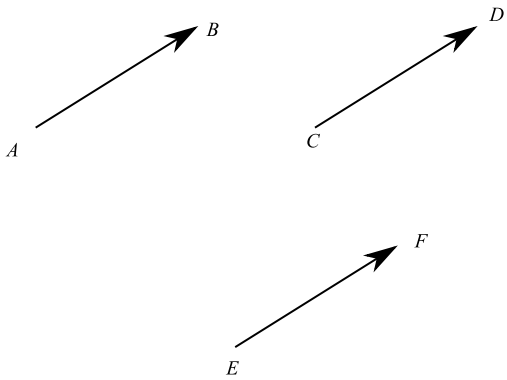


Figura 1.2: Uno qualunque dei tre segmenti orientati $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, rappresenta il medesimo vettore.

Tuttavia in Fisica si presenta spesso la necessità di specificare il *punto di applicazione* di un vettore. In tal caso siamo in presenza di un nuovo ente geometrico denominato **vettore applicato**.

Per quanto riguarda la notazione, un vettore (libero o applicato) viene indicato con una lettera (minuscola o maiuscola) grassettata o soprasegnata da una freccia. Ad esempio

$$\mathbf{v}, \quad \vec{v}$$

Salvo avviso contrario, in queste lezioni utilizzeremo la notazione grassettata.

Definizione 4 *La lunghezza del segmento rappresentativo di un vettore libero, si dice* **modulo** *o* **ampiezza** *di* $\mathbf{v}$ *e si indica con* $|\mathbf{v}|$ *oppure con* v.

[1] Esattamente come succede per la *direzione*, intesa come elemento che accomuna un insieme di rette parallele.

1.3 Campo scalare e campo vettoriale

Una grandezza scalare può cariare in funzione del tempo e/o del punto ove viene calcolata la grandezza medesima. Matematicamente

$$U = U(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

essendo U la grandezza e t il tempo. Dopo aver istituito un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxyz)$, la dipendenza dal punto dello spazio ordinario è matematicamente rappresentata dalla seguente funzione reale delle variabili reali x, y, z

$$U = U(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in D, \tag{1.4}$$

essendo D il campo di esistenza della funzione (1.4). Se poi U dipende oltre che dal punto anche dal tempo:

$$U = U(x, y, z, t), \quad \forall (x, y, z) \in D, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Osservazione 5 *Solitamente si assegna un istante iniziale $t_0 \geq 0$, per cui è $t \geq t_0$.*

Definizione 6 *La grandezza $U(x, y, z, t)$ di dice* **campo scalare**.

Un campo scalare si dice **stazionario** se non dipende esplicitamente dal tempo:

$$U = U(x, y, z) \tag{1.5}$$

o ciò che è lo stesso

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Si badi che un campo scalare stazionario può comunque esibire una dipendenza implicita dal tempo. Matematicamente, ciò si verifica se U è una funzione composta del tipo

$$U[x(t), y(t), z(t)] \tag{1.6}$$

Un campo scalare si dice **omogeneo** o **uniforme**, se non dipende dalle coordinate, per cui dipende al più dal tempo.

In modo simile, possiamo definire un **campo vettoriale** come un vettore che dipende dalle coordinate x, y, z ed eventualmente dal tempo

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) \tag{1.7}$$

Ad esempio, nel moto di un fluido in un tubo, la grandezza vettoriale fisicamente significativa è la velocità (=vettore) del generico elemento di fluido sito in (x, y, z) al tempo t. Denotando con $\mathbf{v}$ il vettore velocità, si ha il campo vettoriale $\mathbf{v}(x, y, z, t)$.

1.4 Algebra vettoriale. Rappresentazione cartesiana di un vettore

Dall'Algebra lineare sappiamo che l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali, può essere strutturato come spazio vettoriale reale attraverso l'introduzione di due leggi di composizione: addizione di vettori e moltiplicazione di uno scalare per un vettore. Qui il termine *vettore* si riferisce a un elemento di $\mathbb{R}^3$ ovvero a una terna ordinata di numeri reali. Tale definizione riproduce quella stabilita nei numeri precedenti. Infatti, istituendo un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxyz)$ come in fig. 1.3, definiamo innanzitutto:

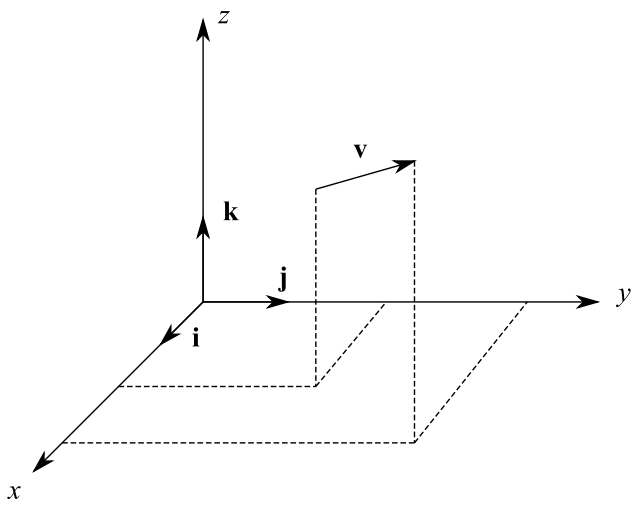


Figura 1.3: Proiezione ortogonale di un vettore $\mathbf{v}$ sugli assi coordinati di un riferimento cartesiano ortogonale $R\,(Oxyz)$.

Definizione 7 *Un* **versore** *è un vettore di modulo unitario. Un tale ente viene a volte denominato* **vettore unitario**.

Un versore definisce una direzione orientata dello spazio ordinario. Ad esempio, assegnata una retta orientata r, il versore di r è un vettore di modulo unitario parallelo e concorde a r. Nel caso speciale degli assi coordinati x, y, z del riferimento $\mathcal{R}$, i corrispondenti versori vengono solitamente denotati con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Ciò premesso, la legge di composizione *addizione di vettori* si realizza graficamente attraverso la ben nota *regola del parallelogramma* (fig. 1.4).

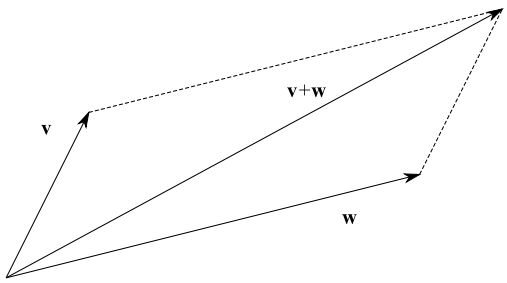


Figura 1.4: Regola del parallelogramma per determinare l'addizione di vettori. Si noti che i punti di applicazione sono ininfluenti, giacché si tratta di vettori liberi.

Proiettando ortogonalmente il vettore v sugli assi coordinati (fig. 1.3), e denotando con v_x, v_y, v_z le misure relative dei segmenti intercettati sui predetti assi, è facile persuadersi che

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \tag{1.8}$$

mentre il modulo

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.9}$$

Esercizio 8 *Si dimostri la (1.9).*

Definizione 9 *La terna ordinata* (v_x, v_y, v_z) *definisce le* **componenti cartesiane** *del vettore* $\mathbf{v}$ *rispetto al riferimento cartesiano* $\mathcal{R}(Oxyz)$. *La (1.8) è la* **rappresentazione cartesiana** *di* $\mathbf{v}$.

Da ciò segue l'identificazione di un vettore dello spazio ordinario con una terna di numeri reali, come anticipato in precedenza. Come è noto, sono soddisfatti i seguenti assiomi per ciò che riguarda la legge di composizione *addizione di vettori*:

1. **Proprietà commutativa**
   $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$
2. **Proprietà associativa**
   $\mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$
3. **Esistenza elemento neutro (vettore nullo)**
   $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$
4. **Esistenza dell'opposto**
   $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \ \exists (-\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^3 \mid -\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Gli assiomi verificati dalla legge di composizione *moltiplicazione di uno scalare per un vettore,* sono:

I. Proprietà associativa

$\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

II. Proprietà distributiva rispetto all'addizione di vettori

$\lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

III. Proprietà distributiva rispetto all'addizione di scalari

$(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

III. Esistenza elemento neutro

$1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

1.5 Prodotto scalare

Le operazioni introdotte nel numero precedente (addizione di vettori, moltiplicazione di uno scalare per un vettore) sono *omogenee*, nel senso che restituiscono un vettore. Di contro, una importante operazione non omogenea è il *prodotto scalare.* La non omogeneità di tale operazione deriva dal fatto che accettando in ingresso una coppia di vettori, restituisce uno scalare.

Definizione 10 *Dicesi* **prodotto scalare** *dei vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *la grandezza*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab\cos\theta \tag{1.10}$$

dove θ *è l'angolo tra i due vettori.*

Si noti che la grandezza $b\cos\theta$ è la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{b}$ secondo $\mathbf{a}$ (i.e. secondo la direzione e verso di $\mathbf{a}$), e si chiama *componente* del vettore $\mathbf{b}$ secondo $\mathbf{a}$ (cfr. fig. 1.5). D'altra parte, possiamo eseguire la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{a}$ su $\mathbf{b}$ ottenendo la grandezza (ovvero la componente di $\mathbf{a}$ secondo $\mathbf{b}$) $a\cos\theta$.

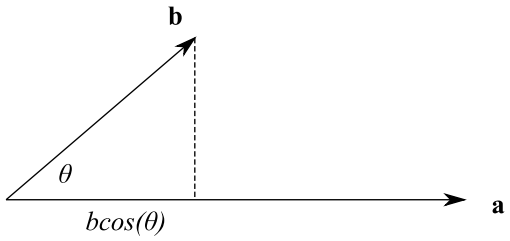


Figura 1.5: Lo scalare $b\cos\theta$ è la componente del vettore $\mathbf{b}$ secondo la direzione e verso del vettore $\mathbf{a}$.

Ne consegue che il prodotto scalare di due vettori è la moltiplicazione del modulo di uno dei due vettori per la componente dell'altro secondo la direzione e verso del primo vettore. Cioè

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \begin{cases} a \ \underbrace{b\cos\theta}_{\text{comp. di } \mathbf{b}} \\ b \ \underbrace{a\cos\theta}_{\text{comp. di } \mathbf{a}} \end{cases} \tag{1.11}$$

Evidentemente:

- Se uno dei due vettori è il vettore nullo, il prodotto scalare è nullo.
- Se entrambi i vettori sono non nulli, il prodotto scalare è nullo se e solo se i vettori sono ortogonali.

La legge di composizione appena definita verifica i seguenti assiomi

1. **Proprietà commutativa**

   $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, \ \ \forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

2. **Proprietà associativa rispetto all'addizione di vettori**

   $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \ \ \forall \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$

3. **Proprietà associativa rispetto alla moltiplicazione di uno scalare per un vettore**

   $\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})$

1.6 Prodotto vettoriale

Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ due vettori.

Definizione 11 *Dicesi* **prodotto vettoriale** *di* $\mathbf{a}$ *per* $\mathbf{b}$ *e si denota con uno dei due simboli:*

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b},$$

il vettore avente modulo, direzione e verso definiti nel modo seguente:

- *il modulo è* $ab\sin\theta$, *ove* θ *è l'angolo* ($< \pi$) *tra i due vettori;*
- *la direzione è quella della retta perpendicolare al piano determinato da* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$*;*
- *il verso è tale che* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ =*terna levogira.*

Nelle figg. 1.6-1.7 è schematizzato il risultato del prodotto vettoriale dei vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

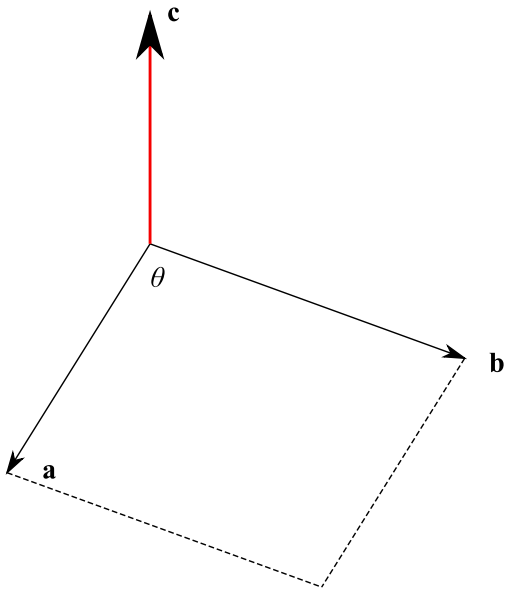


Figura 1.6: Il vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

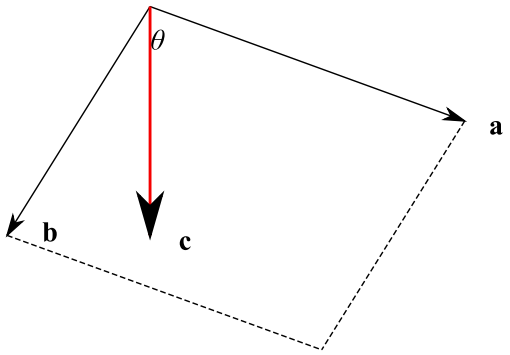


Figura 1.7: Il vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Si noti che $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = ab\sin\theta$ è l'area del parallelogramma i cui lati sono i segmenti rappresentativi di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Il prodotto vettoriale è anti-commutativo

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \tag{1.12}$$

Ed è distributivo rispetto all'addizione di vettori:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &\lambda(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\wedge\mathbf{b} = \mathbf{a}\wedge(\lambda\mathbf{b}), \quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \ \forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3 \\ &\mathbf{a}\wedge\mathbf{a} = \mathbf{0},\ \ \forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3 \\ &\mathbf{a}//\mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{a}\perp\mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0,\ \ |\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}| = ab \end{aligned} \tag{1.13}$$

In particolare

$$\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{0} \tag{1.14}$$

Risulta

$$\mathbf{k} = \mathbf{i}\wedge\mathbf{j} \tag{1.15}$$

Permutando ciclicamente

$$\mathbf{i} = \mathbf{j}\wedge\mathbf{k},\quad \mathbf{j} = \mathbf{k}\wedge\mathbf{i} \tag{1.16}$$

Dimostriamo ora un importante teorema che fornisce la rappresentazione cartesiana del prodotto vettoriale.

Teorema 12 *Il prodotto vettoriale di* $\mathbf{a}$ *per* $\mathbf{b}$ *è dato dallo sviluppo del seguente determinante "simbolico":*

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{1.17}$$

dove (a_x, a_y, a_z) *e* (b_x, b_y, b_z) *sono le componenti cartesiane di* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *rispettivamente, rispetto a un assegnato riferimento cartesiano ortogonale* $\mathcal{R}(Oxyz)$.

Dimostrazione. Scriviamo

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},\quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

Segue

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\wedge(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}),$$

da cui tenendo conto della proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto all'addizione di vettori, si perviene facilmente

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\,\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathbf{i} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathbf{k}$$

cioè l'asserto. ■

Di immediata dimostrazione è il corollario

Corollario 13 *Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale* $\mathcal{R}(Oxyz)$*, le componenti cartesiane del prodotto vettoriale di* $\mathbf{a}$ *per* $\mathbf{b}$*, sono i minori del secondo ordine e presi con segni alterni, della matrice* 2×3 *i cui elementi sono le componenti cartesiane dei predetti vettori:*

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

1.7 Prodotto misto. Terne levogire e terne destrogire

Un'altra operazione è data da una legge di composizione che a una terna ordinata di vettori associa univocamente uno scalare. Si tratta, dunque, di un'operazione non omogenea.

Definizione 14 *Dicesi* **prodotto misto** *di* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$*, lo scalare*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \tag{1.19}$$

Si noti che non è necessaria la presenza di una parentesi, in quanto affinché abbia senso la (1.19), è necessario eseguire prima il prodotto vettoriale e poi il prodotto scalare. Precisamente, posto $\mathbf{d} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, il prodotto misto dei tre vettori è $\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}$.

Teorema 15

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Dimostrazione. Per il teorema 12

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= (b_y c_z - b_z c_y)\,\mathbf{i} + (b_z c_x - b_x c_z)\,\mathbf{j} + (b_x c_y - b_y c_z)\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

per cui

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = a_x\,(b_y c_z - b_z c_y) + a_y\,(b_z c_x - b_x c_z) + a_z\,(b_x c_y - b_y c_z)$$

Cioè l'asserto. ■

Definizione 16 *Una terna ordinata di vettori* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *si dice* **terna levogira***, se il vettore* $\mathbf{c}$ *personificato vede ruotare il vettore* $\mathbf{a}$ *dalla sua destra verso la sua sinistra quando quest'ultimo va a sovrapporsi al vettore* $\mathbf{b}$ *attraverso un angolo* $\varphi < \pi$ *(cfr. fig. 1.8). Nel caso contrario, abbiamo una* **terna destrogira** *(fig. 1.9).*

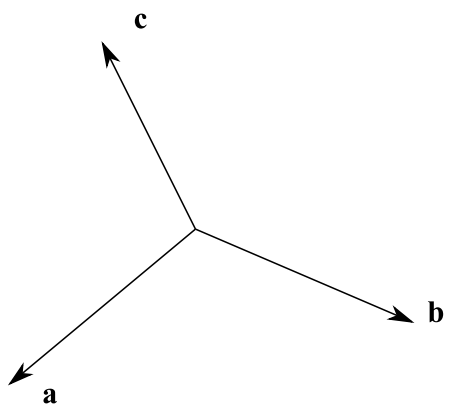


Figura 1.8: Terna levogira.

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *si avrà una* **terna trirettangola levogira** *o* **destrogira** *a seconda della rotazione antioriaria/oraria.*

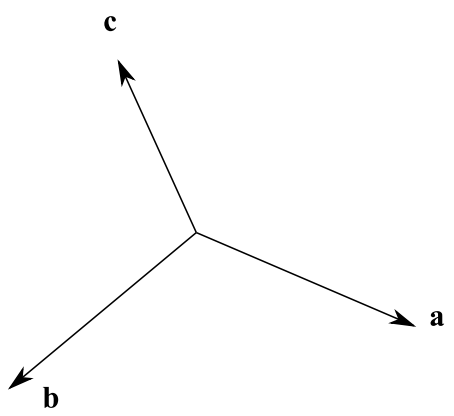


Figura 1.9: Terna destrogira.

Per vedere quando si annulla il prodotto misto, dobbiamo risolvere l'equazione vettoriale

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0, \tag{1.20}$$

la cui soluzione banale è data dall'annullarsi di uno dei fattori, i.e. se uno dei vettori è il vettore nullo. Escludendo questo caso, si hanno le seguenti possibilità:

1. il vettore $\mathbf{a}$ è ortogonale a $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Infatti, in tal caso si annulla il prodotto scalare. Ma $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ è a sua volta perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, supponendo tali vettori non paralleli. Ne consegue che $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ sono paralleli a una stessa giacitura.

2. i vettori $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ sono paralleli. Infatti, il prodotto vettoriale è il vettore nullo, il quale moltiplicato scalarmente per il vettore $\mathbf{a}$, restituisce lo scalare nullo.

Conclusione il prodotto misto di tre vettori non nulli $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ si annulla se sono paralleli a una stessa giacitura o se i vettori $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ sono paralleli.

La seguente proposizione restituisce un'importante interpretazione geometrica del prodotto misto:

Proposizione 17 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ *è il volume del parallelepipedo avente per spigoli concorrenti in un vertice i tre vettori, preso con il segno* $+$ *se* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *è una terna levogira. Altrimenti, va preso il segno* $-$.

Dimostrazione. Facciamo riferimento alla fig. 1.10 dove stiamo considerando – senza perdita di generalità – una terna levogira.

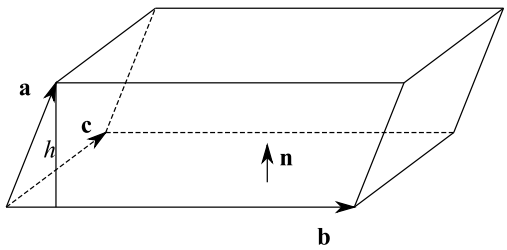


Figura 1.10: Proposizione 17.

Nella fig. 1.10 è manifestamente

$$\mathbf{n} = vers\,(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$

Il volume del parallelepipedo è

$$V = h \cdot (\text{area di base})$$

D'altra parte, l'area di base è l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$. Per un noto teorema:

$$\text{area di base} = |\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|$$

mentre $h = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$. Ne consegue

$$V = \lambda (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{n}), \quad \lambda = |\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|$$

Ma

$$\lambda \mathbf{n} = |\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}| \, vers \, (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c},$$

onde l'asserto. ■

1.8 Funzioni vettoriali

1.8.1 Continuità

Definizione 18 *Assegnato un riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(Oxyz)$ e una variabile reale t, si dice che il vettore $\mathbf{u}$ è una* **funzione vettoriale** *della variabile reale t, se le componenti cartesiane di $\mathbf{u}$ rispetto a $\mathcal{R}$ sono funzioni reali della variabile reale t. Cioè*

$$u_x = u_x(t), \quad u_y = u_y(t), \quad u_z = u_z(t), \quad t \in [t_1, t_2], \tag{1.21}$$

essendo $[t_1, t_2]$ l'intervallo di $\mathbb{R}$ (limitato o illimitato) di definizione delle funzioni reali (1.21). In tal caso si scrive:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \tag{1.22}$$

Tale definizione è riassunta nella seguente rappresentazione cartesiana:

$$\mathbf{u}(t) = u_x(t)\,\mathbf{i} + u_y(t)\,\mathbf{j} + u_z(t)\,\mathbf{k} \tag{1.23}$$

oppure

$$\mathbf{u}(t) = (u_x(t), u_y(t), u_z(t)) \tag{1.24}$$

Definizione 19 *La funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ è* **limitata** *in $[t_1, t_2]$ se sono ivi limitate le funzioni $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ o, ciò che è lo stesso, se è ivi limitata la funzione*

$$u(t) = \sqrt{u_x(t)^2 + u_y(t)^2 + u_z(t)^2} \tag{1.25}$$

Definizione 20 *(***Definizione di limite***)*
Sia $t_0 \in [t_1, t_2]$.

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |t - t_0| < \varepsilon \Longrightarrow |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0| < \varepsilon \tag{1.26}$$

In tal caso si dice che la funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ è **convergente** *in t_0 oppure che* **converge** *a $\mathbf{u}_0$ in t_0 (o per $t \to t_0$).*

Ciò implica che le funzioni $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ sono convergenti in t_0:

$$\lim_{t\to t_0} u_x(t) = u_{0x},\ \lim_{t\to t_0} u_y(t) = u_{0y},\ \lim_{t\to t_0} u_z(t) = u_{0z}, \tag{1.27}$$

essendo

$$u_{0x}\mathbf{i} + u_{0y}\mathbf{j} + u_{0z}\mathbf{k} = \mathbf{u}_0$$

Più in generale, se la funzione reale $u_r(t)$ è la componente di $\mathbf{u}(t)$ secondo una retta r comunque assegnata, si ha

$$\lim_{t\to t_0} u_r(t) = u_{0r} \tag{1.28}$$

ove u_{0r} è la componente di $\mathbf{u}_0$ secondo la predetta retta. Ovviamente

$$\lim_{t\to t_0} |\mathbf{u}(t)| = |\mathbf{u}_0| \tag{1.29}$$

giacché

$$\lim_{t\to t_0} \sqrt{u_x(t)^2 + u_y(t)^2 + u_z(t)^2} = \sqrt{u_{0x}^2 + u_{0y}^2 + u_{0z}^2}$$

La definizione di continuità di una funzionoe reale di una variabile reale, si estende facilmente alle funzioni vettoriali.

Definizione 21 *Una funzione vettoriale $u(t)$ definita in $[t_1, t_2]$ si dice* **continua** *in $t_0 \in [t_1, t_2]$ se*

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0) \tag{1.30}$$

$\mathbf{u}(t)$ è continua in $[t_1, t_2]$ se è continua in ogni punto di tale intervallo.

Per quanto precede

$$\mathbf{u}(t) \text{ è continua in } [t_1, t_2] \Longleftrightarrow u_r(t) \text{ è continua in } [t_1, t_2],\ \forall \text{retta } r$$

In particolare

$$\mathbf{u}(t) \text{ è continua in } [t_1, t_2] \Longleftrightarrow u_x(t), u_y(t), u_z(t) \text{ sono funzioni continue in } [t_1, t_2]$$

Esempio 22 *Consideriamo la funzione vettoriale le cui componenti cartesiane sono*

$$u_x(t) = \frac{\sin 20t}{20t},\quad u_y(t) = \frac{1-\cos t}{t^2},\quad u_z(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

Tale funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$. Il punto $t = 0$ è manifestamente di accumulazione per l'insieme di definizione, per cui studiamo il comportamento della funzione in un intorno di tale punto. Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} u_x(t) &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin 20t}{20t} = 1 \\ \lim_{t\to 0} u_y(t) &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} \\ \lim_{t\to 0} u_z(t) &= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1, \end{aligned} \tag{1.31}$$

onde

$$\lim_{t\to 0} \mathbf{u}(t) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{1.32}$$

Ne consegue che la funzione vettoriale assegnata ha nel punto $t = 0$, una discontinuità eliminabile, per cui è prolungabile per continuità, attraverso la seguente posizione

$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \frac{\sin 20t}{20t}\mathbf{i} + \frac{1-\cos t}{t^2}\mathbf{j} + \frac{e^t-1}{t}\mathbf{k}, & se\ t \neq 0 \\ \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}, & se\ t = 0 \end{cases}$$

Il lettore che conosce le nozioni basilari di geometria differenziale, riconoscerà nella funzione appena scritta, una rappresentazione parametrica di una curva nello spazio ordinario. In fig. 1.11 è tracciata tale curva utilizzando il software Mathematica.

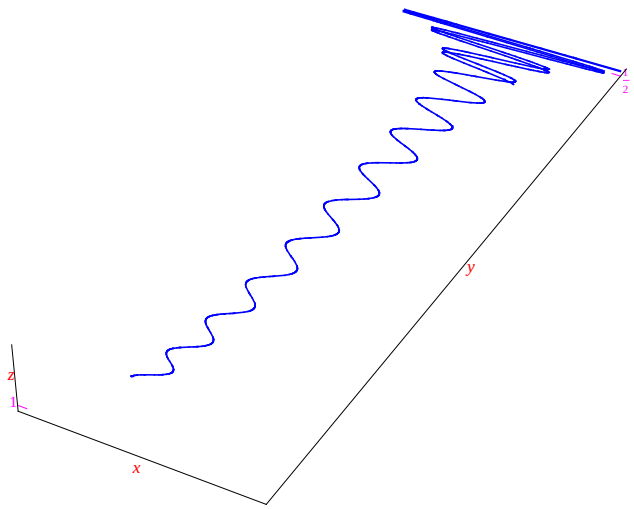


Figura 1.11: Andamento della curva di rappresentazione parametrica $\frac{\sin 20t}{20t}\mathbf{i}+\frac{1-\cos t}{t^2}\mathbf{j}+\frac{e^t-1}{t}\mathbf{k}$.

1.8.2 Derivato di un vettore

Definizione 23 *Assegnata la funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ definita nell'intervallo $[t_1, t_2]$ e un punto t_0 di tale intervallo, dicesi* **rapporto incrementale** *di $\mathbf{u}(t)$ relativo al punto t_0, il vettore*

$$\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t}, \tag{1.33}$$

essendo Δt l'incremento della variabile indipendente.

Per un dato $t_0 \in [t_1, t_2]$ il rapporto incrementale è una funzione vettoriale della variabile reale Δt:

$$\begin{aligned} &t_0 \in (t_1, t_2) \text{ i.e. interno a } [t_1, t_2], \ \Delta t \in \mathbb{R} - \{0\} \mid t_1 - t_0 \leq \Delta t \leq t_2 - t_0 \\ &t_0 = t_1 \Longrightarrow 0 < \Delta t \leq t_2 - t_0 \\ &t_0 = t_2 \Longrightarrow t_1 - t_0 \leq \Delta t < 0 \end{aligned}$$

In ogni caso, il punto $\Delta t = 0$ è di accumulazione per l'insieme di definizione della funzione (1.33), per cui studiamo il comportamento di tale funzione in un intorno di $\Delta t = 0$.

Definizione 24 *Se il rapporto incrementale (1.33) è convergente per $\Delta t \to 0$, si dice che la funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ è* **derivabile** *in t_0, e il corrispondente limite è la* **derivata** *di $\mathbf{u}(t)$ in t_0:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{u}(t_0)}{\Delta t} = \mathbf{u}'(t_0) \tag{1.34}$$

Definizione 25 *Una funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ derivabile in ogni punto di $[t_1, t_2]$ si dice* **derivabile** *in $[t_1, t_2]$.*

La derivabilità di una funzione vettoriale in un intervallo assegnato (limitato o illimitato) si traduce nell'esistenza di una nuova funzione definita nel predetto intervallo:

$$\mathbf{u}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t)}{\Delta t} \tag{1.35}$$

È consuetudine chiamare $\mathbf{u}'(t)$ **vettore derivato** o semplicemente, **derivato** del vettore $\mathbf{u}(t)$. Introducendo l'operatore di derivazione $D = \frac{d}{dt}$:

$$\mathbf{u}'(t) = D\mathbf{u}(t) \tag{1.36}$$

Stabiliamo ora la rappresentazione cartesiana del vettore derivato $\mathbf{u}'(t)$. Sia

$$\mathbf{u}(t) = u_x(t)\,\mathbf{i} + u_y(t)\,\mathbf{j} + u_z(t)\,\mathbf{k}$$

la rappresentazione cartesiana di $\mathbf{u}(t)$. Segue

$$\mathbf{u}'(t) = u'_x(t)\,\mathbf{i} + u'_y(t)\,\mathbf{j} + u'_z(t)\,\mathbf{k} \tag{1.37}$$

In fig. 1.12 è illustrata la determinazione dell'incremento $\Delta\mathbf{u}$.

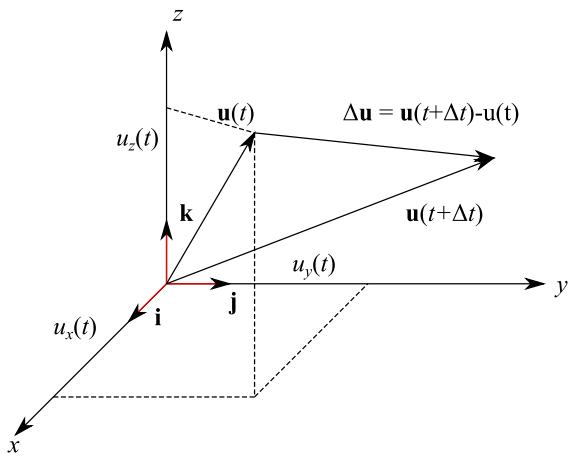


Figura 1.12: Determinazione dell'incremento $\Delta\mathbf{u}$ della funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$.

Sussistono le seguenti regole di derivazione

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{1.38}$$

Se λ è un qualunque scalare costante:

$$\frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{1.39}$$

Se $f(t)$ è una qualunque funzione scalare derivabile:

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\,\mathbf{u}(t)\right] = f'(t)\,\mathbf{u}(t) + f(t)\,\mathbf{u}'(t) \tag{1.40}$$

Per quanto riguarda il prodotto scalare e il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) &= \frac{d\mathbf{u}}{dt}\wedge\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned} \tag{1.41}$$

Esercizio 26 *Provare le (1.38)-(1.39)-(1.40)-(1.41).*

Dalla prima delle (1.41) per $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si ha:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 2\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{1.42}$$

D'altra parte

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}| = u^2,$$

che si chiama *quadrato del vettore* $\mathbf{u}$. Quindi elevare al quadrato un vettore significa eseguire il prodotto scalare del vettore per se stesso:

$$\mathbf{u}^2 = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{u}| = u^2 \tag{1.43}$$

Dalla (1.42)

$$\frac{d\mathbf{u}^2}{dt} = 2\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} \tag{1.44}$$

Proposizione 27 *La derivata di un vettore di modulo costante o è il vettore nullo o è un vettore perpendicolare al vettore assegnato.*

Dimostrazione. Dalla (1.44):

$$0 = 2\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} \Longleftrightarrow \mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0,$$

onde l'asserto. ■

In particolare, dalla (1.37):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \frac{du_x}{dx} = \frac{du_y}{dy} = \frac{du_z}{dz} = 0$$

Cioè se e solo se $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}_0$ (vettore costante). Diversamente, il modulo è costante e il derivato è perpendicolare al vettore assegnato.

Esempio 28 *Sia*

$$\mathbf{u}(t) = (\sin t)\,\mathbf{i} + (\cos t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Segue

$$|\mathbf{u}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

e

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = (\cos t)\,\mathbf{i} + (-\sin t)\,\mathbf{j}$$

Verifichiamo che tale vettore è ortogonale al vettore assegnato:

$$\mathbf{u}(t)\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \sin t\cos t - \cos t\sin t = 0$$

Si definiscono poi le derivate di ordine superiore:

$$\mathbf{u}''(t), \ \mathbf{u}'''(t), ..., \mathbf{u}^{(n)}(t) \tag{1.45}$$

Il *differenziale primo* o semplicemente *differenziale*

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}'(t)\, dt$$

La nota proprietà secondo cui l'incremento di una funzione scalare $f(t)$ differisce dal differenziale per un infinitesimo di ordine superiore all'incremento Δt, si estende immediatamente alle funzioni vettoriali:

$$\Delta u = d\mathbf{u} + \mathbf{o}(\Delta t),$$

essendo $\mathbf{o}(\Delta t)$ un infinitesimo (per $\Delta t \to 0$) di ordine superiore rispetto a Δt.

1.8.3 Integrale di un vettore

Nel numero precedente abbiamo definito l'operazione di derivazione di un vettore:

$$D : \mathbf{u}(t) \to \mathbf{u}'(t) \tag{1.46}$$

Come è noto, nel caso di funzioni scalari l'inversione della (1.46) definisce l'*operazione di integrazione*. Per una funzione vettoriale, tale operazione consiste nel determinare una **primitiva** di un'assegnata funzione vettoriale:

$$\exists \mathbf{w}(t) \mid \mathbf{w}'(t) = \mathbf{u}(t), \quad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{1.47}$$

Definizione 29 *Chiamiamo il seguente oggetto:*

$$\int \mathbf{u}(t)\, dt \tag{1.48}$$

integrale indefinito *della funzione vettoriale* $\mathbf{u}(t)$.

Una primitiva è definita a meno di una costante (vettoriale) additiva. Cioè se $\mathbf{w}(t)$ è una assegnata primitiva di $\mathbf{u}(t)$, si ha:

$$\int \mathbf{u}(t)\, dt = \mathbf{w}(t) + \mathbf{c}, \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$$

Segue la rappresentazione cartesiana

$$\int \mathbf{u}(t)\, dt = \mathbf{i} \int u_x(t)\, dt + \mathbf{j} \int u_y(t)\, dt + \mathbf{k} \int u_z(t)\, dt$$

dove $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ sono le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{u}(t)$.

Definizione 30 *Se* $\mathbf{u}(t)$ *è continua in* $[t_1, t_2]$, *comunque prendiamo* $a, b \in [t_1, t_2]$

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\, dt \tag{1.49}$$

*è l'***integrale definito** *della funzione vettoriale* $\mathbf{u}(t)$ *esteso da* a *a* b.

Se $\mathbf{w}(t)$ è una qualunque primitiva di $\mathbf{u}(t)$, sussiste la formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\, dt = \mathbf{w}(b) - \mathbf{w}(a) \tag{1.50}$$

Parte II

Meccanica

Capitolo 2

Cinematica del punto materiale

2.1 Introduzione

La *cinematica* studia le caratteristiche del moto a prescindere dalle sue cause. Quest'ultime sono oggetto di studio della *dinamica*, mentre la *statica* contempla il caso speciale di corpi in equilibrio.

Cinematica, dinamica e statica, costituiscono quella parte della Fisica denominata *Meccanica*.

2.2 Punto materiale

Il problema che si apre consiste nello schematizzare un corpo (in quiete o in movimento) attraverso un opportuno ente geometrico. È chiaro che una tale schematizzazione dipende dal sistema meccanico in istudio. Ad esempio, nel caso del moto della Terra intorno al Sole, è sufficiente rappresentare la Terra mediante un punto geometrico. Ciò perché le dimensioni lineari del pianeta sono trascurabilmente piccole rispetto alle distanze percorse.

In generale, denotando con λ le dimensioni lineari di un corpo materiale $\mathcal{C}$, se $\lambda \ll d$ ove d è l'ordine di grandezza delle dimensioni lineari della regione di spazio in cui si realizzano i possibili movimenti di $\mathcal{C}$, possiamo schematizzare quest'ultimo attraverso un qualunque suo punto. In altri termini, anziché considerare il moto di $\mathcal{C}$ nel suo insieme, si focalizza l'attenzione su un suo punto per così dire, *rappresentativo*. Chiamiamo **punto materiale** un siffatto punto.

2.3 Sistema di riferimento

L'essenza del moto è intrinsecamente relativa, nel senso che il moto di un qualunque punto materiale deve riferirsi alla posizione di corpi assegnati. Possiamo, in tal modo, misurare la distanza percorsa dal predetto punto materiale in funzione del tempo. Più precisamente, si assegna un opportuno sistema di coordinate che chiamiamo *sistema di riferimento.* Per quanto precede, la scelta di un siffatto sistema è una questione di convenienza e spesso sono le cosiddette "simmetrie" del problema fisico che suggeriscono il sistema di coordinate (cartesiano, sferiche, cilindriche).

Altre volte, invece, sono le modalità con le quali si realizza il moto a suggerire la scelta più semplice del sistema di riferimento. Ad esempio, nel caso di un punto P vincolato a

muoversi su una traiettoria assegnata γ (curva piana o sghemba), è intuitivamente ovvio assumere come posizione del punto la sua ascissa curvilinea, ossia la lunghezza s dell'arco di curva compreso tra un'origine O assegnata e la posizione corrente P, come mostrato in fig. 2.1, a a patto di aver definito un verso positivo su γ.

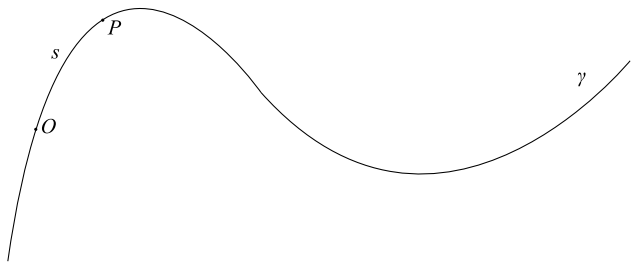


Figura 2.1: Ascissa curvilinea lungo una traiettoria assegnata γ.

2.4 Terna di riferimento. Equazione oraria

Supponiamo di aver fissato per lo studio del moto di un punto materiale P, una terna di assi cartesiani ortogonali che denotiamo con $K\,(Oxyz)$ e che chiameremo d'ora in avanti, **terna di riferimento** o più semplicemente, **sistema di riferimento**. Conoscere il moto di P rispetto a K, equivale a conoscere l'espressione analitica delle seguenti funzioni reali della variabile reale r:

$$x = x\,(t)\,,\;\; y = y\,(t)\,,\;\; z = z\,(t) \tag{2.1}$$

Più precisamente, la variabile indipendente t misura il tempo, mentre x, y, z sono le coordinate cartesiane del punto materiale P.

Matematicamente, le (2.1) costituiscono una rappresentazione parametrica della traiettoria γ di P, e possono essere incorporate in un'unica equazione vettoriale:

$$\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i}x\,(t) + \mathbf{j}y\,(t) + \mathbf{k}z\,(t) \tag{2.2}$$

essendo $\mathbf{r}\,(t)$ il *vettore posizione* di P (fig. 2.2).

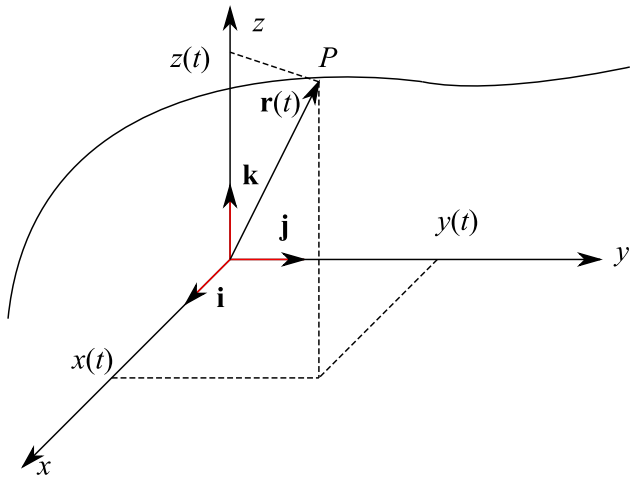


Figura 2.2: Terna di riferimento cartesiana.

Per quanto visto nel numero precedente, la posizione di P in funzione del tempo, è univocamente determinata dalla funzione

$$s = s(t), \tag{2.3}$$

dove s è l'ascissa curvilinea di P su γ. Tale funzione si chiama **equazione oraria** del moto.

2.5 Moto su traiettoria rettilinea. Diagramma orario. Velocità scalare

Nel numero precedente abbiamo introdotto la nozione di *equazione oraria* per un punto materiale vincolato a muoversi su una curva. Precisamente:

$$s = s(t), \tag{2.4}$$

dove s è l'ascissa curvilinea del punto. Nel caso particolare di una traiettoria rettilinea, dopo aver istituito un sistema di ascisse, la (2.4) si riscrive

$$x = x(t), \tag{2.5}$$

che esprime l'ascissa x in funzione del tempo. Per quanto riguarda l'insieme di definizione della funzione $x(t)$, solitamente si assume l'intervallo $[0, +\infty)$. Ciò vuol dire che si prende $t_0 = 0$ come *istante iniziale* del moto. Naturalmente, si tratta di una convenzione per cui si può assumere un t_0 qualunque.

Supponiamo di conoscere l'espressione analitica della funzione $x(t)$. Con i metodi dell'Analisi (studio della funzione) siamo in grado di tracciarne il diaagramma cartesiano comunemente noto come *grafico della funzione*.

Definizione 31 *Chiamiamo* **diagramma orario** *il diagramma cartesiano della funzione $x(t)$ che esprime l'equazione oraria del moto per un punto materiale che si muove su un retta in cui è istituito un sistema di ascisse (sistema di riferimento $K(Ox)$)*

Presi ad arbitrio due istanti di tempo $t_1 \geq t_0$ e $t_2 > t_1$, possiamo considerare l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$; la medesima locuzione può essere utilizzata per denotare nel senso dell'Analisi il seguente insieme:

$$\{t \in \mathbb{R} \mid t_1 \leq t \leq t_2\} \equiv [t_1, t_2]$$

In alcuni casi si escludono gli estremi, considerando un intervallo *aperto*:

$$(t_1, t_2) = \{t \in \mathbb{R} \mid t_1 \leq t \leq t_2\}$$

Segue

$$x_1 = x(t_1), \quad x_2 = x(t_2)$$

cioè le ascisse del punto materiale nei predetti istanti. Consideriamo quindi il rapporto

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{2.6}$$

Nel piano cartesiano in cui è tracciato il diagramma orario Γ (fig. 2.3), il numero reale (2.6) altro non è che il coefficiente angolare della retta secante a Γ per i punti (t_1, x_1), (t_2, x_2).

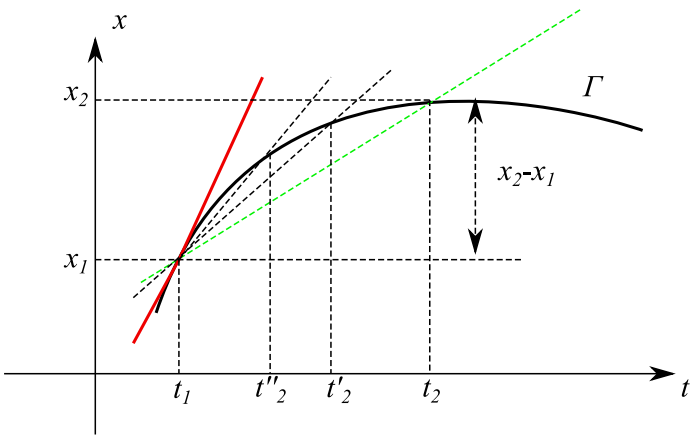


Figura 2.3: Diagramma orario di un punto materiale vincolato a muoversi sull'asse x.

D'altra parte, come è ben noto dall'Analisi, la grandezza (2.6) è il rapporto incrementale della funzione $x(t)$. Precisamente, poniamo

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1) \\ \Delta t &= t_2 - t_1, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.7}$$

Fisicamente, tale rapporto misura la rapidità con cui il punto materiale percorre la distanza Δx nell'intervallo di tempo Δt.

Definizione 32 *Chiamiamo* **velocità scalare media** *il rapporto incrementale*

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \tag{2.8}$$

Se manteniamo costante l'istante t_1 e riduciamo progressivamente l'istante t_2, vediamo dalla fig. 2.3 che la retta secante a Γ per i punti (t_1, x_1), (t_2, x_2) ruota attorno al punto (t_1, x_1). Al limite, per $t_2 \to t_1$, tale secante tende alla retta tangente a Γ in (t_1, x_1). Dall'Analisi

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d}{dt} x(t) \bigg|_{t=t_1}, \tag{2.9}$$

cioè la derivata della funzione $x(t)$ in t_1. Per un qualunque $t \in [0, +\infty)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} x(t) \tag{2.10}$$

È consuetudine utilizzare la notazione puntata:

$$\dot{x} \stackrel{def}{=} \frac{dx}{dt} \tag{2.11}$$

Definizione 33 *La grandezza $\dot{x}$ si dice* **velocità scalare istantanea** *o semplicemente* **velocità scalare**.

Ci siamo riferiti a quantità scalari; in realtà la velocità è una grandezza vettoriale, anche se nel caso di moto su una retta non appare evidente giacché la direzione è costante. Il moto può comunque avere degli *istanti di inversione*, per cui è necessario riferirsi a vettori. Nello specifico, la **velocità vettoriale** (istantanea) è il vettore

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\dot{x}$$

essendo $\mathbf{i}$ il versore dell'asse x.

2.5.1 Moto rettilineo uniforme

Nel caso particolare di un'equazione oraria lineare:

$$x(t) = vt + x_0 \tag{2.12}$$

con v e x_0 costanti assegnate, si ha:

$$\dot{x} = v, \tag{2.13}$$

cioè la velocità scalare istantanea è costante. In termini di rapporto incrementale, risulta evidente:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v, \quad \forall t, \Delta t$$

In altri termini, la velocità scalare istantanea coincide con la velocità scalare, e il moto si dice **rettilineo uniforme**. Ed è questo l'unico caso in cui la velocità istantanea e la velocità media sono identicamente coincidenti. Il diagramma orario è manfestamente la retta del piano cartesiano tx di coefficiente angolare v e ordinata all'origine x_0, ove quest'ultimo parametro è la coordinata iniziale del punto materiale. In fig. 2.4 è riportato il diagramma orario di un punto materiale che si muove sull'asse x nel verso delle x crescenti, mentre in fig. 2.5 il moto avviene nel verso delle x decrescenti. Ne consegue che nel primo caso la velocità vettoriale è

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v \tag{2.14}$$

mentre nel secondo

$$\mathbf{v} = -\mathbf{i}v \tag{2.15}$$

In entrambi i casi si tratta di un vettore costante.

2.5.2 Complementi

Per comprendere il concetto di velocità scalare media, è preferibile richiamare alcuni teoremi di Analisi.

Teorema 34 *(**Teorema di Lagrange**)*

Ipotesi: *f è una funzione reale continua in $[a, b]$ e derivabile nei punti interni di tale intervallo, i.e. nell'aperto (a, b).*

Tesi:

$$\exists \xi \in (a, b) \mid \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{2.16}$$

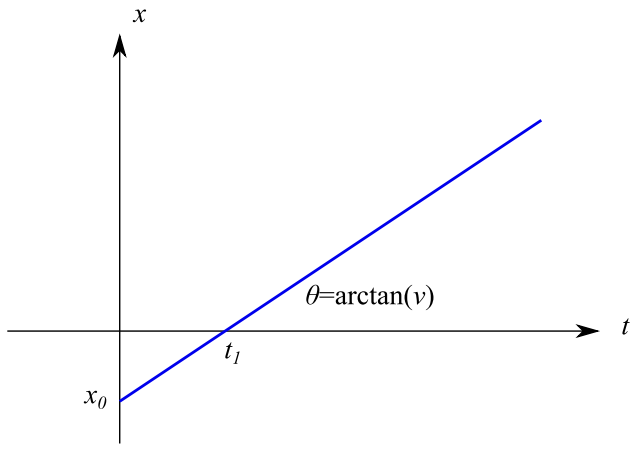


Figura 2.4: Diagramma orario del moto di un punto materiale che si muove lungo l'asse x. Il moto è rettilineo uniforme con velocità v (coefficiente angolare della retta). Il verso è quello delle x crescenti. All'istante iniziale $t_0 = 0$ il punto occupa la posizione iniziale di ascissa $x_0 < 0$, mentre nell'istante $t_1 = -\frac{x_0}{v}$ transita per l'origine , proseguendo verso $+\infty$.

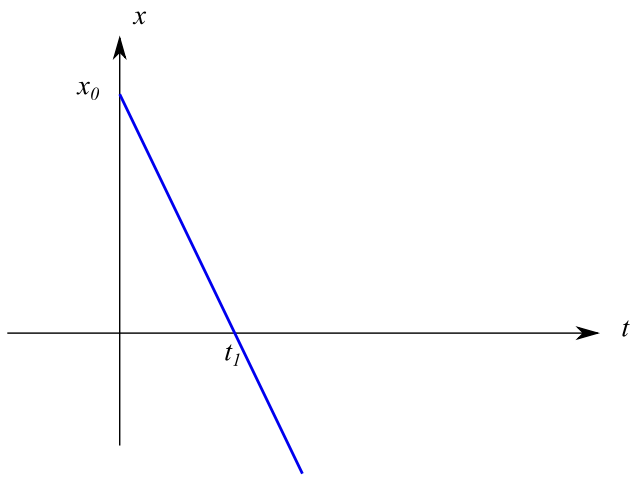


Figura 2.5: Diagramma orario del moto di un punto materiale che si muove lungo l'asse x. Il moto è rettilineo uniforme con velocità v. Il verso è quello delle x decrescenti. All'istante iniziale $t_0 = 0$ il punto occupa la posizione iniziale di ascissa $x_0 > 0$, mentre nell'istante $t_1 = \frac{x_0}{v}$ transita per l'origine, proseguendo verso $-\infty$.

Teorema 35 *(**Teorema della media**)*
***Ipotesi**: f è una funzione continua in $[a,b]$.*
***Tesi**:*

$$\exists \xi \in [a,b] \mid f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2.17}$$

Il secondo membro della (2.17) è la cosiddetta **media integrale** della funzione f. Tale denominazione è suggerita dall'operazione di passaggio al limite nella definizione di integrale definito, in corrispondenza di una somma di Riemann costruita su una decomposizione di ampiezza costante. Più precisamente, consideriamo la decomposizione

$$\mathcal{D}([a,b]) : \begin{cases} [a,b] = \bigcup_{k=0}^{N-1} [x_k, x_{k+1}] \\ [x_k, x_{k+1}] \cap [x_{k'}, x_{k'+1}] = \emptyset, \ \forall\, k \neq k' \end{cases},$$

di ampiezza costante, per cui

$$x_k = a + k\Delta_N, \qquad (k = 0, 1, ..., N),$$

essendo $\Delta_N = \frac{b-a}{N}$ l'ampiezza. Per un assegnato $N \in \mathbb{N} - \{0\}$, la somma di Riemann si scrive:

$$\sigma_N = \sum_{k=0}^{N} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = (b-a)\sum_{k=0}^{N} \frac{f(x_{k+1})}{N}$$

Cioè

$$\sigma_N = (b-a)\,\mu_N, \tag{2.18}$$

dove

$$\mu_N \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{f(x_{k+1})}{N},$$

per cui il numero reale μ_N è la media artimetica dei valori assunti da f su N punti equidistanti di $[a,b]$. Al variare di N, abbiamo la successione di elementi di $\mathbb{R}$:

$$\{\mu_N\}_{N\in\mathbb{N}-\{0\}} : \mu_1, \mu_2, ..., \mu_N, ... \tag{2.19}$$

Per definizione di integrale definito, tenendo conto della (2.18):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \sigma_N = (b-a)\lim_{N\to+\infty} \mu_N$$

Dal momento che per ipotesi la funzione f è continua in $[a,b]$, si ha:

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \in \mathbb{R},$$

cosicché

$$\lim_{N\to+\infty} \mu_N = \mu \in \mathbb{R}$$

Cioè la successione (2.19) converge. Il predetto limite μ si chiama *media integrale di f* perché è la media artimetica dei valori assunti da f su N punti equidistanti per $N \to +\infty$.

Mostriamo ora che il teorema della media è un corollario del teorema di Lagrange, a patto che $f \in C^1([a,b])$ i.e. continua in $[a,b]$ e dotata di derivata ivi continua. Riscriviamo la (2.16):

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{2.20}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx,$$

che sostituita a primo membro della (2.20) restituisce

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f'(x)\, dx = f'(\xi),$$

cioè il teorema della media applicato alla funzione $f'(x)$.

Sussiste anche il viceversa: il teorema di Lagrange è un corollario del teorema della media: comunque prendiamo una funzione continua in $[a,b]$, per il teorema della media

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \tag{2.21}$$

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Sostituendo nella (2.21):

$$F'(\xi) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}, \tag{2.22}$$

che esprime il teorema di Lagrange applicato alla funzione $F(x)$.

***

Nel numero precedente abbiamo visto che la velocità media coincide con la velocità istantanea se e solo se il moto è rettilineo uniforme. In caso di moto rettilineo, ci aspettiamo comunque l'esistenza di almeno un istante di tempo in cui tali velocità sono uguali. Ciò è una conseguenza del teorema di lagrange, come possiamo vedere da questo suggestivo esercizio.

2.5.3 Accelerazione nel moto rettilineo. Moto rettilineo vario e moto uniformememente accelerato

Nel caso di moto rettilineo con equazione oraria $x = x(t)$ non lineare, la velocità vettoriale è una funzione vettoriale del tempo:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{i}v(t), \quad \text{con } v(t) = \dot{x}(t) \tag{2.23}$$

Definizione 36 *L'**accelerazione vettoriale** di un punto materiale che compie un moto rettilineo è*

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{2.24}$$

cioè il vettore $\mathbf{a}$ *è il derivato del vettore velocità* $\mathbf{v}$.

Introducendo il vettore posizione $r(t) = ix(t)$ si ha manifestamente

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \tag{2.25}$$

e quindi

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\ddot{x} \tag{2.26}$$

Definizione 37 *Se il vettore accelerazione è costante, il moto si dice* **uniformemente accelerato**

Siccome i vari vettori conservano la direzione (ma non il verso, a meno che il moto nonsia uniforme), possiamo focalizzare la nostra attenzione unicamente alle grandezze scalari $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$ in modo da poter applicare note proprietà studiate in Analisi e in particolare, nelle applicazioni del calcolo differenziale.

Esempio 38 *Consideriamo la seguente equazione oraria:*

$$x(t) = \begin{cases} A\sin^2\omega t, & se\ 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega} \\ 0,\ se\ t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases}, \tag{2.27}$$

dove $A, \omega > 0$ sono due costanti, la prima con le dimensioni di una lunghezza, la seconda con le dimensioni dell'inverso di un tempo. Vediamo innanzitutto che il punto materiale parte da $x = 0$, per poi ritornare in tale punto nell'istante $t = \frac{\pi}{\omega}$. La velocità scalare è

$$v(t) = \dot{x}(t) = \begin{cases} A\omega\sin 2\omega t, & se\ 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega} \\ 0,\ se\ t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \tag{2.28}$$

Ne consegue che il punto materiale parte da fermo, giacché $v(0) = 0$. Inoltre $v(t_1) = 0$ avendo definito $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$.

Esempio 39 *L'accelerazione è*

$$a(t) = v(t) = \begin{cases} 2A\omega^2\cos 2\omega t, & se\ 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega} \\ 0,\ se\ t > \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \tag{2.29}$$

Dobbiamo ora eseguire uno studio di funzione. Vediamo che un punto estremale per la funzione $x(t)$ è tale che

$$\dot{x}(t) = 0 \Longleftrightarrow \sin 2\omega t = 0$$

Siccome siamo interessati esclusivamente all'intervallo di tempo $\left[0, \frac{\pi}{\omega}\right]$, si ha un solo punto estremale

$$t_M = \frac{\pi}{\omega} \tag{2.30}$$

in cui riconosciamo un punto di massimo relativo, infatti:

$$a(t_M) < 0 \tag{2.31}$$

Ne segue che l'ascissa del punto materiale è strettamente crescente in $[0, t_M]$ e strettamente decrescente in $[t_M, t_1]$. Per esaminare l'esistenza di punti di flesso del diagramma orario risolviamo l'equazione

$$a(t) = 0,$$

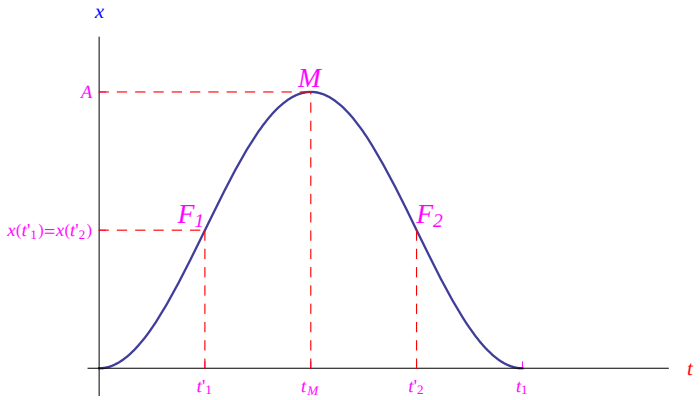


Figura 2.6: Diagramma orario del moto di equazione oraria (2.27).

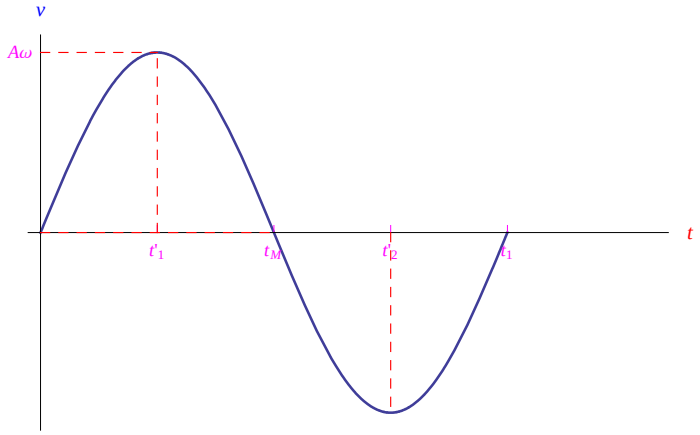


Figura 2.7: Velocità del punto materiale (Esempio 39).

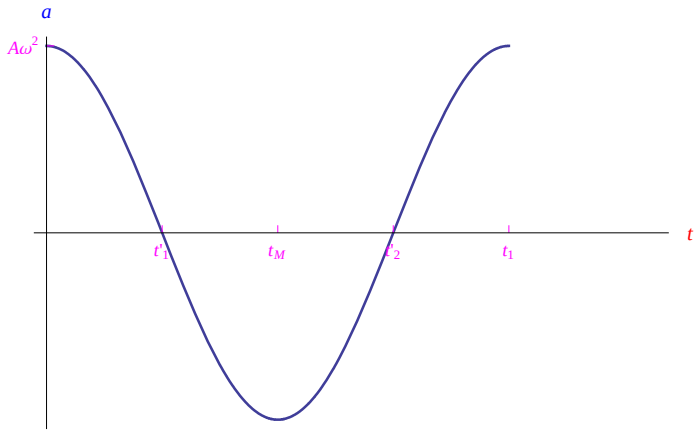


Figura 2.8: Accelerazione del punto materiale (Esempio 39).

riferendoci alla restrizione all'intervallo $[0, t_1]$. *Facilmente si trovano due flessi simmetrici:*

$$F_1\left(\frac{\pi}{4\omega}, \frac{A}{2}\right), \; F_2\left(\frac{3\pi}{4\omega}, \frac{A}{2}\right),$$

come vediamo dalla fig. 2.6. Nelle figg. 2.7-2.7 riportiamo i grafici delle funzioni $v(t)$ *e* $a(t)$ *rispettivamente.*

Per maggiori approfondimenti delle applicazioni del calcolo differenziale alla cinematica, si rimanda a questa dispensa

2.6 Moto piano

2.6.1 Moto piano in coordinate cartesiane

In cinematica per *moto piano* si intende il moto di un punto materiale la cui traiettoria è una curva piana. Per lo studio di tale moto è naturale assumere una coppia di assi cartesiani (Oxy) che istituiscono un sistema di riferimento nel piano contenente la traiettoria. Ne consegue che il vettore posizione del punto materiale è la seguente funzione vettoriale della variabile reale t (che misura il tempo):

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \tag{2.32}$$

Tale funzione definisce una rappresentazione parametrica della traiettoria γ:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{2.33}$$

ovvero i *moti componenti* lungo gli assi coordinati.

Definizione 40 *La* **velocità vettoriale media** *nell'intervallo di tempo* Δt *è il rapporto incrementale della funzione (2.32)*

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.34}$$

Per esplicitare il significato fisico oltre che geometrio, di questa nuova grandezza, immaginiamo di fissare un istante t_1, per cui

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\Delta t}, \tag{2.35}$$

avendo posto $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2)$, con $t_2 = t_1 + \Delta t$. Tutti questi vettori sono graficati in fig. 2.9, dacui vediamo che il vettore (2.35) è parallelo e concorde al vettore $\Delta \mathbf{r}$.

Per un assegnato istante t_1, $\mathbf{v}_m$ è una funzione vettoriale dell'incremento Δt, per cui scriviamo

$$\mathbf{v}_m(\Delta t) = \frac{\mathbf{r}(t_1 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_1)}{\Delta t} \tag{2.36}$$

Supponiamo che tale funzione sia regolare per $\Delta t \to 0$, i.e.

$$\exists \left(\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m(\Delta t)\right) \in \mathbb{R}^3$$

Poniamo allora

$$\mathbf{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{v}_m(\Delta t) \tag{2.37}$$

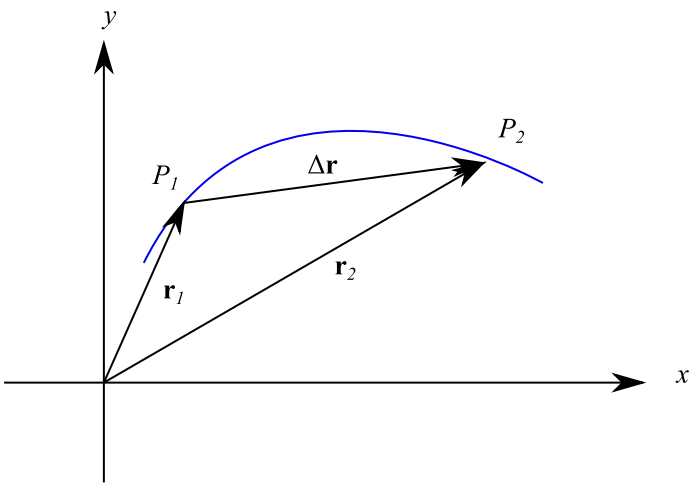


Figura 2.9: Deteminazione della velocità media di un punto materiale che compie un moto piano.

Definizione 41 *Il vettore* $\mathbf{v}(t_1)$ *si dice* **velocità vettoriale** *nell'istante* t_1

È chiaro che tale vettore altro non è che il valore assunto in t_1 dalla seguente funzione vettoriale

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{2.38}$$

ovvero dal derivato del vettore posizione:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \tag{2.39}$$

che nella usuale notazione puntata si riscrive:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \tag{2.40}$$

Definizione 42 *La funzione vettoriale (2.39) si dice* **velocità vettoriale istantanea** *o semplicemente* **velocità vettoriale** .

Dimostriamo che il vettore $\mathbf{v}(t)$ è tangente alla traiettoria γ nel punto $P(t)$ che si identifica con la posizione del punto materiale all'istante t. A tale scopo introduciamo su γ un sistema di ascisse curvilinee, per cui abbiamo un'equazione oraria

$$s = s(t), \quad \forall t \in [t_0, t_M], \quad t_M \leq +\infty \tag{2.41}$$

dove t_0 è un istante iniziale assegnato. Per la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \tag{2.42}$$

ricordando che $\dot{s}$ è la velocità scalare (istantanea). Inoltre

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{2.43}$$

che è un versore. Verifichiamo.

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

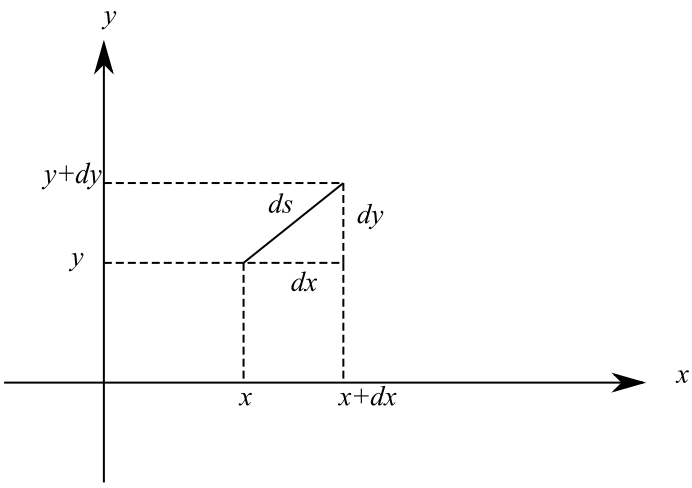


Figura 2.10: L'elemento d'arco su γ è espresso dal differenziale ds della funzione $s(t)$.

Ma

$$ds = \dot{s}dt = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

che si giustifica guardando la fig. 2.10.

Intuitivamente, vediamo che il triangolino individuato dall'elemento d'arco ds e dalle linee coordinate passante per i suoi punti è rettangolo, per cui

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Ne consegue

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

che è appunto quello che volevamo dimostrare. Adesso dobbiamo vedere come è disposto il versore $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Applichiamo la definizione di derivata

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s + \Delta s) - \mathbf{r}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$$

D'altra parte

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{i}\Delta x + \mathbf{j}\Delta y \tag{2.44}$$

essendo Δx e Δy gli incrementi delle funzioni $x(s), y(s)$

$$\Delta x = x(s + \Delta s) - x(s), \quad \Delta y = y(s + \Delta s) - y(s)$$

Il vettore (2.44) è disposto come in fig. 2.11.

Il rapporto incrementale della funzione vettoriale $\mathbf{r}(s)$ si esprime facilmente attraverso i rapporti incrementali delle funzioni $x(s), y(s)$:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{i}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \mathbf{j}\frac{\Delta y}{\Delta s} \tag{2.45}$$

Per $\Delta s \to 0$ tale vettore ruota attorno al punto $P(s)$ fino a sovrapporsi al vettore tangente a γ in $P(s)$ (fig. 2.11). Abbiamo così dimostrato che $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ è un versore tangente alla traiettoria. Scriviamo

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{2.46}$$

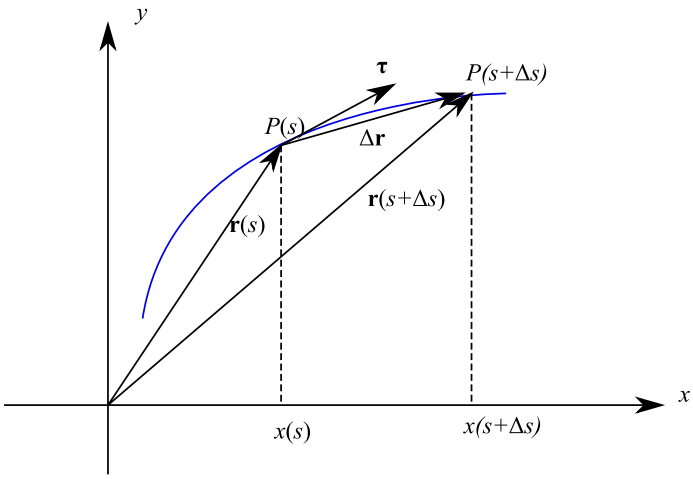


Figura 2.11: Le varie grandezze ($\mathbf{r}, x, y$, etc.) sono espresse in funzione di s.

Dalla (2.42), dopo aver tenuto conto della (2.40), otteniamo

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$

da cui vediamo che la velocità vettoriale è tangente istante per istante, alla traiettoria del punto materiale. Calcoliamo il modulo di tale velocità

$$|\mathbf{v}| = |\dot{s}| \tag{2.47}$$

Ne consegue che mentre la velocità scalare è $\dot{s}$ (quindi può essere < 0), il modulo della velocità vettoriale è il valore assoluto della velocità scalare. Tale risultato è consistente, giacché il modulo di un vettore è una grandezza non negativa. Nello specifico, il modulo della velocità vettoriale coincide con la velocità scalare se e solo se $\dot{s} \geq 0$ cioè se $s(t)$ è una funzione monotòna, e si dice che il moto è *progressivo*. Nel caso contrario, riesce $|\mathbf{v}| = -\dot{s}$ e il moto si dice *regressivo* (o *retrogrado*).

In un assegnato intervallo di tempo $[t_1, t_2]$, la velocità vettoriale media è il rapporto incrementale della funzione vettoriale $\mathbf{r}(t)$ relativo all'incremento $\Delta t = t_2 - t_1$ della variabile indipendente:

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{2.48}$$

La velocità scalare media è invece, il rapporto incrementale della funzione $s(t)$ relativo all'incremento $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.49}$$

Ne consegue

$$|\mathbf{v}_m| \neq \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$$

Cioè il modulo della velocità vettoriale media non è la velocità scalare media (a differenza di ciò che succede per la velocità istantanea, per quanto stabilito in precedenza). Nel caso speciale di un punto materiale che percorre una curva chiusa di lunghezza l, con partenza da fermo e fermandosi al termine del percorso, la velocità vettoriale è nulla (e quindi, anche il suo modulo), mentre la velocità scalare media è $l/\Delta t$, dove Δt è il tempo impiegato a percorrere l'intero tragitto.

Esercizio 43 *(Quesito tratto da [1]. La soluzione è nostra).*

Un'auto da corsa, in un doppio giro di qualificazione, copre il primo giro con una velocità scalare media di $90\,\mathrm{km}/\mathrm{h}$. *Il pilota vorrebbe correre il secondo giro molto più velocemente in modo che la velocità media sui due giri diventasse di* $180\,\mathrm{km}/\mathrm{h}$. *Dimostrare che ciò non è possibile.*

Soluzione

Sia l la lunghezza dell'intero percorso. Se Δt è il tempo impiegaro per coprire la distanza l, la velocità scalare media è

$$\frac{l}{\Delta t} \equiv v_0 = 90\,\mathrm{km}/\mathrm{h} \tag{2.50}$$

Segue

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ giro: } & \frac{l}{\Delta t} = v_0 \\ 2^\circ \text{ giro: } & \frac{l}{\Delta t'} > v_0 \Longrightarrow \Delta t' < \Delta t \end{aligned} \tag{2.51}$$

Il tempo impiegato per compiere due giri è $\Delta t + \Delta t'$, per cui la velocità scalare media su due giri è

$$\frac{2l}{\Delta t + \Delta t'} \tag{2.52}$$

La richiesta del pilota è

$$\frac{2l}{\Delta t + \Delta t'} = 2v_0$$

ovvero

$$\frac{2l}{\Delta t + \Delta t'} = \frac{2l}{\Delta t} \Longleftrightarrow \Delta t' = 0,$$

che è un risultato manifestamente impossibile.

Passiamo ora all'accelerazione (vettoriale). Evidentemente

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{2.53}$$

per cui abbiamo la seguente rappresentazione cartesiana dell'accelerazione in un moto piano:

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \tag{2.54}$$

Il vettore accelerazione esibisce comunque, un'altra decomposizione notevole. Deriviamo

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\tau}) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

Il primo termine a secondo membro è un vettore tangente alla traiettoria e di modulo $|\ddot{s}|$, per cui poniamo

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} \tag{2.55}$$

Definizione 44 *La grandezza (2.55) è l'***accelerazione tangenziale**.

Per esplicitare il secondo termine, scriviamo

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

Rammentiamoc he $\boldsymbol{\tau}(s)$ è il versore tangente alla traeittoria γ nel punto $P(s)$. Perciò la derivata di tale funzione vettoriale ci dà un'informazione sulla *curvatura* di γ. Infatti, se γ è un segmento di retta si ha manifestamente

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathbf{0} \tag{2.56}$$

Inoltre, dobbiamo tener presente la proprietà secondo cui il derivato di un vettore di modulo costante è perpendicolare al vettore medesimo (§ 1.8.2). Quindi $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \perp \boldsymbol{\tau} \Longrightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ è orientato lungo la normale a γ. Attraverso argomentazioni di geometria differenziale, si dimostra che tale vettore è orientato verso il centro di curvatura di γ, mentre il suo modulo fornisce la *curvatura* di γ ovvero il reciproco del raggio di curvatura R :

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| \underset{\boldsymbol{\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}}{=} \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| \tag{2.57}$$

Si noti che se è verificata la (2.56), si ha $R \to +\infty$, giacché tale è il raggio di curvatura di un segmento di retta. Si dimostra ([2])

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3} = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}}{v^3}$$

per cui

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3} \tag{2.58}$$

Esplicitando il prodotto vettoriale

$$\frac{1}{R} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{2.59}$$

Ora siamo in grado di esplicitare il termine $\dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$. Denotando con $\mathbf{n}$ il versore della normale a γ orientata verso il centro di curvatura, si ha:

$$\dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{s}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dot{s}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dot{s}^2\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|\mathbf{n}$$

Cioè

$$\mathbf{a}_n \overset{def}{=} \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n} \tag{2.60}$$

Definizione 45 *La grandezza (2.60) è l'***accelerazione normale**.

Conclusione: in un qualunque moto piano, l'accelerazione vettoriale ammette la seguente decomposizione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad (\mathbf{a}_t = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}) \tag{2.61}$$

graficata in fig. 2.12.

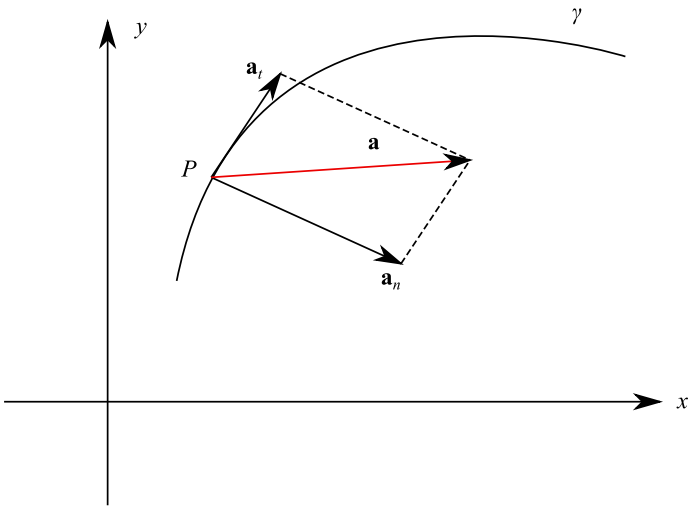


Figura 2.12: Decomposizione del vettore accelerazione nelle componenti tangenziale e normale rispettivamente.

2.6.2 Complementi

Schema di calcolo per problemi tipici

Problema 1

Assegnato un moto piano attraverso i moti componenti lungo gli assi coordinati:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \geq t_0,$$

determinare l'equazione oraria $s = s(t)$, avendo istituito un sistema di ascisse curvilinee sulla traiettoria γ, con $s(t_0) = 0$ (cioè con origine nel punto iniziale del moto).

Soluzione

Per quanto precede, la velocità vettoriale è

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau},$$

essendo τ il versore tangente alla traiettoria. Il modulo della velocità è

$$|\mathbf{v}| = |\dot{s}|$$

Cioè

$$\dot{s} = \pm|\mathbf{v}| = \begin{cases} +|\mathbf{v}|, & \text{se il moto è progressivo} \\ -|\mathbf{v}|, & \text{se il moto è regressivo} \end{cases}$$

Ma

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \Longrightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}}$$

essendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Perciò

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{2.62}$$

Integrando:

$$s(t) = \pm\int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2}dt', \tag{2.63}$$

che risolve il problema posto. Vediamo subito che la difficoltà risiede nel calcolo dell'integrale a secondo membro dell'equazione appena scritta, come possiamo appurare dall'esempio seguente:

$$x = bt, \quad y = ct^2, \qquad t \geq 0 \tag{2.64}$$

Qui è $b, c > 0$ con le giuste dimensioni. Il vettore posizione è

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}bt + \mathbf{j}ct^2$$

Quindi la velocità vettoriale

$$\mathbf{v}(t) = b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j} \tag{2.65}$$

Eliminando il parametro t tra le (2.64), si perviene all'equazione cartesiana della traiettoria:

$$y = \frac{c}{b^2}x^2$$

Osservando che deve essere $t \geq 0$, si ha $x \geq 0$. Ne consegue che la traiettoria del punto materiale è l'arco di parabola $y = \frac{c}{b^2}x^2$ contenuto nel sempiano $x \geq 0$, come illustrato in fig. 2.13.

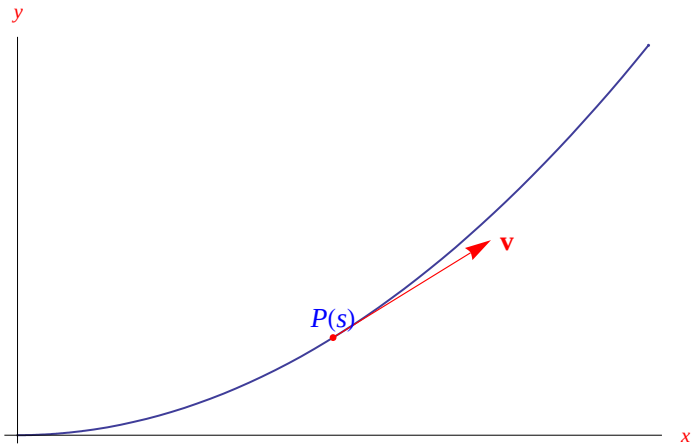


Figura 2.13: Moto di un punto sulla traiettoria di rappresentazione parametrica (2.64).

Nell'istante $t = 0$ il punto materiale occupa l'origine del riferimento cartesiano (fig. 2.13). Dalla (2.65)

$$\mathbf{v}(0) = b\mathbf{i}$$

Cioè il punto parte con velocità orientata lungo l'asse x, osservando poi che conserva tale valore (pertanto il moto componente nella direzione dell'asse x è uniforme). A questo punto fissiamo sulla traiettoria γ un sistema di ascisse curvilinee con verso positiva di γ coincidente con il verso delle t crescenti (quindi delle x crescenti), e con origine in $(0, 0)$. Ciò implica che il moto è progressivo, ovvero $s(t)$ è monotonamente crescente. Abbiamo dunque

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2}dt' = \int_0^t \sqrt{b^2 + 4c^2t'^2}dt'$$

Calcoliamo a parte l'integrale indefinito

$$I(t) = \int \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}dt,$$

eseguendo la sostituzione $2ct = b\sinh\xi$, per cui

$$I(\xi) = \frac{b^2}{2c}\int\sqrt{1+\sinh^2\xi}d\xi \underset{\cosh^2\xi-\sinh^2\xi=1}{=} \frac{b^2}{2c}\int\cosh^2\xi d\xi$$

Da una integrazione per parti

$$I(\xi) = \frac{b^2}{4c}(\sinh\xi\cosh\xi+\xi)+C,$$

essendo C una costante di integrazione. Ripristinando la variabile t e calcolando l'integrale definito, si perviene

$$s(t) = \frac{t}{2}\sqrt{b^2+4c^2t^2}+\frac{b^2}{4c}\operatorname{arcsin h}\left(\frac{2c}{b}t\right) \tag{2.66}$$

Problema 2

Assegnate le equazioni orarie dei moti componenti (secondo gli assi coordinati):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \geq t_0 \tag{2.67}$$

scrivere la rappresentazione cartesiana dell'accelerazione tangenziale e dell'accelerazione normale.

Soluzione

Anche qui dobbiamo cercare di ottenere qualche informazione sull'ascissa curvilinea a partire dal vettore posizione

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}$$

Precisamente sulla derivata prima e seconda $\dot{s}, \ddot{s}$, giacché

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}$$

rammentando che $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{n}$ sono rispettivamente i versori della retta tangente e della retta normale alla traiettoria γ. In particolare, la normale è orientata verso il centro di curvatura di γ. Il calcolo di $\dot{s}$ è immediato:

$$\dot{s} = \begin{cases} +\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, & \text{moto progressivo} \\ -\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}, & \text{moto regressivo} \end{cases},$$

da cui derivando otteniamo $\ddot{s}$. Anche il calcolo di τ è immediato:

$$\tau = \frac{\mathbf{v}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{s}}$$

Ne consegue che l'accelerazione tangenziale si calcola facilmente. Diverso è il caso dell'accelerazione normale. Ricordiamo innanzitutto che R è il raggio di curvatura della traiettoria:

$$\frac{1}{R} = \frac{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3},$$

il cui calcolo è più o meno immediato. Il problema consiste nel determinare $\mathbf{n}$. Ovviamente

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$$

Ma ciò non basta perché in tal modo abbiamo un'indeterminazione sul verso nel senso che risultano due orientazioni possibili (opposte). Il versore $\mathbf{n}$ è orientato, per quanto detto prima, verso il centro di curvatura ossia nel verso in cui la curva volge la concavità. Ed è chiaro che ciò va stabilito caso per caso. In realtà, possiamo determinare la componente normale dell'accelerazione a partire dalla rappresentazione cartesiana del vettore accelerazione $\mathbf{a}$ e di $\mathbf{a}_t$. A tale scopo, riprendiamo l'esempio precedente. Qui era

$$\mathbf{r} = bt\mathbf{i} + ct^2\mathbf{j}$$

per cui velocità e accelerazione sono

$$\mathbf{v} = b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = 2c\mathbf{j} \tag{2.68}$$

Segue

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & 2ct & 0 \\ 0 & 2c & 0 \end{vmatrix} = 2bc\mathbf{k}$$

ovvero

$$|v| = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{2bc}{\sqrt{(b^2 + 4c^2t^2)^3}}$$

La velocità scalare

$$\dot{s} = +\,|v| = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2} \tag{2.69}$$

Derivando

$$\ddot{s} = \frac{4c^2t}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}} \tag{2.70}$$

Il versore tangente

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\dot{s}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}\,(b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j})$$

Quindi l'accelerazione tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \frac{4c^2t}{b^2 + 4c^2t^2}\,(b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j}) \tag{2.71}$$

Per determinare $\mathbf{a}_n$ anziché trovare la rappresentazione cartesiana scriviamo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \Longrightarrow \mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t$$

Dove l'accelerazione $\mathbf{a}$ è data dalla seconda delle (2.68). Dopo qualche calcolo di algebra vettoriale, si ha

$$\mathbf{a}_n = \frac{2bc}{b^2 + 4c^2t^2}\,(-2ct\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \tag{2.72}$$

Per curiosità, calcoliamo i moduli

$$a_t = \frac{4c^2t}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}, \quad a_n = \frac{2bc}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}, \quad a = 2c$$

notando che a $t = 0$ l'accelerazione è puramente normale, mentre a $t > 0$ si dispone come in fig. 2.14.

File scaricato da http://www.extrabyte.info

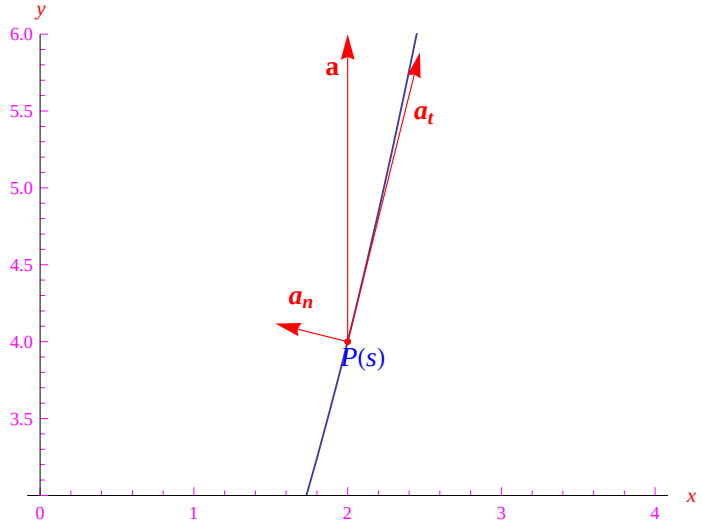


Figura 2.14: Accelerazione del moto su traiettoria di rappresentazione parametrica $\mathbf{r}(t) = bt\mathbf{i} + ct^2\mathbf{j}$.

Problema 3

Determinare l'accelerazione di un punto materiale vincolato a muoversi lungo una curva $y = f(x)$, con equazione oraria $s = s(t)$, dove s denota l'ascissa curvilinea sulla predetta curva.

Soluzione

Per risolvere questo problema è necessaria una premessa. Nei problemi precedenti viene assegnata una rappresentazione parametrica della traiettoria γ data da $x = x(t)\,,\ y = y(t)$ il cui parametro è il tempo t. Tale rappresentazione contiene "informazioni" sull'equazione oraria $s = s(t)$ giacché

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Longrightarrow s(t) = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2}dt'$$

Nel caso in esame, invece, la traiettoria è data in forma cartesiana: nello specifico, è il grafico di una funzione $f(x)$. Per inciso, tale funzione ha sempre la "giusta regolarità" in modo che il suo grafico sia una **curva regolare** nel senso della geometria differenziale. Un errore comune consiste nel porre $x = t$ (stiamo argomentando in unità adimensionali) in modo da ottenere una rappresentazione parametrica della traiettoria. Ma questa è solo una delle infinite rappresentazioni parametriche regolari della traiettoria medesima. Infatti, dalla geometria differenziale sappiamo che una curva regolare è una classe di equivalenza nell'insieme i cui elementi sono le rappresentazioni parametriche regolari di una curva assegnata (si passa da una rappresentazione all'altra, per sostituzione di parametro). Da un punto di vista fisico, significa che un'assegnata traiettoria γ può essere percorsa in infinite modalità distinte. Viceversa, se viene assegnata la legge oraria $s = s(t)$, esiste ed unico il moto su γ. In simboli

$$s = s(t) \not\Rightarrow x = t,\ y = y(t)$$

mentre

$$s = s(t) \Longrightarrow x = x(t)\,,\ y = y(t)$$

con $x(t)$ e $y(t)$ funzioni ignote. Nota la funzione $s(t)$, possiamo calcolare la derivata prima $\dot{s}$ e la derivata seconda $\ddot{s}$, e quindi i modulo delle accelerazioni tangenziale e normale:

$$a_t = |\ddot{s}|\,, \quad a_n = \frac{\dot{s}}{R},$$

ove – ricordiamolo – R è il raggio di curvatura di γ. Dalla geometria differenziale, sappiamo che quando la curva è data in forma cartesiana $y = f(x)$, tale grandezza si calcola attraverso

$$\frac{1}{R} = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{\left[1 + f'(x)^2\right]^3}} \tag{2.73}$$

Possiamo così calcolare solo il modulo delle predette accelerazioni, e quindi il modulo dell'accelerazione vettoriale

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{2.74}$$

Per determinare le corrispondenti grandezze vettoriali, è necessario conoscere i versori $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{n}$ ossia i versori della tangente (orientata nel verso delle s crescenti) e della normale (orientata verso il centro di curvatura di γ). Vediamo come calcolare il versore tangente. Se $(x_0, y_0) \in \gamma$, l'equazione della retta tangente a γ in tale punto, è:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

D'altra parte dalla geometria analitica sappiamo che una coppia di numeri direttori di tale retta è:

$$\lambda = 1, \;\; \mu = f'(x_0)$$

Si ricordi che i numeri direttori sono le componenti cartesiane di un vettore parallelo alla retta. Ne consegue

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{i} + f'(x_0)\,\mathbf{j}$$

per cui il versore della tangente è

$$\tau_0 = \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|} = \frac{\mathbf{i} + f'(x_0)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} \tag{2.75}$$

Per un punto qualunque $(x, y) \in \gamma$

$$\tau = \frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{2.76}$$

Si noti che non possiamo determinare la funzione vettoriale $\boldsymbol{\tau}(t)$ che ci permetterebbe il calcolo della velocità vettoriale, giacché non conosciamo $x(t)$. L'unica cosa che possiamo fare è calcolare la predetta velocità in funzione dell'ascissa x

$$\mathbf{v} = \dot{s}\tau = \dot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{2.77}$$

E quindi l'accelerazione

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\right] \tag{2.78}$$

Segue (sempre in funzione di x)

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\tau = \ddot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}$$

Qui si apre il problema della determinazione del versore normale. Scriviamo

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j}$$

Deve essere

$$\mathbf{n}\cdot\tau = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$$

Cioè

$$\begin{cases} n_x + n_y f'(x) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 = 1 \end{cases} \tag{2.79}$$

Tale sistema nelle incognite n_x,n_y ammette due soluzioni. Quella giusta è tale che n è orientato verso il centro di curvatura i.e. nel verso in cui γ volge la concavità. A titolo di esempio, risolviamo un esercizio di [3], in cui un punto materiale percorre la curva $y = 4x^2$ con velocità scalare costante. Quindi

$$\dot{s} = \dot{s}_0 > 0 \text{ (costante)},$$

supponendo (senza perdita di generalità) che il moto sia progressivo sulla parabola assegnata. È chiaro che l'accelerazione tangenziale è nulla, per cui l'accelerazione è puramente normale. Un rapido calcolo porge

$$\frac{1}{R} = \frac{8}{\sqrt{(1 + 64x^2)^3}} \tag{2.80}$$

onde

$$a_n = \frac{8\dot{s}_0^2}{\sqrt{(1 + 64x^2)^3}} \tag{2.81}$$

Il versore tangente è

$$\tau = \frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} = \frac{\mathbf{i} + 8x\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 64x^2}} \tag{2.82}$$

Il sistema (2.79) è

$$\begin{cases} n_x + 8xn_y = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 = 1 \end{cases}, \tag{2.83}$$

che ammette le soluzioni

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{\sqrt{1 + 64x^2}}(-8x\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \mathbf{n}'' = \frac{1}{\sqrt{1 + 64x^2}}(8x\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

La soluzione accettabile è

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + 64x^2}}(-8x\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Ne concludiamo

$$\mathbf{a}_n = \frac{8\dot{s}_0^2}{\sqrt{1 + 64x^2}}(-8x\mathbf{i} + \mathbf{j}) \tag{2.84}$$

La traiettoria è riportata in fig. 2.15.

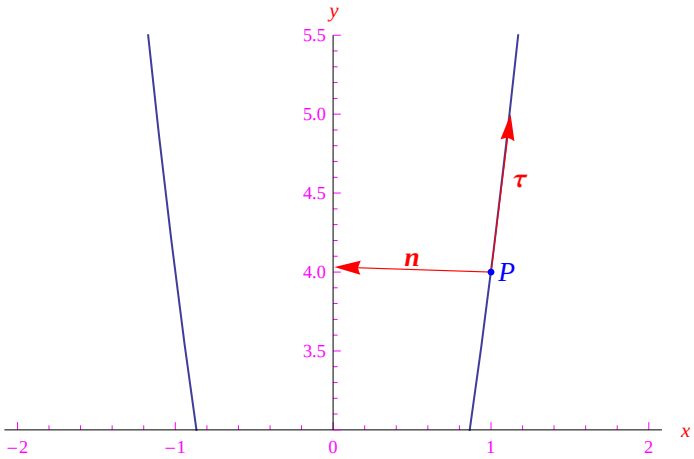


Figura 2.15: Esercizio sull'accelerazione di un punto materiale che si muove su $y = 4x^2$.

Navigatore inerziale bidimensionale

Nei problemi precedenti bisognava calcolare l'accelerazione a partire dalla traiettoria. Precisamente, assegnata la traiettoria in forma parametrica $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ o in forma cartesiana $y = f(x)$, determinare l'accelerazione tangenziale $\mathbf{a}_t$ e l'accelerazione normale $\mathbf{a}_n$. Possiamo provare ad invertire i dati: assegnata l'accelerazione, ricostruire la traiettoria. Tale inversione altro non è che un *navigatore inerziale* ovvero un sistema di navigazione che restituisce la posizione istantanea di un velivolo (terrestre, marittimo, aereo, spaziale) a partire dalla misura del modulo dell'accelerazione vettoriale. Nello specifico, stiamo considerando un sistema bidimensionale, nel senso che il moto è supposto piano. Istituendo un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxy)$ si ha per il modulo dell'accelerazione:

$$a(t) = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}, \tag{2.85}$$

essendo $x = x(t)$ e $y = y(t)$ le equazioni orarie (ignote) dei moti componenti lungo gli assi coordinati. Si noti che il modulo $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$ è noto attraverso misure esguite da un *accelerometro*. D'altra parte oltre alla rappresentazione cartesiana, il vettore accelerazione ammette la seguente decomposizione

$$\begin{gathered} \mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n} \end{gathered} \tag{2.86}$$

dove i singoli termini sono ben noti. I vettori $\mathbf{a}_t, \mathbf{a}_n$ sono ortogonali:

$$a(t) = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{R^2}} \tag{2.87}$$

Assumendo costante la velocità scalare

$$\dot{s} = \dot{s}_0$$

si ha un'accelerazione tangenziale nulla, per cui l'accelerazione risultante ha modulo:

$$a(t) = \frac{\dot{s}_0^2}{R(t)} \tag{2.88}$$

La conoscenza della funzione scalare $a(t)$ permette di determinare il raggio di curvatura della traiettoria in funzione del tempo o ciò che è lo stesso la curvatura in funzione di t (reciproco del raggio R)

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{a(t)}{\dot{s}_0^2} \tag{2.89}$$

Tuttavia questa grandezza è di scarso interesse, poiché la formula che conosciamo è

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{\left[1 + f'(x)^2\right]^3}}, \tag{2.90}$$

dove $f(x)$ è la funzione il cui grafico è la traiettoria che stiamo cercando. La (2.90) fornisce in funzione di x la curvatura della traiettoria, mentre la (2.89) restituisce la curvatura in funzione del tempo. È chiaro che per poter risalire a $R(x)$ a partire dalla $R(t)$ è necessario conoscere la legge oraria $x = x(t)$, che è proprio la grandezza ignota. Infatti, conoscendo $x(t)$, dalla

$$\dot{s}_0^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

possiamo determinare $\dot{y}^2$ in quanto $\dot{s}_0^2$ è una quantità nota. Eseguendo un'integrazione, determiniamo $y(t)$ e quindi, la traiettoria. Viceversa, operando nella rappresentazione cartesiana:

$$\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = a^2(t) \tag{2.91}$$

Tentiamo il seguente procedimento:

$$y = f(x) \Longrightarrow \dot{y} = f'(x)\,\dot{x}$$

Derivando nuovamente

$$\ddot{y} = f''(x)\,\dot{x}^2 + f'(x)\,\ddot{x},$$

che sostituita nella (2.91)

$$\ddot{x}^2 + \left[f''(x)\,\dot{x} + f'(x)\,\ddot{x}\right]^2 = a^2(t),$$

per cui si ripresenta il problema precedente, poiché non conosciamo la legge oraria $x(t)$. Ne concludiamo che la sola conoscenza del modulo dell'accelerazione (puramente normale) non permette di ricostruire la traiettoria. Ciò è possibile solo se conosciamo il vettore accelerazione in funzione del tempo:

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_x(t)\,\mathbf{j} \tag{2.92}$$

Segue

$$\begin{cases} \ddot{x} = a_x(t) \\ \ddot{y} = a_y(t) \end{cases},$$

che è un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine nelle $x(t), y(t)$ (si osservi che $a_x(t), a_y(t)$ sono restituite dall'accelerometro di bordo). Integrando il predetto sistema con una condizione iniziale del tipo (cioè dobbiamo conoscere posizione e velocità iniziale del velivolo):

$$x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,\ \dot{y}(t_0) = \dot{y},$$

si ottiene la seguente rappresentazione parametrica della traiettoria che possiamo denominare *rotta del velivolo*:

$$x = x(t),\ \ y = y(t) \tag{2.93}$$

Sintesi dei risultati

I problemi esaminati nel numero precedente si sintetizzano in tre singoli problemi (tenere presente la fig. 2.16).

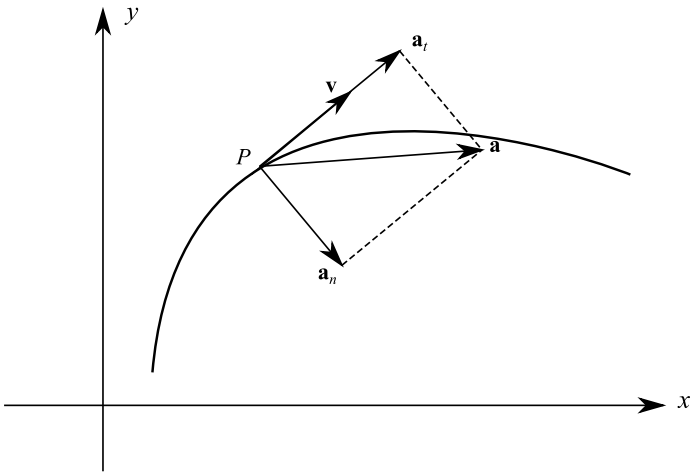


Figura 2.16: Sintesi dei problemi del moto piano in coordinate cartesiane.

Problema 1

È data la traiettoria γ in forma parametrica:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \tag{2.94}$$

dove t è il tempo.

Velocità vettoriale:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}} \tag{2.95}$$

Accelerazione vettoriale

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \ddot{\mathbf{r}} \tag{2.96}$$

Versore tangente

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\dot{s}}\mathbf{v} \tag{2.97}$$

dove

$$\dot{s} = \begin{cases} +|\mathbf{v}|\,, \text{ se il moto è progressivo} \\ -|\mathbf{v}|\,, \text{ se il moto è regressivo} \end{cases} \tag{2.98}$$

Accelerazione tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} \tag{2.99}$$

Accelerazione normale

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t \tag{2.100}$$

Equazione oraria

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2}\,dt' \tag{2.101}$$

***

Problema 2

La traiettoria è data in forma cartesiana $y = y(x)$, ed è percorsa con legge oraria $s = s(t)$. Derivando due volte la funzione $s(t)$ otteniamo $\dot{s}, \ddot{s}$ e quindi

$$v = |\dot{s}|, \ a_t = \ddot{s}, \ a_n = \frac{\dot{s}^2}{R}, \tag{2.102}$$

con

$$R = \frac{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}{|f''(x)|} \tag{2.103}$$

Calcolo di $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}$.

Geometria analitica:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{2.104}$$

Accelerazione tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \dot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{2.105}$$

Versore normale

Risolvo

$$\begin{cases} n_x + n_y f'(x) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 = 1 \end{cases} \tag{2.106}$$

dove n_x, n_y sono le componenti cartesiane di n. Ottengo due soluzioni:

$$\mathbf{n}_\pm = \frac{\mp f'(x)\,\mathbf{i} \pm \mathbf{j}}{\left[1 + f'(x)^2\right]} \Longrightarrow \mathbf{n}_+ + \mathbf{n}_- = \mathbf{0}$$

La soluzione accettabile è il versore orientato verso il semipiano in cui la traiettoria volge la concavità. Lasciando inespresso il segno, otteniamo:

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mp f'(x)\,|f''(x)|\,\mathbf{i} \pm |f''(x)|\,\mathbf{j}}{\left[1 + f'(x)^2\right]^2}, \tag{2.107}$$

dove si è tenuto conto dell'espressione del raggio di curvatura

$$R = \frac{\left[1 + f'(x)^2\right]^{3/2}}{|f''(x)|} \tag{2.108}$$

Problema 3 o **Problema del Navigatore inerziale**

La traiettoria è ignota, ed è percorsa con velocità scalare costante $0 < \dot{s} = v$. L'accelerometro misura il modulo dell'accelerazione in funzione del tempo, per cui è nota la funzione $a(t)$. Segue

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \tag{2.109}$$

Quindi

$$a(t) = \frac{v^2}{R(t)}, \tag{2.110}$$

essendo $R(t)$ il raggio di curvatura della traiettoria in funzione del tempo. In altri termini, misurare $a(t)$ equivale a misurare a meno del fattore di scala v^2, la curvatura R^{-1} in funzione del tempo. Cioè

$$R(t) = \frac{v^2}{a(t)} \tag{2.111}$$

Ad esempio, se l'accelerometro di bordo misura $a(t) = 0$, significa che ci stiamo muovendo lungo un segmento di retta ($R(t) \to +\infty$). Se invece, viene misurato un valore costante a_0, significa che ci stiamo muovendo lungo un arco di circonferenza di raggio $R_0 = \frac{v^2}{a_0}$. In tutti gli altri casi la traiettoria è indeterminata, i.e. esistono infinite traiettorie con il medesimo raggio di curvatura in funzione del tempo. Matematicamente, ciò equivale ad integrare l'equazione differenziale del secondo ordine in $y(x)$:

$$y'' = \pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{R},$$

ove R è una funzione di x. Di contro, noi conosciamo $R(t)$ e per esprimere tale grandezza in funzione di x occorre conoscere l'inversa della $x(t)$, ovviamente ignota.

2.6.3 Moto piano in coordinate polari. Velocità radiale e velocità trasversale

Nello studio di un moto piano possiamo assumere un riferimento polare anziché cartesiano. Precisamente, consideriamo un sistema di coordinate polari (r, φ) con polo O e asse polare x (che potrebbero essere rispettivamente l'origine e l'asse x di un riferimento cartesiano). Il vettore posizione di un punto mobile rispetto al predetto riferimento è individuato da

$$r = r(t), \;\; \varphi = \varphi(t), \tag{2.112}$$

ricordando che l'anomalia φ è contata positivamente (negativamente) dall'asse polare in verso antiorario (orario). È chiaro che $r(t) = |\mathbf{r}(t)|$ con

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

ove x, y sono le coorispondenti coordinate cartesiane legate alle coordinate polari dalle ben note relazioni

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi \tag{2.113}$$

In coordinate polari il vettore velocità esibisce una notevole decomposizione. Per essere più specifici, introduciamo un sistema di versori mutuamente ortogonali ovvero una nuova base dello spazio euclideo bidimensionale che stiamo considerando. Sia

$$\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$$

con i versori $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ disposti come in fig. 2.17.

Più precisamente, il versore $\mathbf{e}_r$ è orientato come il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$, mentre il versore $\mathbf{e}_\varphi$ è ortogonale al primo e orientato in modo tale che la coppia $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\varphi$ sia congruente alla coppia $\mathbf{ij}$ dei versori degli assi cartesiani. Siccome il nuovo sistema di versori è manifestamente una base dello spazio euclideo bidimensionale, possiamo esprimere il vettore velocità come combinazione lineare dei vettori della nuova base. Cioè

$$v = v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\mathbf{e}_\varphi,$$

essendo v_r e v_φ le componenti della velocità nella predetta base.

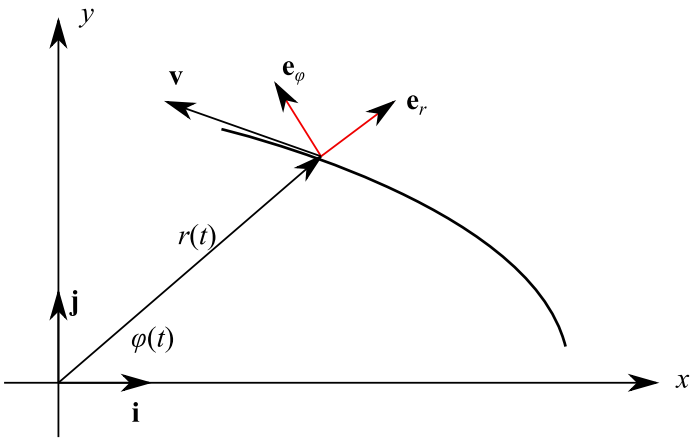


Figura 2.17: Moto piano in coordinate polari.

Definizione 46 *La componente v_r è la* **velocità radiale**, *mentre v_φ è la* **velocità trasversale**.

Il problema che si apre consiste nel determinare tali componenti. È chiaro che si tratta di eseguire il cambiamento di base:

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} \to \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$$

Dalla fig. 2.17 ricaviamo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi \end{aligned} \tag{2.114}$$

Risolvendo rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{e}_r\cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi\sin\varphi \\ \mathbf{j} &= \mathbf{e}_r\sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi\cos\varphi \end{aligned} \tag{2.115}$$

Adesso scriviamo la rappresentazione cartesiana della velocità

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \tag{2.116}$$

Derivando rispetto al tempo le (2.113):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned} \tag{2.117}$$

Sostituendo le (2.115)–(2.116) nelle (2.117), dopo qualche passaggio otteniamo

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \tag{2.118}$$

da cui le componenti radiale e trasversale

$$v_r = \dot{r}, \;\; v_\varphi = r\dot{\varphi} \tag{2.119}$$

Osservazione 47 *A differenza della decomposizione dell'accelerazione nelle componenti tangenziale e normale, la decomposizione della velocità nelle componenti radiale e trasversale, dipendono dalla scelta del sistema di riferimento polare. In altri termini, la decomposizione dell'accelerazione è intrinseca, nel senso che dipende esclusivamente dalla traiettoria e dalla legge oraria, mentre la decomposizione della velocità non ha un carattere intrinseco.*

2.6.4 Moto circolare uniforme. Velocità angolare

Un caso particolare di moto piano è il **moto circolare uniforme**, in cui la traiettoria γ è una circonferenza, e la velocità scalare è costante. Adottando un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy) con l'origine nel centro della circonferenza, si ha la configurazione cinematica illustrata in fig. 2.18.

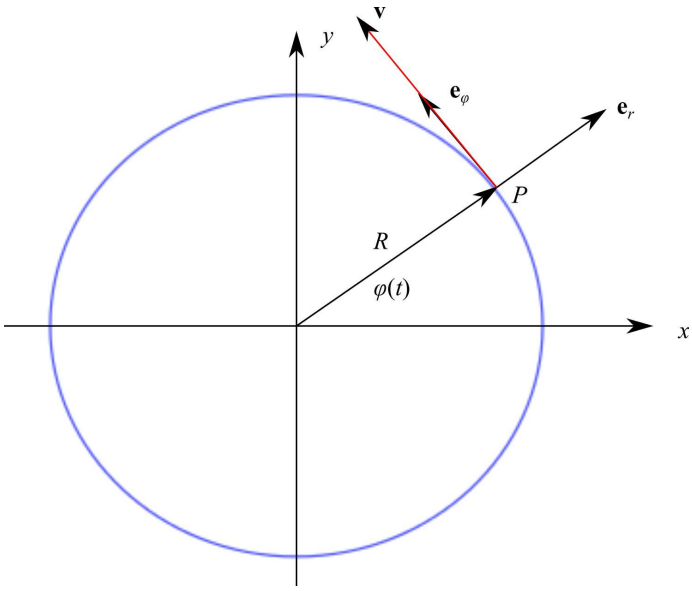


Figura 2.18: Nel moto circolare uniforme la velocità vettoriale è puramente trasversale.

Qui R è il raggio della circonferenza che coincide con il raggio di curvatura:

$$R = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|}$$

dove a è l'accelerazione, che è puramente normale giacché l'accelerazione tangenziale è nulla:

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \tag{2.120}$$

Quindi

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$$

In questo caso è immediata la determinazione del versore normale. Dalla predetta figura:

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \underset{|\mathbf{r}|=R}{=} -\frac{1}{R}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Segue

$$\mathbf{n} \cdot \tau = 0 \Longrightarrow \tau = \frac{1}{R}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

È preferibile studiare il moto in coordinate polari. Introducendo i versori e_r ed e_φ, vediamo che la velocità vettoriale è puramente trasversale:

$$v_r = \dot{r} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = v_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \text{ con } v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

Quindi

$$v = r\dot{\varphi} = \text{costante} \Longleftrightarrow \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

Dove ω è una costante. Senza perdita di generalità, assumiamo $\omega > 0$, mentre φ_0 è l'anomalia nell'istante iniziale $t = 0$. Ponendo $\varphi_0 = 0$ e osservando che $r(t) = R$, si ha

$$v = \omega R \tag{2.121}$$

Definizione 48 *La grandezza*

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{2.122}$$

si chiama **velocità angolare**,*e si misura in* rad/s. *La grandezza*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.123}$$

è il **periodo** *del moto circolare uniforme con velocità angolare* ω, *e rappresenta il tempo impiegato dal punto materiale per percorrere l'intera circonferenza.*

Con l'introduzione della velocità angolare, l'accelerazione scalare si riscrive:

$$a = \omega^2 R \tag{2.124}$$

È consuetudine assegnare un carattere vettoriale alla velocità angolare, defininendo un vettore $\boldsymbol{\omega}$ avente modulo $\omega = \frac{v}{R}$, direzione ortogonale al piano del moto e verso tale che guardando dove punta il vettore, il moto appaia antiorario. Con tale convenzione, vengono contemplati anche i valori negativi della velocità angolare, esclusi in precedenza. Più precisamente, riesce sempre $\omega > 0$, ma il verso positivo (antioriario) o negativo determina orientazioni opposte del vettore $\boldsymbol{\omega}$. Un'ultima osservazione riguarda il carattere intrinseco della grandezza ω. Infatti, mentre per un qualunque moto piano la derivata di $\varphi(t)$ è legata al riferimento polare scelto, la velocità angolare ω dipende esclusivamente dalla traiettoria (in particolare dal raggio) e dal modulo della velocità.

2.6.5 Composizione di moti armonici

Nel numero precedente abbiamo stabilito la seguente espressione per la velocità vettoriale di un punto che compie un moto circolare uniforme

$$\mathbf{v} = \frac{v}{R}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \tag{2.125}$$

esendo v il modulo (costante) del vettore $\mathbf{v}$, mentre R è il raggio della circonferenza. Rammentando la relazione $v = \omega R$ la precedente diviene

$$\mathbf{v} = \omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j} \tag{2.126}$$

D'altra parte

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

per cui

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = \omega x \end{cases} \tag{2.127}$$

Abbiamo così ottenuto un sistema di equazioni differenziali accoppiate (del primo ordine e di forma normale) nelle incognite $x(t), y(t)$. È facile verificare che una soluzione è

$$x(t) = R\cos\omega t, \quad y(t) = R\sin\omega t \tag{2.128}$$

La prima delle (2.128) può essere riscritta

$$x = R\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.129}$$

che è l'equazione oraria di un punto materiale che compie un **moto armonico**. Si tratta di un particolare moto unidimensionale, la cui equazione oraria è espressa da una funzione sinusoidale di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e fase φ. Nel caso in esame la fase è $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 49 *Determinare gli istanti di arresto per il moto armonico (2.129). In quali istanti la velocità è massima?*

Allo stesso modo vediamo dalla seconda delle (2.128) che il moto componente lungo l'asse x è a sua volta un moto armonico di periodo T e fase $\varphi = 0$.

Seguono le definizioni:

Definizione 50 *La velocità angolare ω del moto circolare uniforme, si chiama* **pulsazione** *o* **frequenza angolare** *dei singoli moti armonici (2.128). La grandezza $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ è la* **frequenza** *dei predetti moti. Il raggio R della circonferenza del moto risultante, è l'***ampiezza** *dei singoli moti armonici componenti.*

Ne concludiamo che un moto circolare uniforme di velocità angolare ω e raggio R (della circonferenza), è la composizione di due moti armonici in quadratura (differenza tra le fasi pari a $\pi/2$), di ampiezza R e pulsazione ω. Ci proponiamo di generalizzare tale conclusione, studiando la composizione di due moti armonici con la medesima pulsazione, ma di ampiezza e fasi arbitrarie. Precisamente:

$$x = A_x\cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = A_y\cos(\omega t + \varphi_y) \tag{2.130}$$

Si noti che le (2.130) costituiscono una rappresentazione parametrica della traiettoria del moto risultante. Per ottenere la sua rappresentazione parametrica, eliminiamo il parametro t tra le predette equazioni. A tale scopo sviluppiamo $\cos(\omega t + \varphi_x)$ e $\cos(\omega t + \varphi_y)$ con le note formule di addizioni degli archi:

$$\begin{aligned} x &= A_x\cos\omega t\cos\varphi_x - A_x\sin\omega t\sin\varphi_x \\ y &= A_y\cos\omega t\cos\varphi_y - A_y\sin\omega t\sin\varphi_y \end{aligned}$$

Definiamo le seguenti variabili ausiliarie

$$\xi = \cos\omega t, \quad \eta = \sin\omega t$$

Segue

$$\begin{cases} (A_x\cos\varphi_x)\,\xi - (A_x\sin\varphi_x)\,\eta = x \\ (A_y\cos\varphi_y)\,\xi - (A_y\sin\varphi_y)\,\eta = y \end{cases}, \tag{2.131}$$

che è un sistema di due equazioni lineari nelle incognite ξ, η. La matrice dei coefficienti (o matrice incompleta) è

$$M = \begin{pmatrix} A_x\cos\varphi_x & -A_x\sin\varphi_x \\ A_y\cos\varphi_y & -A_y\sin\varphi_y \end{pmatrix}$$

Di seguito la matrice completa

$$M' = \begin{pmatrix} A_x \cos\varphi_x & -A_x \sin\varphi_x & x \\ A_y \cos\varphi_y & -A_y \sin\varphi_y & y \end{pmatrix}$$

Per noti teoremi si ha che il sistema è compatibile e determinato se e solo se $\rho(M) = \rho(M')$, ove ρ denota il rango di una matrice. Segue

$$\begin{aligned} \text{Il sistema 2.131 è compatibile e determinato} &\Longleftrightarrow \rho(M) = 2 \\ &\Longleftrightarrow \Delta = \det M \neq 0 \end{aligned}$$

Cioè se e solo se

$$\Delta = -A_x A_y \sin\Delta\varphi \neq 0, \tag{2.132}$$

avendo introdotto la differenza di fase $\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x$. Dal momento che A_x, A_y sono ovviamente non nulli, si ha

$$\Delta \neq 0 \Longleftrightarrow \Delta\varphi \neq k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{2.133}$$

Cioè per $\Delta\varphi = k\pi$ il predetto sistema non ammette soluzioni, e l'equazione cartesiana della traiettoria va determinata in altro modo. Precisamente, se ad esempio $\Delta\varphi = 0$ (moti armonici componenti in fase):

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega t + \varphi_x)$$

Eliminando il termine $\cos(\omega t + \varphi_x)$

$$y = \frac{A_y}{A_x} x \tag{2.134}$$

Pertanto se i moti componenti sono in fase, la traiettoria del moto risultante è un segmento appartenente alla retta di equazione (2.134), come illustrato in fig. 2.19. Alla medesima conclusione si giunge per $\Delta\varphi = k\pi$, per ogni $|k|$ pari.

Se $\Delta\varphi = \pi$ (moti armonici in opposizione di fase):

$$x = A_x \cos(\omega t + \varphi_x), \quad y = -A_y \cos(\omega t + \varphi_x),$$

onde l'equazione cartesiana della traiettoria

$$y = -\frac{A_y}{A_x} x \tag{2.135}$$

Abbiamo quindi una configurazione cinematica per così dire, speculare a quella precedente (fig. 2.19)

Alla stessa conclusione per $\Delta\varphi = k\pi$, per ogni $|k|$ dispari. Per $\Delta\varphi \neq k\pi$, il sistema 2.131 è compatibile e determinato. Risolvendo con la nota regola di Cramer, otteniamo (dopo aver ripristinato le vecchie variabili)

$$\begin{cases} \cos\omega t = \frac{yA_x \sin\varphi_x - xA_y \sin\varphi_y}{A_x A_y \sin\Delta\varphi} \\ \sin\omega t = \frac{xA_y \cos\varphi_x - yA_x \cos\varphi_y}{A_x A_y \sin\Delta\varphi} \end{cases} \tag{2.136}$$

Quadrando e sommando

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi, \tag{2.137}$$

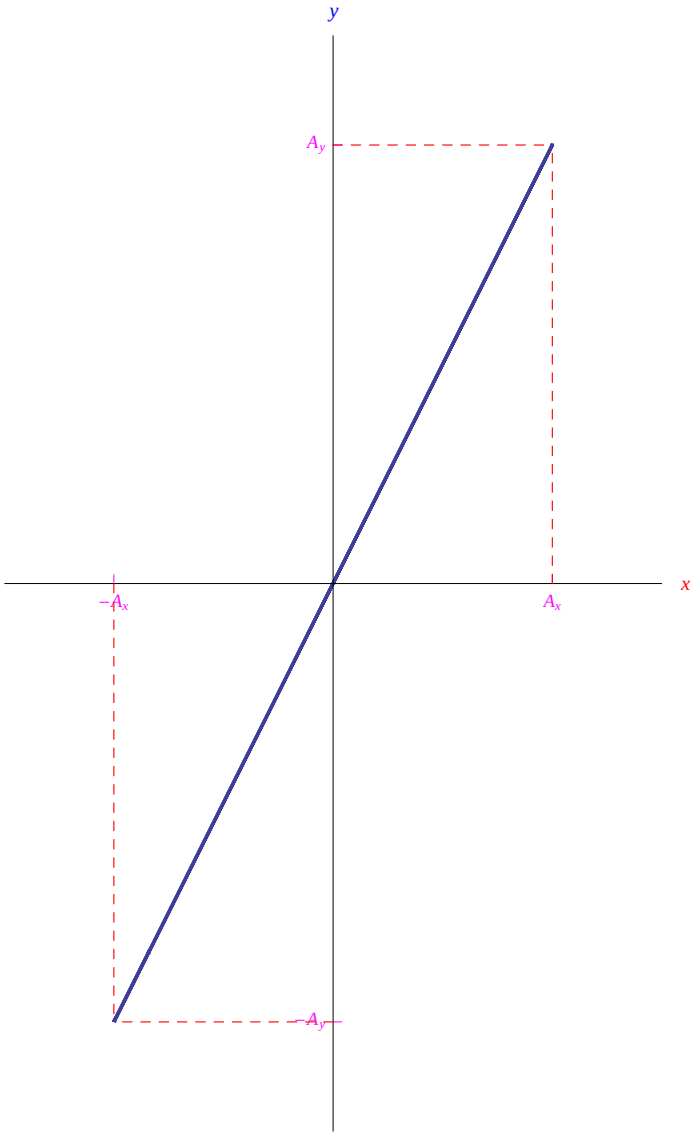


Figura 2.19: Se i moti armonici componenti sono in fase, la traiettoria del moto risultante è il segmento di retta di equazione $y = \frac{A_y}{A_x}x$ e di estremi $(-A_x, -A_y), (-A_x, -A_y)$.

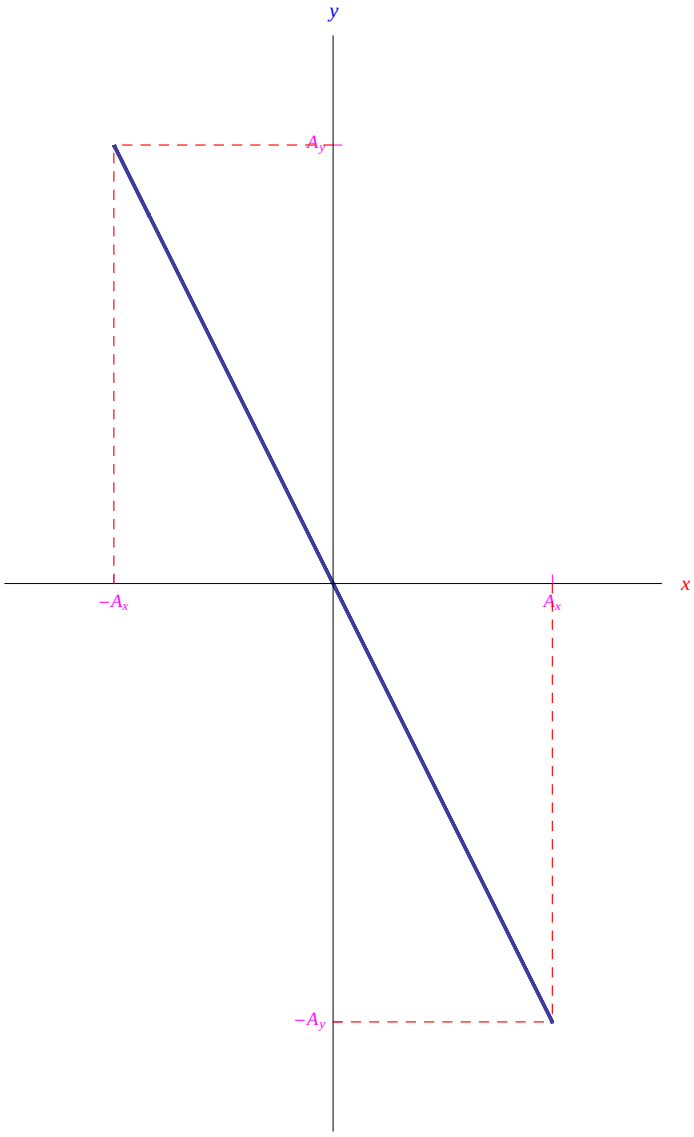


Figura 2.20: Se i moti armonici componenti sono in opposizione di fase, la traiettoria del moto risultante è il segmento di retta di equazione $y = -\frac{A_y}{A_x}x$ e di estremi $(-A_x, A_y), (A_x, -A_y)$.

che l'equazione di una conica centrata nell'origine. Per $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z},$ si ha

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

Cioè l'ellisse ha per assi gli assi coordinati x, y. In fig. riportiamo l'andamento della traiettoria per valori notevoli della differenza di fase.

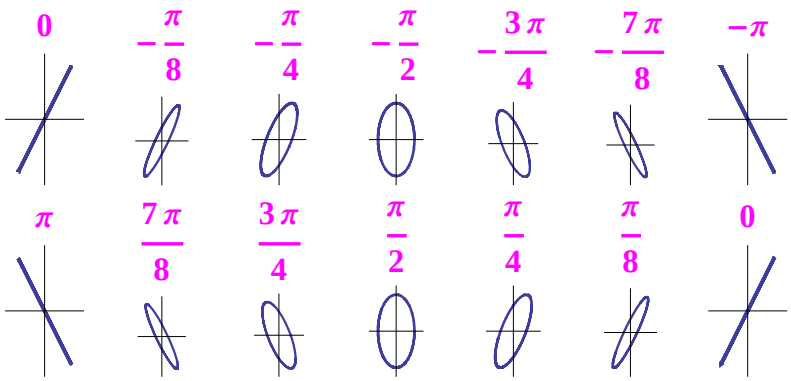


Figura 2.21: Se i moti armonici componenti sono in opposizione di fase, la traiettoria del moto risultante è il segmento di retta di equazione $y = -\frac{A_y}{A_x}x$ e di estremi $(-A_x, A_y), (A_x, -A_y)$.

2.6.6 Composizione di moti armonici con pulsazione diversa

Nel lavoro precedente abbiamo studiato la composizione di due moti armonici (secondo gli assi coordinati x, y) aventi la stessa pulsazione, ma con ampiezza e fase diverse.

Tale risultato può essere generalizzato considerando moti componenti con pulsazioni diverse:

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x), \quad y = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y) \tag{2.138}$$

Mentre nel caso $\omega_x = \omega_y \equiv \omega$ il moto risultante (circolare) dalla composizione dei moti armonici (2.138) è periodico di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, per $\omega_x \neq \omega_y$ è in generale non periodico, e la traiettoria è una curva aperta[1], ma comunque contenuta in una regione limitata del piano in cui si svolge il moto. Ad esempio, per $\omega_x = 2\,rad/\mathrm{s}$ e $\omega_y = \sqrt{3}rad/\mathrm{s}$ e angoli di fase $\varphi_x = \varphi_y = 0$, si ottiene la traiettoria graficata nelle figg. 2.22-2.23.

Se T_x, T_y sono i periodi dei singoli moti:

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega_x}, \quad T_y = \frac{2\pi}{\omega_y}$$

Segue manifestamente

$$\left.\begin{array}{c}\text{Il moto risultante}\\ \text{è periodico}\end{array}\right) \Longleftrightarrow \exists n_x, n_y \in \mathbb{N} - \{0\} \mid T_x n_x = T_y n_y, \tag{2.139}$$

dove T è il periodo del moto risultante. Passando alle pulsazioni, la condizione di periodicità (2.139) si scrive:

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n_y}{n_x} \tag{2.140}$$

In altri termini, il moto risultante è periodico se e solo se il rapporto tra le pulszioni è al più un numero razionale.

[1] La traiettoria può comunque essere una curva aperta e il corrispondente moto risulta periodico.

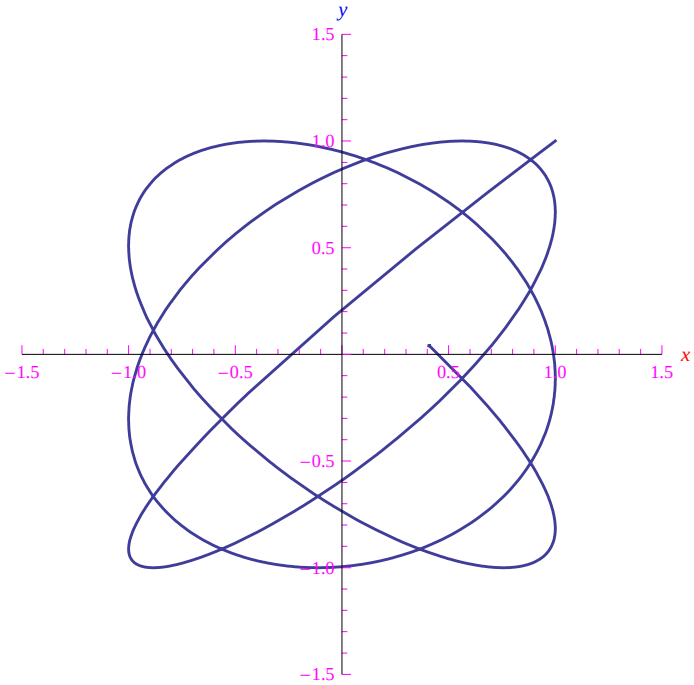


Figura 2.22: Composizione dei moti armonici $x = \cos 2t$, $y = \cos\left(\sqrt{3}t\right)$ nell'intervallo di tempo $[0, 10]$.

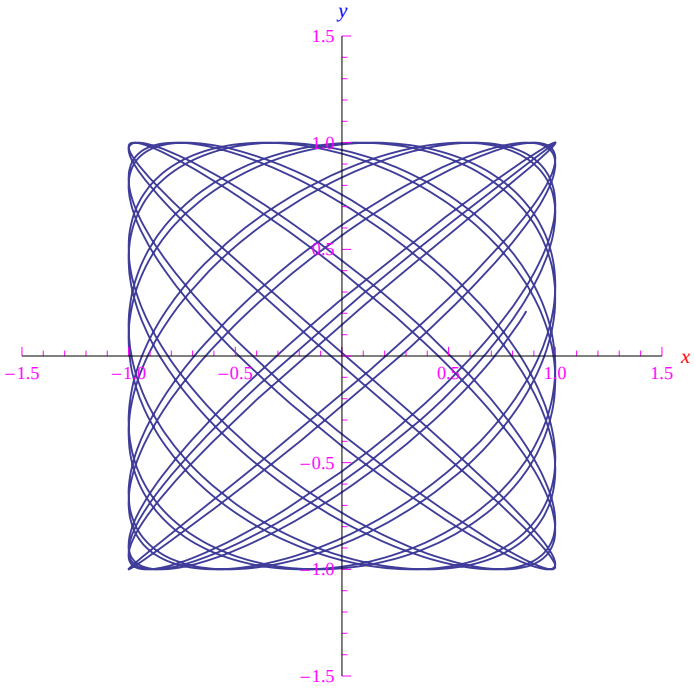


Figura 2.23: Composizione dei moti armonici $x = \cos 2t$, $y = \cos\left(\sqrt{3}t\right)$ nell'intervallo di tempo $[0, 50]$.

Definizione 51 *Per* $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n_y}{n_x} \neq 1$ *le corrispondenti traiettorie si chiamano* **figure di Lissajous**.

Alcune figure di Lissajous notevoli si ottengono per

$$\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

considerando una differenza di fase

$$\Delta\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi$$

Ad esempio per $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{3}$ e $\Delta\varphi = \frac{3}{8}\pi$ otteniamo la traiettoria di fig. 2.24.

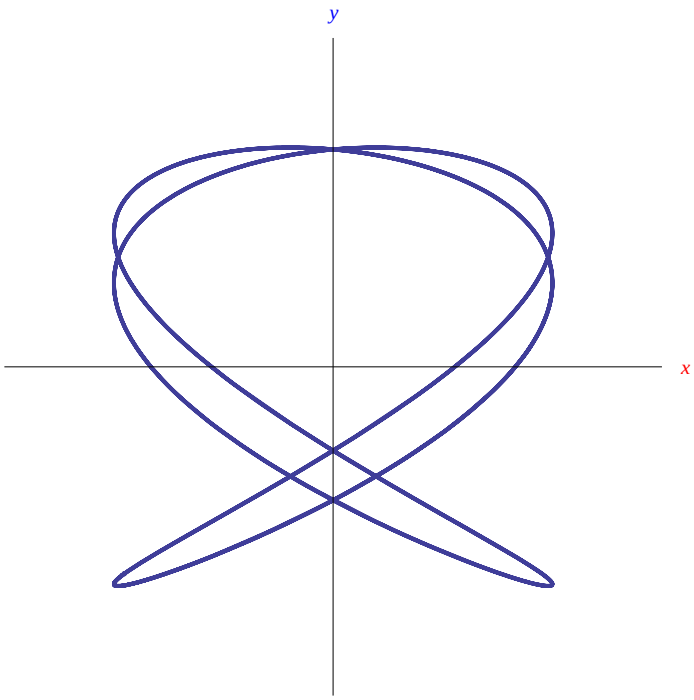


Figura 2.24: Figura di Lassjous per $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{2}{3}$ e $\Delta\varphi = \frac{3\pi}{8}$.

Per valori indicati precedentemente, otteniamo i grafici di fig. 2.25.
Un ulteriore esempio è dato dalla composizione

$$x = \cos\left(\sqrt{2}t\right), \quad y = \cos\left(\sqrt{\pi}t\right),$$

graficata in fig. 2.26.

2.6.7 Pulsazione dipendente dal tempo

In questo paragrafo ci proponiamo di studiare la composizione di due moti armonici con pulsazione dipendente dal tempo secondo una legge assegnata. Naturalmente, la traiettoria può essere esclusivamente ricostriuta in software. In realtà, non si tratta di due moti armonici nel senso che i singoli moti componenti risolvono le seguenti equazioni differenziali

$$\ddot{x} + \omega_x(t)^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_y(t)^2 y = 0, \tag{2.141}$$

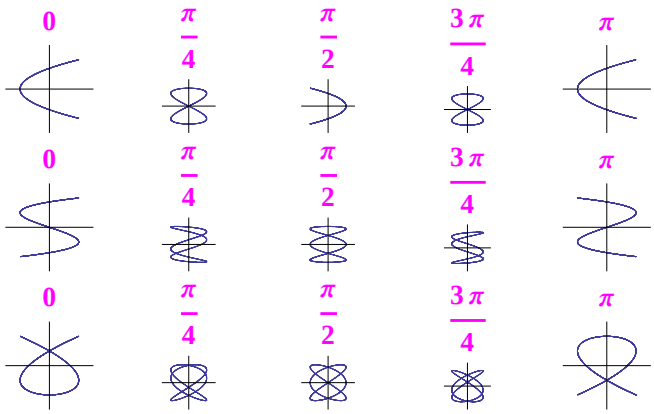


Figura 2.25: Figura di Lassjous notevoli.

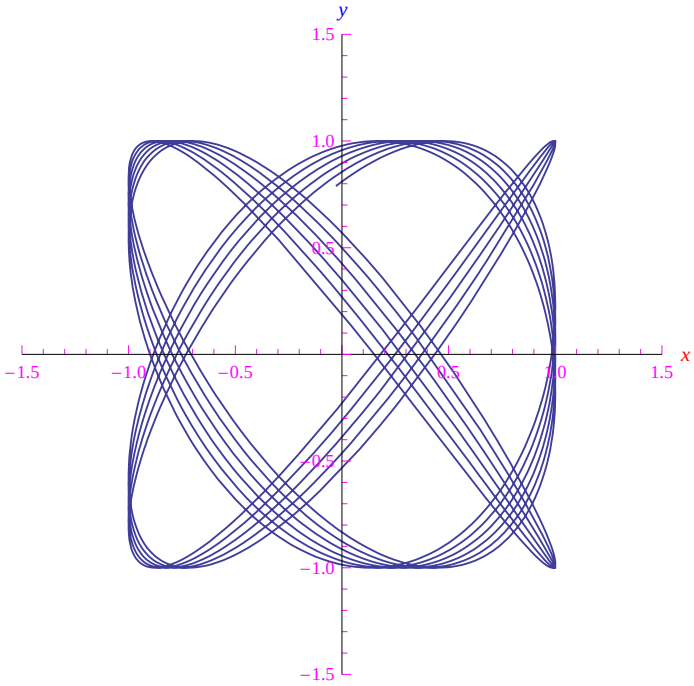


Figura 2.26: Figura di Lassjous ottenuta per $\frac{\omega_y}{\omega_x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ e $\Delta\varphi = 0$.

ove $\omega_x(t), \omega_y(t)$ sono funzioni assegnate. L'integrazione delle predette equazioni va eseguita numericamente, giacché si tratta di equazioni differenziali (lineari) del secondo ordine e a coefficienti variabili. In particolare, consideriamo

$$\ddot{x} + (2+t)\,x = 0, \quad \ddot{y} + (\pi + t)\,y = 0, \tag{2.142}$$

Integrando numericamente con *Mathematica* con la condizione iniziale

$$x(0) = y(0) = 1, \;\; \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 1,$$

otteniamo la traiettoria graficata in fig. 2.27

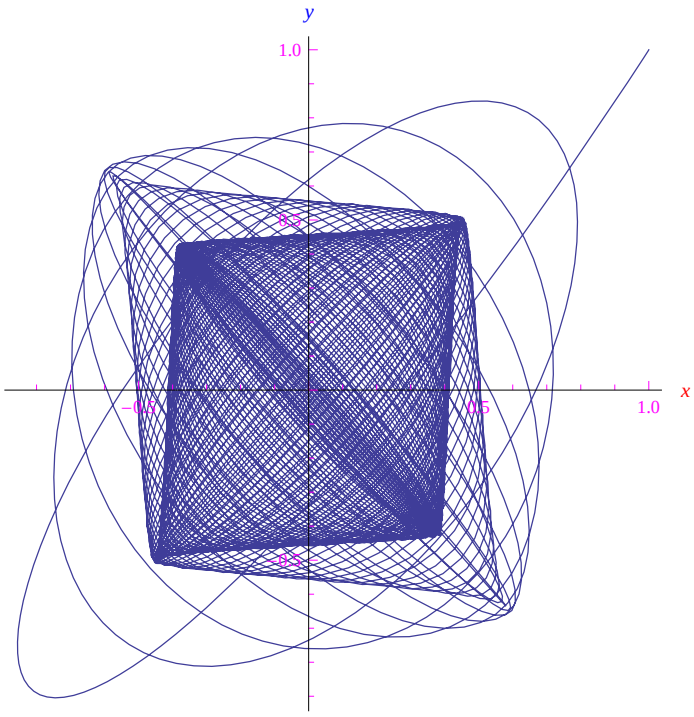


Figura 2.27: Figura di Lassjous nel caso di pulsazioni dipendenti dal tempo. Precisamente, le equazioni differenziali del moto sono le (2.142).

2.6.8 Il cuscino di Lassjous

Un'ulteriore generalizzazione consiste nell'accoppiare le equazioni differenziali 2.141, attraverso due funzioni assegnate $f(y)$ e $g(x)$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_x^2 x = f(y) \\ \ddot{y} + \omega_y^2 y = g(x) \end{cases},$$

dove stiamo considerando pulsazioni stazionarie i.e. non dipendenti dal tempo. Ad esempio, per

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x = y^2 \\ \ddot{y} + \pi y = x^2 \end{cases}, \;\; x(0) = y(0) = 1, \;\; \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 1, \tag{2.143}$$

otteniamo il famoso *cuscino di Lassjous* graficato in fig. 2.28.

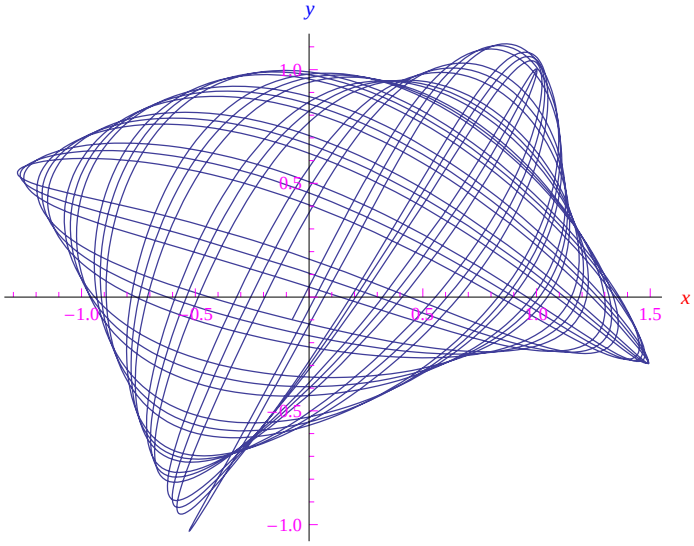


Figura 2.28: Figura di Lassjous quale traiettoria risultante dalla composizione di due moti unidimensionali governato dalle equazioni differenziali (2.143).

2.6.9 Velocità areolare

Un qualunque moto piano è caratterizzato oltre che dalle grandezze cinematiche precedentemente definite, dalla cosiddetta *velocità areolare*, che svolge un ruolo essenziale in una particolare calsse di moti denominati *moti centrali*, per i quali il vettore accelerazionie è costantemente orientato verso un punto assegnato del piano dove si svolge il moto. Nella dinamica del punto materiale, vedremo che tali moti conservano la velocità areolare, e ciò riguarda in particolare il moto dei pianeti e dei satelliti (seconda legge di Keplero).

Ciò premesso, consideriamo un generico moto piano rispetto a un riferimento polare di polo O e di asse polare coincidente con l'asse x di un riferimento cartesiano $R(Oxyz)$, come illustrato in fig. 2.29.

Sia $P(t_0)$ la posizione della particella nell'istante iniziale t_0. Come vediamo dalla predetta figura, tale punto ha coordinate polari $r_0 = r(t_0)$, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$, quali valori assunti dalle funzioni $r(t)$, $\varphi(t)$ che definiscono le equazioni orarie e quindi, una rappresentazione parametrica della traiettoria γ:

$$\gamma : r = r(t), \ \varphi = \varphi(t), \quad t \geq t_0 \tag{2.144}$$

Rammentiamo (§ 2.6.3) che la rappresentazione polare della velocità vettoriale è

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

dove v_r, v_φ sono rispettivamente la velocità radiale e la velocità trasversale, mentre $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ sono i versori radiale e trasversale, dati in funzione dei versori degli assi cartesiani dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi \end{aligned} \tag{2.145}$$

In generale, a partire da t_0 il raggio vettore $r(t)$ *spazza* un'area che possiamo identificare con una funzione $A(t)$. Per convenzione, $A(t) > 0$ $[A(t) < 0]$ se l'area è spazzata nel verso

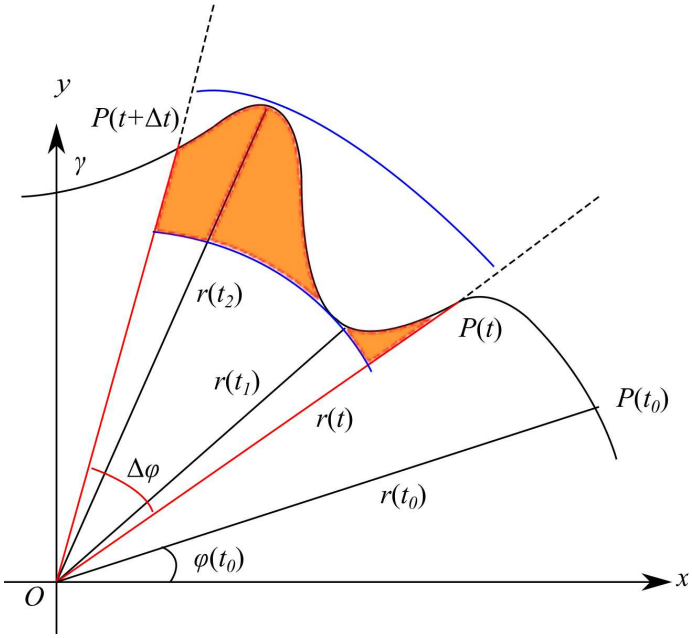


Figura 2.29: Traiettoria di una particella che si muove nel piano cartesiano (Oxy) in cui è stato istituito un riferimento polare con polo in O, e asse polare x.

delle φ crescenti [decrescenti]. Per una funzione $\varphi(t)$ monotona a tratti, decomponiamo l'intervallo $[t_0, t]$ in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la relativa restrizione di $\varphi(t)$ è monotona. Cioè

$$[t_0, t] = [t_0, \tau_1] \cup [\tau_1, \tau_2] \cup ... \cup [\tau_{n-1}, t]$$

Definiamo

$$A(t) = A_1(\tau_1) + A_2(\tau_2) + ... + A_{n-1}(\tau_{n-1}) + A_n(t)$$

Con

$$A_k(\tau_k) > 0 \ \ [< 0] \text{ se } \varphi(t) \text{ è crescente [decrescente] in } [\tau_{k-1}, \tau_k]$$

Osservazione 52 *Dal segno di $A(t)$ vediamo che tale funzione è legata alla derivata di $\varphi(t)$.*

Per un assegnato incremento Δt consideriamo l'intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$ come in fig. 2.29.

Definizione 53 *Dicesi* **velocità areolare media** *del punto P rispetto al centro O, il rapporto incrementale della funzione $A(t)$:*

$$\frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \tag{2.146}$$

Per quanto precede, la regolarità della funzione $A(t)$ è legata alla regolarità delle funzioni $r(t), \varphi(t)$ che noi assumiamo di classe C^1, i.e. continue e dotate di derivata continua, per cui ci aspettiamo la medesima regolarità per la funzione $A(t)$. In altri termini, esiste determinato e funito il limite del rapporto incrementale (2.146). Tale circostanza suggerisce la seguente definizione:

Definizione 54 *Dicesi* **velocità areolare** *del punto P rispetto al centro O, il limite per $\Delta t \to 0$ del rapporto incrementale (2.146). Cioè*

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} \tag{2.147}$$

Ne consegue che la velocità areolare è la derivata prima della funzione $A(t)$.

Teorema 55

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \tag{2.148}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[t, t + \Delta t]$. Per un noto teorema di Analisi, la funzione continua $r(t)$ è ivi dotata di minimo e massimo assoluti. Con ovvio significato dei simboli:

$$\exists t_1, t_2 \in [t, t + \Delta t] \mid r_< = r(t_1), \ r_> = r(t_2),$$

come illustrato in fig. 2.29, dove nel medesimo intervallo l'area è spazzata nel verso delle φ crescenti. Ne consegue che per quel dato $\Delta\varphi$ è $\Delta A > 0$. Nella stessa figura, l'area colorata è

$$\Delta\sigma = \Delta A - \frac{1}{2} r(t_1)^2 \Delta\varphi, \tag{2.149}$$

giacché il secondo termine a secondo membro è l'area del settore circolare di centro O e raggio $r(t_1)$. Riesce manifestamente

$$0 \leq \Delta\sigma \leq \Delta S, \tag{2.150}$$

essendo ΔS l'area del settore di corona circolare di centro O e raggi $r(t_1), r(t_2)$. Cioè

$$\Delta S = \frac{1}{2} \left[r(t_2)^2 - r(t_1)^2 \right] \Delta\varphi \tag{2.151}$$

Dalla (2.150):

$$0 \leq \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \leq \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{2.152}$$

Il rapporto $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ è infinitesimo per $\Delta t \to 0$. Infatti:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \left[r(t_2)^2 - r(t_1)^2 \right] \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 0 \cdot \dot{\varphi} = 0$$

Tenendo conto della doppia disuguaglianza (2.152), per il teorema dei carabinieri si ha

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = 0 \tag{2.153}$$

Quindi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta A}{\Delta t} - \frac{1}{2} r(t_1)^2 \Delta\varphi \right] = 0 \Longrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} r(t_1)^2 \Delta\varphi,$$

da cui l'asserto osservando che $\lim_{\Delta t \to 0} r(t_1)^2 = r(t)^2$. ■

Corollario 56 *La rappresentazione cartesiana della velocità aereolare è*

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{2.154}$$

Dimostrazione. La velocità trasversale è

$$v_\varphi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi = (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi) = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi$$

Ma

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}, \ \cos\varphi = \frac{x}{r},$$

per cui

$$v_\varphi = \frac{1}{r}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Segue (tenendo conto della (2.148)):

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r \cdot \underbrace{r\dot{\varphi}}_{v_\varphi} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Cioè l'asserto. ■

Concludiamo questo numero osservando che è possibile conferire il carattere vettoriale alla velocità areolare. Infatti, sviluppando il prodotto vettoriale

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathbf{k}$$

per cui

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$$

che è manifestamente ortogonale al piano del moto e orientato in moto tale che la terna $\mathbf{rv\dot{A}}$ sia levogira.

2.6.10 Complementi. Accelerazione radiale e accelerazione trasversale

Nel paragrafo 2.6.1 abbiamo visto che in un moto piano il vettore accelerazione ammette la seguente decomposizione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \tag{2.155}$$

Rammentiamo velocemente che i vettori componenti sono rispettivamente l'accelerazione tangenziale e l'accelerazione normale. Con ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau}, \ \ \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}$$

con il raggio di curvatura R dato da

$$R = \begin{cases} \frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}, & \text{se la traiettoria } \gamma \text{ è data in forma parametrica} \\ \frac{\sqrt{[1+f'(x)]^3}}{|f''(x)|}, & \text{se } \gamma : y = f(x) \end{cases}$$

Abbiamo poi visto (§ 2.6.3) che in un moto piano il vettore velocità ammette la seguente decomposizione rispetto a un sistema di coordinate polari (r, φ):

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

essendo $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ una coppia di versori ortogonali, di cui il primo parallelo al vettore posizione $\mathbf{r}$, mentre

$$v_r = \dot{r}, \;\; v_\varphi = r\dot{\varphi}$$

sono rispettivamente la velocità radiale e la velocità trasversale. Ciò premesso, decomponiamo il vettore accelerazione nelle componenti radiale e trasversale:

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_r \tag{2.156}$$

come in fig. 2.30.

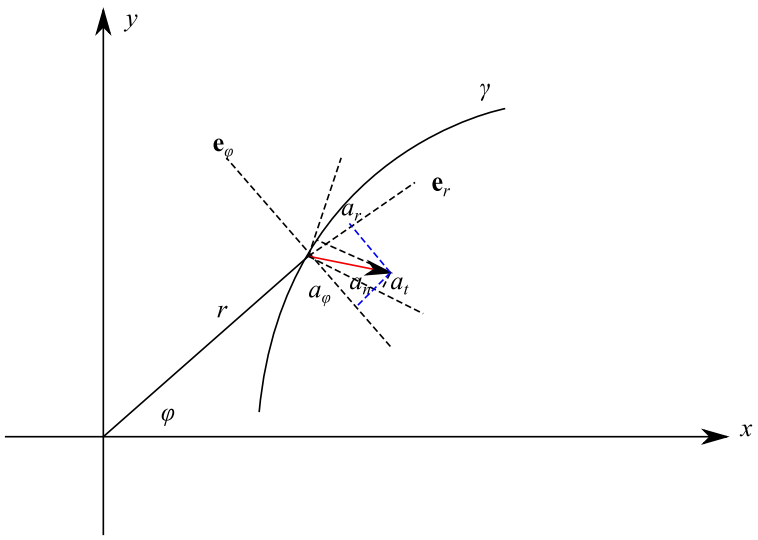


Figura 2.30: Le possibili decomposizioni del vettore accelerazione. Si noti che la decomposizione in accelerazione normale e accelerazione tangenziale, è indipendente dal riferimento cartesiano, mentre la seconda decomposizione dipende dal riferimento polare scelto.

A tale scopo ricordiamo che:

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \mathbf{e}_r \cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi \sin\varphi \\ \mathbf{j} = \mathbf{e}_r \sin\varphi - \mathbf{e}_\varphi \cos\varphi \end{cases}, \tag{2.157}$$

da sostituire nella rappresentazione cartesiana del predetto vettore:

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \tag{2.158}$$

a patto di calcolare le derivate seconde rispetto al tempo, delle funzioni

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi,$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = &\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right)(\mathbf{e}_r\cos\varphi - \mathbf{e}_\varphi\sin\varphi) \\ &+ \left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)(\mathbf{e}_r\sin\varphi - \mathbf{e}_\varphi\cos\varphi) \end{aligned}$$

Sviluppando e semplificando:

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi \tag{2.159}$$

onde

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

2.7 Principio dei moti relativi

La nozione di sistema di riferimento è vitale per la definizione delle varie grandezze cinematiche (posizione, velocità, accelerazione). A volte si manifesta la necessità di riferire il moto di un punto materiale a due sistemi di riferimento distinti, di cui uno è in movimento rispetto al primo. Sussiste la seguente definizione:

Definizione 57 *Siano K e K' due sistemi di riferimento, di cui K lo possiamo ritenere fisso, mentre K' si muove rispetto a K. Dicesi* **moto assoluto** *il moto di un punto materiale rispetto a K.*

Dicesi **moto relativo** *il moto del medesimo punto rispetto a K'. Il* **moto di trascinamento** *è il moto dei punti solidali a K.*

Si pensi, ad esempio, ad un marinaio che cammina sul ponte di una nave in navigazione. Schematizzando il marinaio attraverso un punto P ed assumendo come sistema di riferimento fisso un sistema K solidale alla Terra, e come mobile un sistema K' solidale alla nave, il moto assoluto di P è quello del marinaio rispetto alla terraferma, il moto relativo di P è quello del marinaio rispetto alla nave, il moto di trascinamento è quello della nave rispetto alla terraferma.

Si badi incidentalmente, che non ha senso definire la *velocità di trascinamento* come la velocità di K' rispetto a K, poiché ogni punto dello spazio solidale a K' ha una propria velocità. Solo nel caso di una traslazione si può parlare di velocità di K' rispetto a K. Infatti, in questo caso tutti i punti dello spazio solidale hanno la stessa velocità, per cui basta prenderne uno ad arbitrio (ad esempio, l'origine del sistema di coordinate K'). Ne consegue che la velocità di trascinamento è la velocità rispetto a K di un punto (fittizio) che, in ogni istante, sia sovrapposto al punto P ma a differenza di P, sia solidale a K' [4].

Per semplicità e senza perdita di generalità, consideriamo il caso bidimensionale ovvero due sistemi di riferimento $K\,(Oxy)\,,\ K'\,(O'x'y')$, ove quest'ultimo si muove con velocità costante $\mathbf{v}_\tau$ nel piano a cui si riferiscono i predetti sistemi. Inoltre, assumiamo gli assi coordinati di K' paralleli e concordi a quelli di K, per ogni istante di tempo. Come illustrato in fig. 2.31, nell'intervallo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ il punto P si sposta (vettorialmente) di $\Delta\mathbf{r}_a$ rispetto a K, e di $\Delta\mathbf{r}_r$ rispetto a K'.

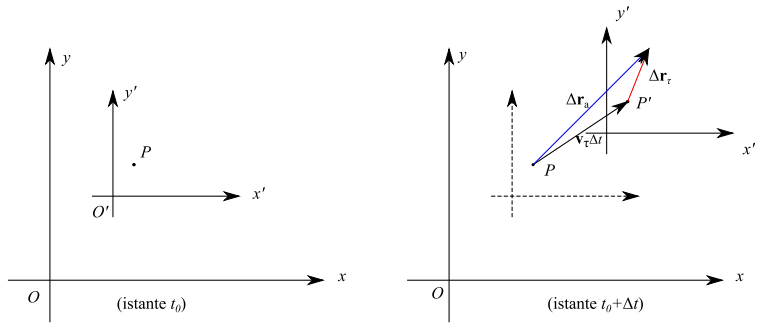


Figura 2.31: Moto di un punto materiale P riferito a due sistemi di riferimento $K\,(Oxy)\,,\ K'\,(O'x'y')$ ove quest'ultimo si muove rispetto al primo con velocità costante.

Risulta:

$$\Delta\mathbf{r}_a = \Delta\mathbf{r}_r + \mathbf{v}_\tau\Delta t \underset{\Delta t\neq 0}{\Longrightarrow} \frac{\Delta\mathbf{r}_a}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{r}_r}{\Delta t} + \mathbf{v}_\tau$$

Eseguendo l'operazione di passaggio al limite per $\Delta t \to 0$:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\tau \tag{2.160}$$

dove abbiamo definito la **velocità assoluta** i.e. la velocità del punto P rispetto al riferimento fisso K:

$$\mathbf{v}_a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_a}{\Delta t} \tag{2.161}$$

e la **velocità relativa** (velocità di P rispetto a K'):

$$\mathbf{v}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_r}{\Delta t}, \tag{2.162}$$

mentre $\mathbf{v}_\tau$ è la **velocità di trascinamento**. Dal momento che riteniamo costante la velocità di trascinamento, derivando rispetto al tempo primo e secondo membro della (2.160), otteniamo

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r \tag{2.163}$$

dove $\mathbf{a}_a$ è l'**accelerazione assoluta** di P, mentre $\mathbf{a}_r$ è l'**accelerazione relativa** del medesimo punto. Cioè, nel caso di moto di trascinamento traslatorio uniforme, l'accelerazione di P è la stessa in entrambi i sistemi di riferimento K e K'.

La generalizzazione al caso tridimensionale è immediata. Assumendo $K\,(Oxyz)$ come sistema di riferimento fisso e $K'\,(O'x'y'z')$ come sistema mobile con velocità di trascinamento costante e con gli assi coordinati paralleli e concordi a quelli di K, si ottengono le stesse formule trovate prima. Possiamo ulteriormente generalizzare al caso di moto di trascinamento traslatorio ma non uniforme i.e. con velocità di trascinamento $\mathbf{v}_\tau\,(t)$ funzione del tempo. Si ottiene facilmente

$$\mathbf{v}_a\,(t) = \mathbf{v}_r\,(t) + \mathbf{v}_\tau\,(t)\,, \tag{2.164}$$

che esprime il seguente teorema:

Teorema 58 *(**Principio dei moti relativi**)*
La velocità assoluta di un punto coincide, per ogni istante di tempo, con il risultante della sua velocità relativa e della velocità di trascinamento.

Riprendendo l'esempio del marinaio che cammina sul ponte di una nave in navigazione, si ha che la velocità assoluta del punto P che rappresenta il predetto marinaio, è la velocità di P rispetto a un sistema di riferimento solidale alla terraferma; la velocità relativa è la velocità di P rispetto a un sistema di riferimento solidale alla nave; la velocità di trascinamento all'istante t, è la velocità della porzione di superficie del ponte (supposta puntiforme) su cui all'istante t si trova il marinaio.

2.7.1 Derivazione assoluta e relativa di una funzione vettoriale. Lemma di Coriolis

Sia $K'\,(O'x'y'z')$ un sistema di riferimento rotante rispetto a un sistema di riferimento $K\,(Oxyz)$ che possiamo ritenere fisso. Inoltre, è $O' \equiv O$ come in fig. 2.32.

Scriviamo la rappresentazione cartesiana di una funzione vettoriale $\mathbf{u}\,(t)$ nel sistema di riferimento K:

$$\mathbf{u}\,(t) = u_x\,(t)\,\mathbf{i} + u_y\,(t)\,\mathbf{j} + u_z\,(t)\,\mathbf{k} \tag{2.165}$$

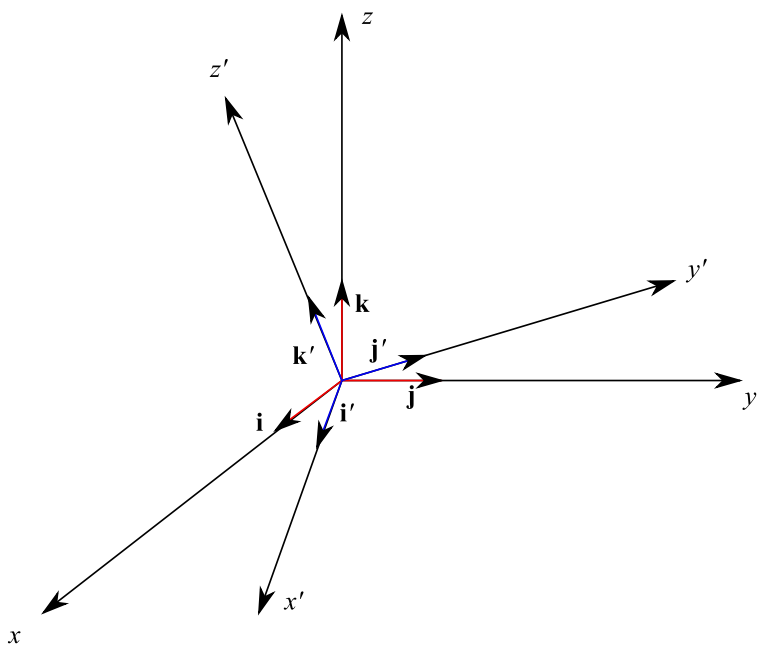


Figura 2.32: Il sistema di riferimento $K'(O'x'y'z')$ ruota rispetto al sistema di riferimento $K(Oxyz)$.

La stessa funzione ha in K', la seguente rappresentazione cartesiana:

$$\mathbf{u}(t) = u'_x(t)\,\mathbf{i}' + u'_y(t)\,\mathbf{j}' + u'_z(t)\,\mathbf{k}' \tag{2.166}$$

In altri termini, denotiamo con $u_x(t), u_y(t), u_z(t)$ le componenti del vettore $\mathbf{u}$ rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, e con $u'_x(t)$,$u'_y(t)$, $u'_z(t)$ le componenti dello stesso vettore nella base ortonormale $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$. Ricordiamo che tali basi sono connesse dalla matrice ortogonale

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}' & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}' \end{pmatrix}, \tag{2.167}$$

avendosi

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \tag{2.168}$$

Assumendo derivabile la funzione $\mathbf{u}(t)$, sussistono le seguenti definizioni:

Definizione 59 *Dicesi* **derivata assoluta** *di* $\mathbf{u}(t)$ *la funzione vettoriale*

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \dot{u}_x\mathbf{i} + \dot{u}_y\mathbf{j} + \dot{u}_z\mathbf{k} \tag{2.169}$$

Definizione 60 *Dicesi* **derivata relativa** *di* $\mathbf{u}(t)$ *la funzione vettoriale*

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r = \dot{u}'_x\mathbf{i}' + \dot{u}'_y\mathbf{j}' + \dot{u}'_z\mathbf{k}' \tag{2.170}$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente lemma:

Lemma 61 *(Lemma di Coriolis)*

$$\exists \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \mid \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \tag{2.171}$$

Dimostrazione. Derivando primo e secondo membro della (2.166) con $\mathbf{i}'(t)$ etc., si ha:

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \dot{u}'_x \mathbf{i}' + \dot{u}'_y \mathbf{j}' + \dot{u}'_z \mathbf{k}' + \mathbf{v}, \tag{2.172}$$

dove

$$\mathbf{v} = u'_x \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + u'_y \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + u'_z \frac{d\mathbf{k}'}{dt}$$

Per una nota proprietà della derivata di un vettore di modulo costante:

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \perp \mathbf{i}' \Longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \mid \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \alpha_1 \mathbf{j}' + \alpha_2 \mathbf{k}'$$

In maniera simile

$$\frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \alpha_3 \mathbf{k}' + \alpha_4 \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \alpha_5 \mathbf{i}' + \alpha_6 \mathbf{j}'$$

Mostriamo che solo tre dei sei parametri α_k sono indipendenti.

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}') = 0 \Longrightarrow \underbrace{\frac{d\mathbf{i}'}{dt} \cdot \mathbf{j}'}_{=\alpha_1} + \underbrace{\mathbf{i}' \cdot \frac{d\mathbf{j}'}{dt}}_{=\alpha_4} = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_4 = -\alpha_1$$

Alla stessa maniera

$$\alpha_5 = -\alpha_2, \ \alpha_6 = -\alpha_3,$$

cosicché

$$\mathbf{v} = \left(-\alpha_1 u'_y - \alpha_2 u'_z\right) \mathbf{i}' + \left(\alpha_1 u'_x - \alpha_3 u'_z\right) \mathbf{i}' + \left(\alpha_2 u'_x + \alpha_3 u'_z\right) \mathbf{i}' \tag{2.173}$$

Se ora poniamo

$$\omega_x = \alpha_3, \ \omega_y = -\alpha_2, \ \omega_z = \alpha_1$$

l'espressione (2.173) si scrive

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u'_x & u'_y & u'_z \end{vmatrix} = \omega \wedge \mathbf{u},$$

onde l'asserto. ■

2.7.2 Teorema del Coriolis

Nel numero precedente abbiamo visto che per ogni funzione vettoriale derivabile $\mathbf{u}(t)$, si ha

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \tag{2.174}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ un vettore che ci dà un'informazione sulla rapidità di variazione degli assi coordinati x', y', z' del sistema rotante K' rispetto agli assi x, y, z del sistema fisso K. Per scoprire il significato fisico di tale grandezza, definiamo i seguenti operatori di derivazione:

$$D_a = \left.\frac{d}{dt}\right|_a \quad \text{(operatore di derivazione assoluta)}$$
$$D_r = \left.\frac{d}{dt}\right|_r \quad \text{(operatore di derivazione relativa)}$$

Per quanto precede

$$D_a = D_r + \boldsymbol{\omega}\wedge \tag{2.175}$$

Nel caso particolare del vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ di una particella, si ha

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \omega \wedge \mathbf{r}$$

in cui riconosciamo il principio dei moti relativi (§ 2.7). Ne consegue che nel caso di un sistema di riferimento rotante, la velocità di trascinamento è

$$\mathbf{v}_\tau = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \tag{2.176}$$

per cui appare chiaro il ruolo svolto dal vettore $\boldsymbol{\omega}$: è la velocità angolare di K' rispetto a K. Più precisamente, K' ruota attorno a un asse fisso. Per determinare la relazione tra accelerazione assoluta e relativa, premettiamo la seguente proposizione:

Proposizione 62 *L'accelerazione angolare assoluta coincide con l'accelerazione angolare relativa.*

Dimostrazione. L'asserto segue immediatamente dalla (2.174) per $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$. ■

Tale proposizione suggerisce di denotare con $\boldsymbol{\alpha}$ l'accelerazione assoluta:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.177}$$

Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 63 *(**Teorema del Coriolis**)*

L'accelerazione assoluta di un punto materiale che si muove rispetto a K e a K', è

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_{CC}, \tag{2.178}$$

dove $\mathbf{a}_a$ e $\mathbf{a}_r$ sono rispettivamente l'accelerazione assoluta e relativa, mentre

$$\mathbf{a}_{CC} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r \tag{2.179}$$

L'accelerazione di trascinamento è

$$\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{r} + \mathbf{a}_c \tag{2.180}$$

essendo

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \tag{2.181}$$

Dimostrazione. Scriviamo il principio dei moti relativi nel formalismo degli operatori di derivazione assoluta e relativa:

$$D_a\mathbf{r} = D_r\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

Applichiamo, quindi, a primo e secondo membro l'operatore di derivazione assoluta:

$$\begin{aligned} D_a\left(D_a\mathbf{r}\right) &= D_a\left(D_r\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\right) \\ &= \left(D_r + \boldsymbol{\omega}\wedge\right)\left(D_r\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\right) \end{aligned}$$

Tenendo conto della linearità dell'operatore di derivazione, si ha:

$$D_a^2\mathbf{r} = D_r^2\mathbf{r} + D_r\left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\right) + \boldsymbol{\omega} \wedge D_r\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\right) \tag{2.182}$$

Applicando note regole di derivazione

$$D_r\left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\right) = \left(D_r\boldsymbol{\omega}\right) \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge D_r\mathbf{r}$$

Per la proposizione 62:

$$D_r\boldsymbol{\omega} = D_\alpha\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha}$$

mentre

$$D_r\mathbf{r} = \mathbf{v}_r$$

cioè la velocità relativa. L'asserto segue immediatamente osservando che il termine a primo membro della (2.182) è l'accelerazione assoluta, mentre $D_r^2\mathbf{r} = \mathbf{a}_r$ ovvero l'accelerazione relativa. ■

Definizione 64 *La grandezza*

$$\mathbf{a}_{CC} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$$

*è l'***accelerazione di Coriolis** *o* **accelerazione complementare***; il termine*

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}\right)$$

*è l'***accelerazione centripeta** *; il termine* $\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r}$ *è* **accelerazione lineare***.*

Il teorema del Coriolis ci dice che l'accelerazione assoluta non è semplicemente la risultante dell'accelerazione relativa e dell'accelerazione di trascinamento, come nel caso di un moto di trascinamento puramente traslatorio, ma differisce dalla predetta risultante per il termine complementare $\mathbf{a}_{cc}$.

In generale, se K' compie un moto di traslazione e di rotazione, denotando con $\mathbf{R}\left(t\right)$ il vettore posizione di O' (rispetto a K), l'accelerazione di trascinamento è data

$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_* + \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{r} + \mathbf{a}_c \tag{2.183}$$

dove $\mathbf{a}_* = \ddot{\mathbf{R}}$, i.e. l'accelerazione assoluta di O'.

Esaminiamo alcuni casi particolari. Per un qualunque moto di trascinamento rotatorio per il quale la velocità angolare è parallela al vettore posizione della particella, l'accelerazione di Coriolis è nulla, mentre l'accelerazione di trascinamento è

$$\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r} \tag{2.184}$$

giacchè si annulla anche l'accelerazione centripeta.

Nel caso di *quiete relativa* i.e. $\mathbf{v}_r = \mathbf{0}$ si ha nuovamente $\mathbf{a}_{CC} = \mathbf{0}$.

2.7.3 Il lemma di Coriolis e le formule di Poisson. Il gruppo ortogonale $O(3)$

Riassumiamo i risultati del numero precedente. Assegnati due sistemi di riferimento $K(Oxyz)$ e $K'(O'x'y'z')$ aventi in comune le origini O, O', e K' ruotante attorno a un asse (in generale variabile nel tempo), una grandezza vettoriale $\mathbf{u}(t)$ ammette le seguenti rappresentazioni cartesiane:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= u_x(t)\,\mathbf{i} + u_y(t)\,\mathbf{j} + u_z(t)\,\mathbf{k} \\ \mathbf{u}(t) &= u'_x(t)\,\mathbf{i}' + u'_y(t)\,\mathbf{j}' + u'_z(t)\,\mathbf{k}' \end{aligned} \tag{2.185}$$

Abbiamo poi definito la derivata assoluta e la derivata relativa della predetta grandezza

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a &= \dot{u}_x\mathbf{i} + \dot{u}_y\mathbf{j} + \dot{u}_z\mathbf{k} \\ \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r &= \dot{u}'_x\mathbf{i}' + \dot{u}'_y\mathbf{j}' + \dot{u}'_z\mathbf{k}', \end{aligned}$$

legate dalla seguente relazione (lemma di Coriolis)

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \tag{2.186}$$

Nel corso della dimostrazione del predetto lemma, abbiamo stabilito:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \omega_z\mathbf{j}' - \omega_y\mathbf{k}' \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \omega_x\mathbf{k}' - \omega_z\mathbf{i}' \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = -\omega_y\mathbf{i}' - \omega_x\mathbf{j}' \end{cases}$$

Cioè le *formule di Poisson*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i}' \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j}' \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}' \end{cases} \tag{2.187}$$

Se $\mathbf{u}(t)$ è il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ otteniamo il legame tra la velocità relativa (cioè misurata da K') e la velocità assoluta (cioè misurata da K):

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

da cui l'interpretazione di velocità angolare per ciò che riguarda la grandezza $\boldsymbol{\omega}$ (che può ovviamente dipendere dal tempo).

La rotazione di K' rispetto a K può essere interpretata come una trasformazione di coordinate:

$$x' = f_1(x, y, z)\,, \quad y' = f_2(x, y, z)\,, \quad z' = f_3(x, y, z)\,,$$

dove f_k sono funzioni assegnate. Nel formalismo delle matrici, la trasformazione si scrive:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

essendo R la matrice di trasformazione che connette i due sistemi di coordinati. È chiaro che in tal modo stiamo studiando come si trasforma il vettore posizione $\mathbf{r} = (x, y, z)$ passando da K a K'. Per un qualunque vettore u si ha

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \tag{2.188}$$

con

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}' & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \end{pmatrix} \tag{2.189}$$

matrice ortogonale:

$$RR^T = R^T R = \bar{1} \tag{2.190}$$

dove R^T è la matrice trasposta, mentre $\bar{1}$ è la matrice identità di ordine 3. L'ortogonalità di R deriva dalla ortogonalità delle rispettive terne di versori. Più precisamente, si tratta di due basi ortonormali dello spazio euclideo tridimensionale. La normalizzazione (i.e. versori ovvero modulo unitario) si traduce nella seguente proprietà delle matrici ortogonali:

$$\det R = \pm 1 \tag{2.191}$$

Per essere più precisi, si considera il segno $(+)$, poiché il segno $(-)$ esprime una cosiddetta *trasformazione non continua*. Ad esempio, l'inversione degli assi (fig. 2.33)

$$x' = -x, \; y' = -y, \; z' = -z$$

è rappresentata dalla seguente matrice

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\bar{1}$$

che è manifestamente ortogonale con $\det R = -1$. Tale trasformazione non è continua in un senso che preciseremo più avanti.

Consideriamo ora il caso di una rotazione uniforme attorno all'asse z, per cui il vettore velocità angolare è

$$\boldsymbol{\omega} = k\omega, \;\; \text{con } \omega > 0 \text{ costante}$$

Ne consegue che l'angolo di rotazione segue la legge $\theta(t) = \omega t$. Per un assegnato istante di tempo t, consideriamo il valore corrispondente θ. Abbiamo quindi la configurazione di fig. 2.34.

Esplicitando i prodotti scalari quali elementi della matrice di rotazione, otteniamo

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.192}$$

Assumendo θ come variabile indipendente:

$$\lim_{\theta \to 0} R_z(\theta) = \bar{1},$$

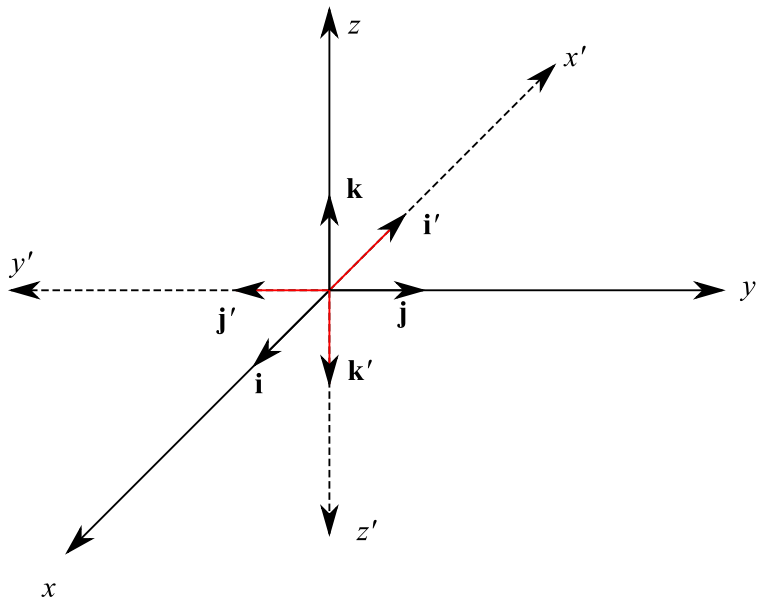


Figura 2.33: Inversione degli assi coordinati.

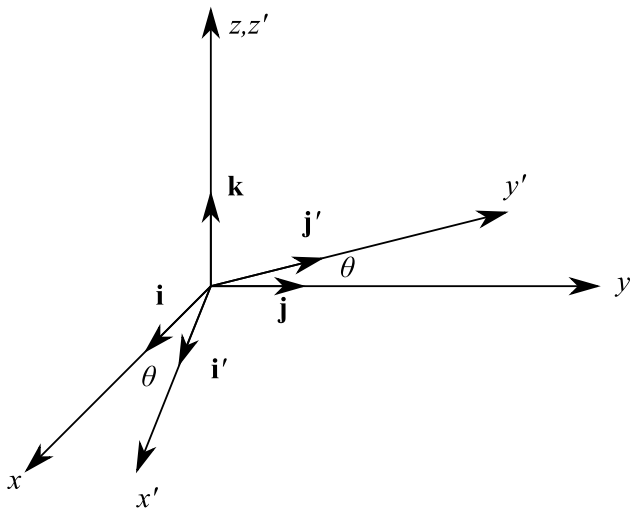


Figura 2.34: Il sistema di coordinate K' è ruotato di un angolo θ (in senso antioriario per un osservatore rivolto verso z) attorno all'asse z.

che si generalizza a una qualunque rotazione (non necessariamente attorno all'asse z)

$$\lim_{\theta \to 0} R(\theta) = \bar{1}$$

In altri termini, una qualunque rotazione del sistema di coordinate, è il risultato della composizione rotazioni infinitesime attorno allo stessos asse. Diversamente, un'inversione degli assi non è riducibilel a una successione di infinite rotazioni infinitesime. Incidentalmente:

$$\det R_z(\theta) = +1$$

mentre abbiamo visto che nel caso di una inversione il determinante è -1. Abbiamo quindi giustificato la locuzione *trasformazione non continua.*

In maniera del tutto analoga si stabiliscono le seguenti formule per ciò che riguarda le rotazioni attorno agli assi x, y

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.193}$$

Si noti che

$$R_x(\theta) R_y(\theta) \neq R_y(\theta) R_x(\theta)$$

E in generale

$$R(\theta) R'(\theta') = R'(\theta') R(\theta),$$

dove R e R' sono le matrici di rotazioni attorno a differenti assi. Ciò non deve sorprendere, giacché il prodotto righe per colonne è in generale, non commutativo.

Abbiamo quindi stabilito che una rotazione del sistema di coordinate è una trasformazione *ortogonale* delle coordinate (che è un caso speciale di trasformazione lineare implementata da una matrice non ortogonale). L'ortogonalità assicura la conservazione delle distanze e più in generale dei moduli dei vettori.

Denotiamo ora con $O(3)$ l'insieme delle matrici ortogonali di ordine r, quale sottoinsieme delle matrici di ordine 3 sul campo reale. La moltiplicazione righe per colonne è una legge di composizione interna in $O(3)$. Infatti:

$$(R_1 R_2)(R_1 R_2)^T = (R_1 R_2)\left(R_2^T R_1^T\right) = R_1\left(R_2 R_2^T\right) R_1^T = R_1 R_1^T = \bar{1}, \quad \forall R_1, R_2 \in O(3)$$

Tale legge verifica manifestamente le seguenti proprietà:

1. **Proprietà associativa**

   $R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2) R_3, \quad \forall R_1, R_2 \in O(3)$

2. **Esistenza dell'elemento neutro**

   $R\bar{1} = \bar{1}R, \quad \forall R \in O(3)$

3. **Esistenza dell'inverso**

4. $\exists R^{-1} \in O(3) \mid RR^{-1} = R^{-1}R = \bar{1}, \quad R^{-1} = R^T$

Come è noto, tali proprietà conferiscono all'insieme $O(3)$ la struttura algebrica di *gruppo non abeliano.* Chiamiamo il predetto gruppo **gruppo delle rotazioni**.

2.7.4 Il concetto di base ortonormale rotante

Riprendiamo l'equazione che lega la derivata assoluta di una funzione vettoriale $\mathbf{u}(t)$ alla derivata relativa della medesima funzione, determinata in un sistema di coordinate $K'(O'x'y'z')$ rotante rispetto al sistema $K(Oxyz)$ in cui è calcolata la predetta derivata assoluta:

$$\left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right|_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}, \tag{2.194}$$

essendo $\boldsymbol{\omega}$ il vettore velocità angolare di K'. Tale grandezza soddisfa le equazioni di Poisson

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i}' \\ \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j}' \\ \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{k}' \end{cases} \tag{2.195}$$

ove $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ sono i versori degli assi coordinati di K'. Per un assegnato vettore $\boldsymbol{\omega}$ le (2.195) costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali vettoriali (quindi sei equazioni differenziali ordinarie) nelle incognite $\mathbf{i}'(t), \mathbf{j}'(t), \mathbf{k}'(t)$. In sostanza, attraverso l'integrazione del predetto sistema, conosicmo la legge con cui i versori del sistema rotante variano in funzione del tempo. Si noti tuttavia, che nelle (2.195) il vettore $\boldsymbol{\omega}$ deve essere rappresentato nella base ortonormale $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ che possiamo chiamare *base rotante* e non nella base ortonormale del sistema fisso K, che possiamo denominare *base fissa*. D'altra parte, la (2.194) può essere scritta in una qualunque base ortonormale dello spazio euclideo tridimensionale. Ma se rappresentiamo il secondo membro della predetta equazione nella base rotante, tale dovrà essere il primo membro. Ad esempio, se $\mathbf{u}(t)$ è il vettore posizione $\mathbf{r}(t)$ di una particella, la (2.194) restituisce la ben nota legge di composizione delle velocità

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \tag{2.196}$$

Per quanto precede, il vettore velocità assoluta risulterà rappresentato nella base rotante, mentre ciò che è fisicamente interessante, sono le sue componenti cartesiane nella base fissa. Un esempio numerico è dato dal problema (risolto) n. 6.5 del testo [5]. Tutto ciò è una conseguenza di come vengono scritte le varie grandezze cinematiche:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \qquad (\text{in } K) \\ \mathbf{r}(t) &= x'(t)\,\mathbf{i}' + y'(t)\,\mathbf{j}' + z'(t)\,\mathbf{k}' \qquad (\text{in } K') \end{aligned}$$

La velocità assoluta è

$$\mathbf{v}_a = \frac{d}{dt}\left[x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\right] = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \equiv \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_a \tag{2.197}$$

La velocità relativa

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r &= \frac{d}{dt}\left[x'(t)\underset{\substack{\downarrow \\ \text{fisso}}}{\mathbf{i}'} + y'(t)\underset{\substack{\downarrow \\ \text{fisso}}}{\mathbf{j}'} + z'(t)\underset{\substack{\downarrow \\ \text{fisso}}}{\mathbf{k}'}\right] \\ &= \dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}' \equiv \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_r \end{aligned} \tag{2.198}$$

Se invece consideriamo $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ funzioni del tempo a causa della rotazione di K', ovvero se stiamo osservando il moto della particella nel sistema di riferimento K:

$$\mathbf{r}(t) = x'(t)\,\mathbf{i}'(t) + y'(t)\,\mathbf{j}'(t) + z'(t)\,\mathbf{k}'(t) \tag{2.199}$$

L'applicazione dell'operatore di derivazione $\frac{d}{dt}$ ad ambo i membri dell'equazione appena scritta, restituisce la derivata assoluta del vettore posizione, i.e. la velocità assoluta della particella

$$\mathbf{v}_a = \underbrace{\dot{x}'\mathbf{i}' + \dot{y}'\mathbf{j}' + \dot{z}'\mathbf{k}'}_{=\mathbf{v}_r} + \underbrace{x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}}_{=\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r}} \tag{2.200}$$

Abbiamo così ottenuto la rappresentazione cartesiana della velocità assoluta nella base rotante. Vediamo come si risolve con il formalismo delle matrici. Partiamo dal caso più semplice: una particella è ferma rispetto al sistema di coordinate $K\,(Oxyz)$ nel punto $(x_0, y_0, 0)$. Calcoliamo la sua velocità rispetto a un sistema di coordinate $K'\,(O'x'y'z')$ con $O' \equiv O$, $z' \equiv z$ e in rotazione uniforme rispetto a K attorno all'asse z in verso antiorario (relativamente a un osservatore fermo in K con i piedi in O' ed orientato nel verso delle z crescenti. Cfr. fig. 2.35).

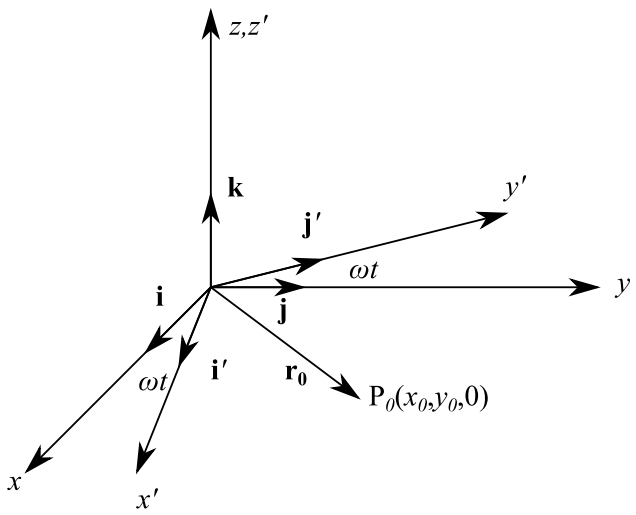


Figura 2.35: Rispetto all'osservatore K la particella è ferma nel piano xy (precisamente in P_0).

Mentre K vede la particella ferma in P_0, per l'osservatore K' la stessa particella compie un moto circolare uniforme nel piano coordinato $x'y'$ con velocità angolare (vettoriale) $-\omega$, ovvero in senso orario. Matematicamente:

$$\text{osservatore } K\text{: } \mathbf{r}(t) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} \equiv r_0 \Longrightarrow \mathbf{v}_a = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_a = \mathbf{0}$$

$$\text{osservatore } K'\text{: } \mathbf{r}(t) = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}';\;\; \mathbf{v}_r = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_r = \omega \wedge \mathbf{r}$$

Siamo tentati a scrivere

$$\omega \wedge \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0 & y_0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega y_0\mathbf{i} + \omega x_0\mathbf{j} \quad \text{(ERRATO!)}$$

Lo sviluppo corretto è

$$\omega \wedge \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & 0 & \omega' \\ x\prime & y\prime & 0 \end{vmatrix} = -\omega y'\mathbf{i}' + \omega x\prime\mathbf{j}'$$

Il problema è che non conosciamo come variano i versori della base rotante. Ma ciò si può ricavare, e a tale scopo applichiamo il formalismo delle matrici di rotazione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z(\omega t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

essendo

$$R(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne segue

$$x' = x\cos\omega t - y\sin\omega t, \quad y' = x\sin\omega t + y\cos\omega t$$

In particolare, per $(x, y, z) = (x_0, y_0, 0)$

$$x' = x_0\cos\omega t - y_0\sin\omega t, \quad y' = x_0\sin\omega t + y_0\cos\omega t$$

che sono le equazioni orarie del moto della particella rispetto a K'. È facile convincersi che è un moto circolare uniforme. Infatti, quadrando e sommando

$$x'^2 + y'^2 = r_0^2, \tag{2.201}$$

cioè la traiettoria è la circonferenza del piano coordinato $x'y'$ di centro l'origine e raggio r_0. Derivando otteniamo le componenti della velocità relativa

$$\dot{x}' = -\omega y', \quad \dot{y}' = \omega x',$$

e quindi la formula precedentemente trovata:

$$\mathbf{v}_r = -\omega y'\mathbf{i}' + \omega x\prime\mathbf{j}'$$

Consideriamo ora un esempio più complicato:

Esercizio 65 *Rispetto a un sistema di coordinate $K'(O'x'y'z')$ una pallina si muove secondo le seguenti leggi orarie:*

$$x'(t) = A\cos\Omega t, \; y'(t) = B\sin\Omega t, \quad z'(t) = Ct^2, \tag{2.202}$$

ove $A, B, C > 0$ sono costanti con le dimensioni di una lunghezza, mentre $\Omega > 0$ è una costante con le dimensioni di una frequenza angolare. Il sistema di coordinate $K'(O'x'y'z')$ ruota attorno all'asse z di un sistema di coordinate fisso $K(Oxyz)$ avente in comune l'origine O con K' e l'asse z. Determinare la velocità relativa e la velocità assoluta della pallina. Per quali valori delle predette costanti, l'osservatore K' vede la pallina muoversi lungo l'asse z?

Soluzione

Derivando le equazioni orarie fornite dall'esercizio, otteniamo immediatamente la velocità relativa:

$$\mathbf{v}_r = -\left(\Omega A \sin \Omega t\right) \mathbf{i}' + \left(\Omega B \cos \Omega t\right) \mathbf{j}' + 2Ct\mathbf{k}'$$

ove l'apice ci sta dicendo che ci riferiamo alla terna rotante. Per determinare la velocità assoluta, applichiamo il metodo delle matrici di rotazione. Già sappiamo che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_z\left(\omega t\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

essendo

$$R\left(\omega t\right) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertendo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z\left(\omega t\right)^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Per una matrice ortogonale, l'inversa coincide con la trasposta:

$$R_z\left(\omega t\right)^{-1} = R_z\left(\omega t\right)^{T} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \Omega t \cos \omega t + B \sin \Omega t \sin \omega t \\ -A \cos \Omega t \sin \omega t + B \sin \Omega t \cos \omega t \\ Ct^2 \end{pmatrix} \tag{2.203}$$

Ne consegue che le equazioni orarie della pallina nel riferimento K sono:

$$\begin{aligned} x &= A \cos \Omega t \cos \omega t + B \sin \Omega t \sin \omega t \\ y &= -A \cos \Omega t \sin \omega t + B \sin \Omega t \cos \omega t \\ z &= Ct^2, \end{aligned} \tag{2.204}$$

la cui derivata restituisce le componenti cartesiane (in K) della velocità assoluta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\Omega B - \omega A\right) \cos \Omega t \sin \omega t + \left(\omega B - \Omega A\right) \sin \Omega t \cos \omega t \\ \dot{y} &= \left(\Omega A - \omega B\right) \sin \Omega t \sin \omega t + \left(\Omega B - \omega A\right) \cos \Omega t \cos \omega t \\ \dot{z} &= 2Ct \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a = &\left[\left(\Omega B - \omega A\right) \cos \Omega t \sin \omega t + \left(\omega B - \Omega A\right) \sin \Omega t \cos \omega t\right] \mathbf{i} + \\ &+ \left[\left(\Omega B - \omega A\right) \cos \Omega t \sin \omega t + \left(\omega B - \Omega A\right) \sin \Omega t \cos \omega t\right] \mathbf{i} + 2Ct\mathbf{k} \end{aligned}$$

Se le costanti assegnate sono tali che

$$\begin{cases} \Omega B - \omega A = 0 \\ \omega B - \Omega A = 0 \end{cases}$$

la pallina compie un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse z, nel verso delle z crescenti. Infatti:

$$\mathbf{v}_a = 2Ct\mathbf{k}$$

Nelle figg. 2.36-2.37 riportiamo l'andamento della traiettoria della pallina rispetto a entrambe le terne di riferimento.

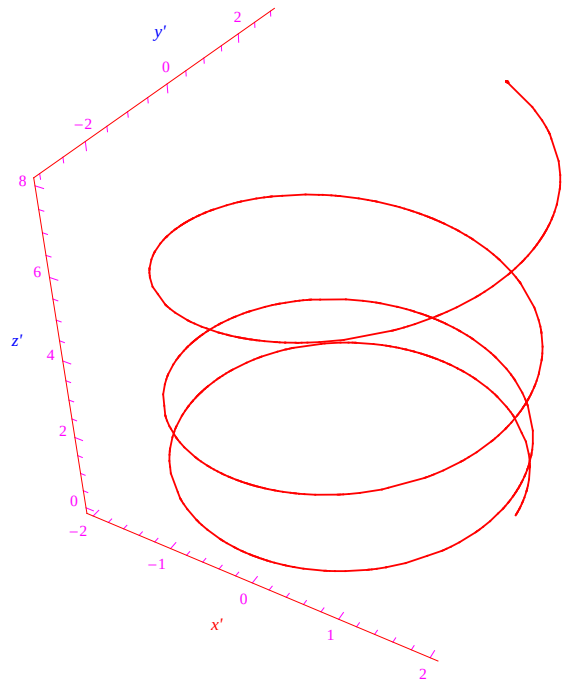


Figura 2.36: Traiettoria della pallina rispetto al sistema di riferimento rotante.

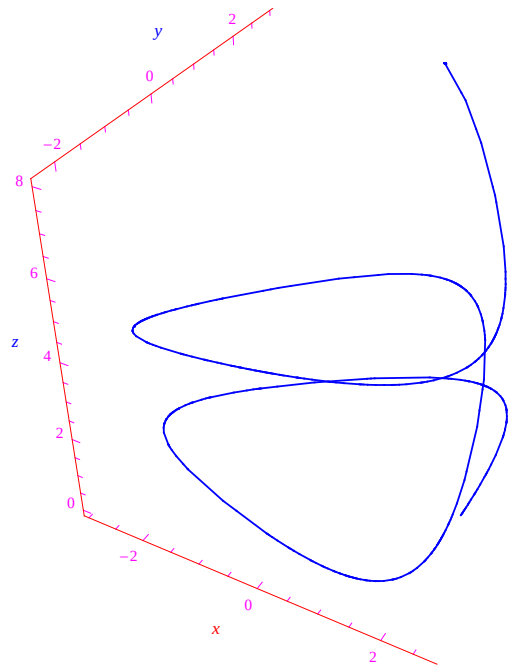


Figura 2.37: Traiettoria della pallina rispetto al sistema di riferimento fisso.

Esercizio 66 *Le equazioni orarie del moto di una particella rispetto a un sistema di coordinate fisso $K\,(Oxyz)$ sono:*

$$x\,(t) = A\cos\Omega t, \quad y\,(t) = A\sin\Omega t, \quad z\,(t) = Ct,$$

essendo $A, B, C > 0$ costanti con le dimensioni di una lunghezza, e $\Omega > 0$ una costante con le dimensioni di una frequenza angolare.

Studiare il moto della particella rispetto a un sistema di coordinate $K'\,(O'x'y'z')$ che compie un moto di rotazione uniforme attorno all'asse $z \equiv z'$ (e $O' \equiv O$) con velocità angolare ω.

Soluzione

Rispetto a K la traiettoria è un'elica cilindrica di passo C, come illustrato in fig. 2.38.

Passiamo al sistema rotante K':

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{cases} x' = x\cos\omega t - y\sin\omega t \\ y' = x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z' = z \end{cases} \tag{2.205}$$

In tal modo otteniamo le equazioni orarie rispetto a K'

$$x'\,(t) = A\cos\Omega' t, \quad y'\,(t) = A\sin\Omega' t, \quad z'\,(t) = Ct,$$

essendo

$$\Omega' = \Omega + \omega \neq 0, \quad \forall\omega \neq -\Omega$$

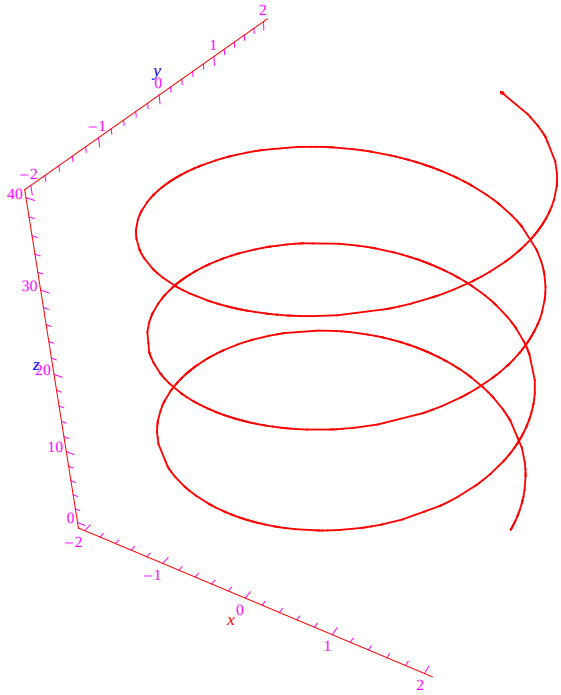


Figura 2.38: Traiettoria della pallina rispetto al sistema di riferimento fisso (esercizio 66)

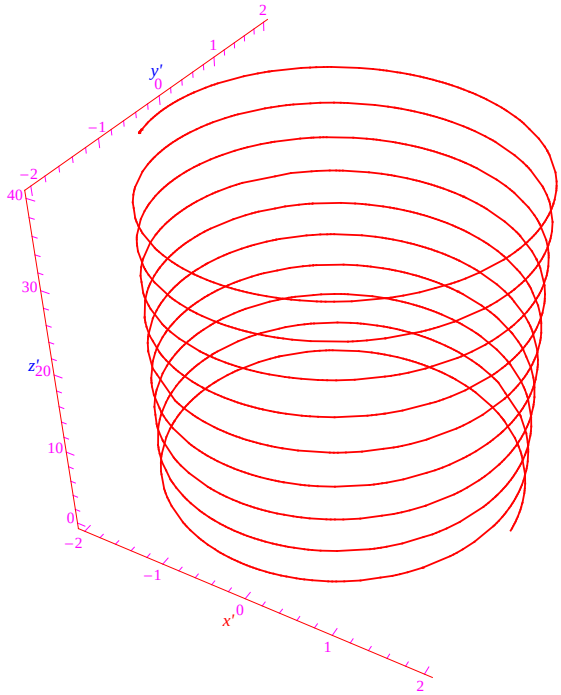


Figura 2.39: Traiettoria della pallina rispetto al sistema di riferimento rotante (esercizio 66)

Ne consegue che rispetto al sistema rotante la traiettoria è ancora un'elica cilindrica con il medesimo passo (fig. 2.39).

Fa eccezione il caso in cui K' ruota con velocità angolare $\omega = -\Omega$. Con tale velocità la traiettoria rispetto a K' è la retta

$$x' = A,\ y' = 0,\ z' = Ct$$

cioè la retta passante per $(A, 0, 0)$ e parallela all'asse z. Questo risultato si generalizza a un qualunque sistema di coordinate K' in rotazione (non necessariamente uniforme) attorno a un asse assegnato: una qualunque elica cilindrica di asse coincidente con l'asse di rotazione, è invariante rispetto alla trasformazione di coordinate che ci fa passare da K a K'.

Esercizio 67 *Una ballerina osserva da ferma il moto di una pallina lungo una traiettoria non rettilinea. A quale velocità la ballerina deve ruotare su sé stessa, per vedere la medesima pallina muoversi lungo una retta?*

Soluzione

Sia $K\,(Oxyz)$ un sistema di riferimento solidale alla ballerina B quando è ferma. Orientiamo l'asse z, coincidente con l'asse di simmetria di B, nel verso che va dai piedi alla testa di B. Denotiamo, quindi, con γ la traiettoria della pallina osservata da B quando è ferma, supponendo note le equazioni orarie del moto e quindi, la rappresentazione parametrica:

$$x = x\,(t)\,,\ y = y\,(t)\,,\ \ z\,(t) = z\,(t)\,,\quad t \geq 0, \tag{2.206}$$

essendo $t = 0$ l'istante in cui B inizia a ruotare.

Sia $K'\,(O'x'y'z')$ il sistema di riferimento solidale a B in rotazione e tale che a $t = 0$ è $K' \equiv K$ (fig. 2.40).

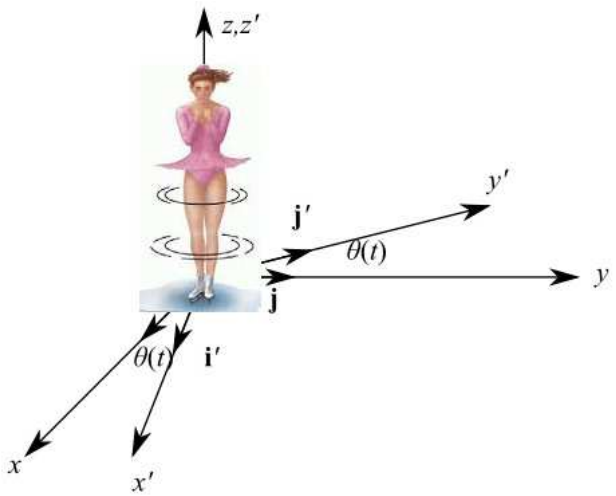


Figura 2.40: Sistemi di riferimento dell'esercizio 67).

Indicando con $\theta\,(t)$ l'angolo di cui è ruotato l'asse x' al tempo t, si ha dalle formule di trasformazione che ci fanno passare dal sistema di coordinate K al sistema K':

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta\,(t) - y\sin\theta\,(t) \\ y' = x\cos\theta\,(t) + y\sin\theta\,(t) \\ z' = z \end{cases} \tag{2.207}$$

In particolare, se x, y, z sono le (2.206), otteniamo una rappresentazione parametrica della traiettoria γ' vista da B:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\cos\theta(t) - y(t)\sin\theta(t) \\ y'(t) = x(t)\cos\theta(t) + y(t)\sin\theta(t) \\ z'(t) = z(t) \end{cases} \tag{2.208}$$

Senza perdita di generalità, supponiamo che γ sia una curva del piano coordinato xy del sistema fisso, per cui $z(t) = 0$. La nostra richiesta è che γ' sia una retta del piano coordinato $x'y'$ del sistema rotante, e ancora senza perdita di generalità, supponiamo che sia il semiasse positivo y'. Ciò implica

$$x'(t) \equiv 0 \Longleftrightarrow x(t)\cos\theta(t) - y(t)\sin\theta(t),$$

da cui

$$\theta(t) = \arctan\left[\frac{x(t)}{y(t)}\right]$$

e quindi la velocità angolare di B

$$\omega(t) = \dot{\theta} = \frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{r(t)^2}, \qquad r(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$$

Cioè

$$\omega(t) = \frac{2\dot{A}(t)}{r(t)^2}, \tag{2.209}$$

dove $\dot{A}(t)$ è la velocità aereolare della pallina. Ad esempio, se γ è l'arco di parabola

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2}a_0 t^2,$$

ove v_0 è la velocità iniziale orientata lungo l'asse x positivo, e a_0 l'accelerazione orientata lungo l'asse y positivo, si ha

$$\omega(t) = \frac{2a_0 v_0}{4v_0^2 + a_0 t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2.7.5 La formica di Coriolis

Definizione 68 *Dicesi* **formica di Coriolis** *un punto materiale che si muove con velocità costante lungo una sbarra che ruota uniformemente attorno a un'estremità fissa.*

Il problema che si apre consiste nel determinare l'accelerazione della formica rispetto alla Terra (che con buona approssimazione, possiamo considerare "ferma"). Sia $K(Oxyz)$ una terna terrestre con origine coincidente con O', essendo tale punto l'origine di un riferimento $K'(O'x'y'z')$ solidale alla sbarra e tale che nell'istante iniziale $t = 0$ è sovrapposto a K (fig. 2.41).

Rispetto a K' la formica compie un moto rettilineo ed uniforme lungo la sbarra, avendo orientato l'asse x' lungo quest'ultima. Quindi la funzione vettoriale $\mathbf{r}(t)$ che definisce il vettore posizione della formica in K' è

$$\mathbf{r}(t) = x'(t)\,\mathbf{i}' = v_r t\mathbf{i}',$$

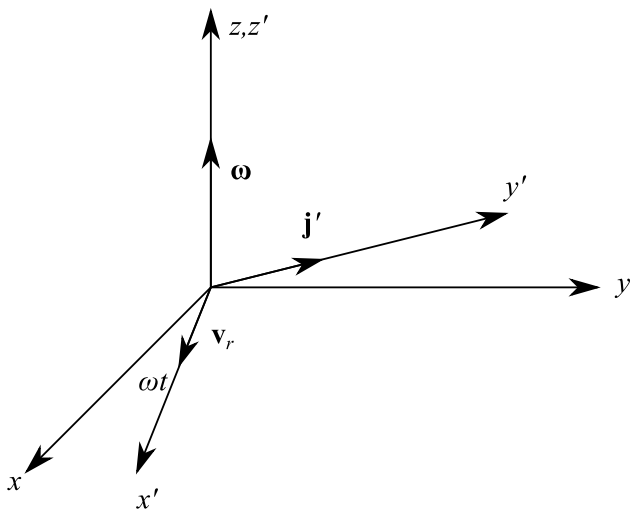


Figura 2.41: Il sistema di riferimento $K\,(Oxyz)$ è solidale alla Terra, mentre $K'\,(Ox'y'z')$ è solidale alla sbarra.

essendo v_r il modulo della velocità relativa (costante). Per il teorema del Coriolis, l'accelerazione della formica rispetto alla Terra è

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_{CC},$$

dove l'accelerazione di Coriolis è

$$\mathbf{a}_{CC} = 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r$$

mentre l'accelerazione di trascinamento è

$$\mathbf{a}_\tau = \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}),$$

dove l'accelerazione lineare $\boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r}$ è nulla, giacché tale è l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$. Sopravvive solo il termine centripeto:

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r})$$

facilmente calcolabile giacché

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \omega r \mathbf{j}',$$

onde

$$\mathbf{a}_c = -\omega^2 r \mathbf{i}'$$

cosicché l'accelerazione di trascinamento è costantemente orientata verso l'origine di entrambi i riferimenti cartesiani. Anche l'accelerazione di Coriolis si calcola facilmente tenendo conto della disposizione dei vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{v}_r$:

$$\mathbf{a}_{CC} = 2\omega v_r \mathbf{j}'$$

Cioè, l'accelerazione di Coriolis è costantemente orientata secondo una direzione perpendicolare alla sbarra in rotazione. Per determinare la traiettoria della formica rispetto al riferimento terrestre, utilizziamo il formalismo delle matrici di rotazione che ci permettono di passare dalle coordinate (x, y, z) alle (x', y', z'). Più precisamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Cioè

$$x = x' \cos \omega t + y' \sin \omega t, \;\; y = -x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \;\; z = z' \tag{2.210}$$

Le equazioni orarie del moto della formica rispetto a K' sono

$$x'(t) = v_r t, \;\; y'(t) = 0, \;\; z'(t) = 0,$$

che immesse nelle (2.210) restituiscono le equazioni orarie del moto della formica rispetto alla Terra:

$$x(t) = v_r t \cos \omega t, \;\; y(t) = -v_r t \sin \omega t, \;\; z'(t) = 0,$$

i.e. una rappresentazione parametrica della traiettoria della formica. Quadrando e sommando otteniamo la rappresentazione cartesiana della predetta traiettoria:

$$x^2 + y^2 = v_r^2 t^2,$$

ovvero una circonferenza del piano coordinato xy di centro l'origine e raggio $\rho(t) = v_r t$. In altri termini, la formica descrive una circonferenza di raggio crescente linearmente con il tempo.

Esercizio 69 *(Testo tratto da [3]. La soluzione è nostra)*

Consideriamo il dispositivo meccanico di fig. 2.42. In un piano orizzontale, un'asta L ruota in senso antiorario attorno a un'estremità fissa O, con velocità angolare $\omega(t)$. Una rondella P scorre lungo l'asta con velocità $v_r(t)$ rispetto all'asta.

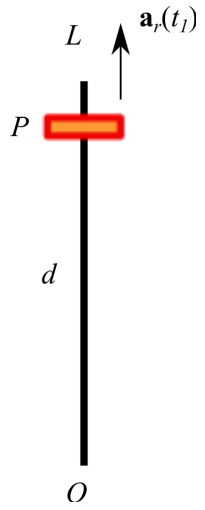


Figura 2.42: Esercizio 69.

In un istante t_1 si sa che

1. $v_r(t_1) = 4\,\mathrm{m/s}$
2. $a_r(t_1) = 3\,\mathrm{m/s^2}$ *(accelerazione relativa)*
3. $\omega(t_1) = 5 rad/\mathrm{s}$
4. $\alpha(t_1) = -10 rad/\mathrm{s}^2$ *(accelerazione angolare)*
5. $d = 2\,\mathrm{m}$ *(distanza da O all'istante t_1)*

Si determini l'accelerazione assoluta di P nell'istante t_1.

Soluzione

Denotiamo con $K\,(Oxyz)$ un sistema di riferimento rispetto al quale ci proponiamo di studiare il moto di rotazione dell'asta e quindi, del moto assoluto della rondella. Sia $K'\,(O'x'y'z')$ un sistema di riferimento solidale all'asta, con l'origine $O' \equiv O$, avendo orientato l'asse x' secondo la direzione dell'asta L con orientamento da O verso P, come in fig. 2.43.

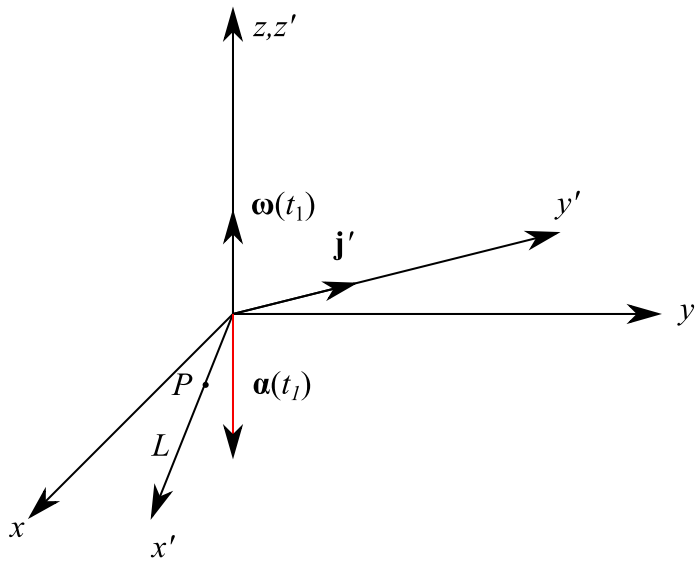


Figura 2.43: Esercizio 69.

Per il teorema di Coriolis, lo sviluppo dell'accelerazione assoluta della rondella in funzione delle corrispondenti grandezze realtive, è dato da:

$$\mathbf{a}_a\,(t_1) = \mathbf{a}_r\,(t_1) + \mathbf{a}_\tau\,(t_1) + \mathbf{a}_{CC}\,(t_1)\,, \tag{2.211}$$

dove $\mathbf{a}_r\,(t_1)$ è l'accelerazione relativa

$$\mathbf{a}_r\,(t_1) = a_r\,(t_1)\,\mathbf{i}'$$

$\mathbf{a}_\tau\,(t_1)$ è l'accelerazione di trascinamento

$$\mathbf{a}_\tau\,(t_1) = \mathbf{a}_{lin}\,(t_1) + \mathbf{a}_c\,(t_1)$$

Qui $\mathbf{a}_{lin}\,(t_1)$ e $\mathbf{a}_c\,(t_1)$ sono rispettivamente l'accelerazione lineare e l'accelerazione centripeta:

$$\mathbf{a}_{lin}\,(t_1) = \underbrace{\boldsymbol{\alpha}\,(t_1) \wedge \mathbf{r}\,(t_1)}_{\alpha(t_1)\perp\mathbf{r}} \underset{|\mathbf{r}(t_1)|=d}{=} -\left[\alpha\,(t_1)\,d\right]\mathbf{j}', \tag{2.212}$$

per cui l'accelerazione lineare è parallela e concorde all'asse y', poiché $\alpha\,(t_1) < 0$. L'accelerazione centripeta vale

$$\mathbf{a}_c\,(t_1) = \boldsymbol{\omega}\,(t_1) \wedge \underbrace{\left[\boldsymbol{\omega}\,(t_1) \wedge \mathbf{r}\,(t_1)\right]}_{=(\omega d)\mathbf{j}'} = \left(\omega^2 d\right)\underbrace{\mathbf{k} \wedge \mathbf{j}'}_{=-\mathbf{i}'}$$

cosicché è orientata verso O, come appunto deve essere. L'accelerazione di Coriolis è

$$\mathbf{a}_{CC}(t_1) = 2\underbrace{\boldsymbol{\omega}(t_1) \wedge \mathbf{v}_r(t_1)}_{\boldsymbol{\omega}(t_1)\perp\mathbf{v}_r(t_1)} = 2\omega(t_1)\, v_r(t_1)\, \mathbf{j}'$$

Per determinare il vettore risultante i.e. l'accelerazione assoluta, è conveniente tracciare i singoli vettori nel piano coordinato xy. A tale scopo, calcoliamo i moduli dei singoli vettori a partire dai dati numerici forniti dall'esercizio, omettendo la dipendenza da t (o meglio, il valore t_1):

$$a_{lin} = 20\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2, \quad a_c = 50\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2, \; a_{CC} = 40\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

È facile coinvincersi (in base alle relazioni vettoriali trovate più sopra) che il diagramma vettoriale è quello di fig. 2.44.

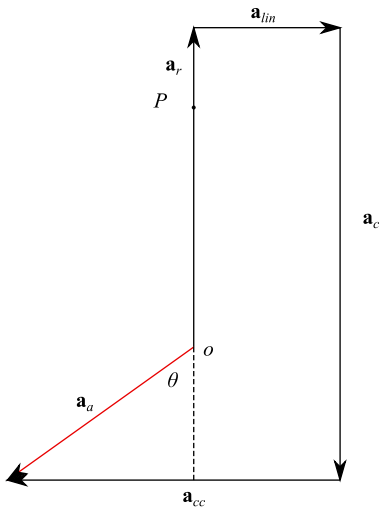


Figura 2.44: Composizione delle accelerazioni. Esercizio 69.

Segue

$$a_a = \sqrt{(a_c - a_r)^2 + (a_{CC} - a_{lin})^2} = 51.08\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2 \tag{2.213}$$

Il corrispondente vettore forma con l'asta un angolo

$$\theta = \arctan\left(\frac{a_{CC} - a_{lin}}{a_c - a_r}\right) \simeq 25^\circ \tag{2.214}$$

Bibliografia

[1] Halliday D. Resnick R., Krane K.S. *Fisica 1.* Ambrosiana, 2011.

[2] Demidovic B.P., *Esercizi e problemi di analisi matematica*, 2010.

[3] Sette D. Wanderlingh F. *Guida alla soluzione di problemi di fisica : meccanica, onde, termodinamica*, 1967

[4] Tedone G., *Meccanica razionale.* Veschi

[5] Spiegel M.R. *Meccanica Razionale*, Schaum