Integrazione di funzioni varie

[`file scaricato da http://www.extrabyte.info`]

Esercizio 927

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$3-2x-x^2=-(x+1)^2+4$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x+1=2\sin t \Longrightarrow dx=2\cos t dt$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3-2x-x^2}dx &= 2\int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t dt \\ &= 4\int \cos^2 t dt \\ &= 2\int (\cos 2t+1)\, dt \\ &= 2\sin t\cos t+2t+C\end{aligned}$$

Ripristiniamo x:

$$\begin{aligned}\cos t &= \sqrt{1-\sin^2 t} \\ &= \sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}\end{aligned}$$

Perciò:

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx=\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}+C$$

Esercizio 928

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione:

$$x = 3\sinh t,$$

donde:

$$dx = 3\cosh t, \;\; x^2 + 9 = 9\cosh^2 t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 9\int \sinh^2 t dt \tag{1}$$

Dalla formula:

$$\cosh 2t = 2\sinh^2 t + 1,$$

ricaviamo

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 t dt &= \frac{1}{2}\int (\cosh 2t - 1)\, dt \\ &= \frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sinh t \cosh t - \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Sostituendo nella (1)

$$F(t) = \frac{9}{2}\sinh t \cosh t - \frac{9}{2}t + C$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\operatorname{arcsin\,h}\frac{x}{3} + C$$

Possiamo esprimere $\operatorname{arcsinh}\frac{x}{3}$ attraverso la funzione logaritmo. Infatti, è noto che:

$$\text{arcsin}\,\text{h}y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

per cui:

$$\begin{aligned}\text{arcsin}\,\text{h}\frac{x}{3} &= \ln\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{9+x^2}\right) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{9+x^2}\right) - \ln 3\end{aligned}$$

Incorporando $-\ln 3$ nella costante di integrazione:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{9+x^2} - \frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right) + C$$

Esercizio 929

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2-2x+2}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \sqrt{x^2-2x+2}dx = \int \sqrt{(x-1)^2+1}dx$$

Quindi eseguiamo la sostituzione:

$$x - 1 = \sinh t,$$

donde:

$$dx = \cosh t, \quad \sqrt{(x-1)^2+1} = \cosh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \int \cosh^2 t dt \tag{2}$$

Dalla formula:

$$\cosh 2t = 2\cosh^2 t - 1,$$

ricaviamo

$$\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 t dt &= \frac{1}{2}\int (\cosh 2t + 1)\, dt \\ &= \frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sinh t \cosh t + \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Sostituendo nella (2)

$$F(t) = \frac{1}{2}\sinh t \cosh t + \frac{t}{2} + C$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2 - 2x + 2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsin h}(x-1) + C$$

Esprimiamo arcsinh$(x-1)$ attraverso la funzione logaritmo.

$$\operatorname{arcsin h}(x-1) = \ln\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\right)$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{9 + x^2} - \frac{9}{2}\ln\left(x + \sqrt{9 + x^2}\right) + C$$

Esercizio 930

Calcolare l'integrale:

$$\int x\sqrt{x^2 + x + 1} dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 = (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ \Longrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ k^2 + l = 1 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{1}{2},\, l = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Perciò:

$$\int x\sqrt{x^2 + x + 1} dx = \int x\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

Quindi eseguiamo la sostituzione:

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t,$$

donde:

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t dt \\
&= \frac{3}{4}\int\cosh^2 t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh t-\frac{1}{2}\right)dt \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\int\cosh^2 t\sinh t dt-\frac{3}{8}\int\cosh^2 t dt
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due integrali a secondo membro:

$$\int\cosh^2 t\sinh t dt=\int\cosh^2 t d(\cosh t)=\frac{1}{3}\cosh^3 t$$

Il secondo integrale è già stato calcolato negli esercizi precedenti:

$$\int\cosh^2 t dt=\frac{1}{2}\sinh t\cosh t+\frac{t}{2}$$

Quindi:

$$F(t)=\frac{\sqrt{3}}{8}\cosh^3 t-\frac{3}{16}\sinh t\cosh t-\frac{3}{16}t+C$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x. A tale scopo osserviamo che:

$$\begin{aligned}
t &= \operatorname{arcsin h}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \ln\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right] \\
&= \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\ln\frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} \\
&-\frac{3}{16}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right)+C
\end{aligned}$$

Esercizio 931

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2-4}dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione:

$$x = 2\cosh t,$$

donde:

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t, \ \ \sqrt{x^2-4} = 2\sinh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 4\int \sinh^2 t dt$$

Dalla formula:

$$\cosh 2t = 2\sinh^2 t + 1,$$

ricaviamo:

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1)$$

Quindi

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\int (\cosh 2t - 1)\, dt = 2\int \cosh 2t dt - 2\int dt \\ &= \sinh 2t - 2t + C \\ &= 2\sinh t\cosh t - 2t + C \end{aligned}$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x. A tale scopo osserviamo che:

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{arccos h}\frac{x}{2} = \ln\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right) \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right) - \ln 2 \end{aligned}$$

Incorporando $-\ln 2$ nella costante di integrazione:

$$\int \sqrt{x^2-4}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2-4}\right)$$

Esercizio 932

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2+1}dx$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione:

$$x = \sinh t,$$

donde:

$$dx = \cosh t, \ \ \sqrt{x^2+1} = \cosh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \int \cosh^2 t dt,$$

che è già stato calcolato più volte negli esercizi precedenti:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{4}\sinh 2t + \frac{t}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\sinh t \cosh t + \frac{t}{2} + C \end{aligned}$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x. A tale scopo osserviamo che:

$$t = \arcsin \mathrm{h} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Esercizio 933

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2+x}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}
x^2 + x &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ l + k^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{1}{2}, l = -\frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$x + \frac{1}{2} = \cosh t,$$

donde:

$$dx = \frac{1}{2} \sinh t, \quad \sqrt{x^2 + x} = \frac{1}{2} \sinh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \frac{1}{4} \int \sinh^2 t dt,$$

Esprimiamo il $\sinh^2 t$ attraverso il $\cosh 2t$:

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2} (\cosh 2t - 1),$$

cosicché:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \frac{1}{8} \int (\cosh 2t - 1) \, dt \\
&= \frac{1}{16} \sinh 2t - \frac{t}{8} + C \\
&= \frac{1}{8} \sinh t \cosh t - \frac{t}{8} + C
\end{aligned}$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x.

$$\begin{aligned}
\cosh t &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \\
\sinh t &= 2\sqrt{x^2 + x} \\
t &= \operatorname{arccos h}\left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \ln\left|2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 2\sqrt{x^2 + x}\right| \\
&= \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x}\right| - \ln 2
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2+x}dx = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right| + C$$

Esercizio 934

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2-6x-7}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2-6x-7 &= (x+k)^2+l = x^2+2kx+k^2+l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2k=-6 \\ l+k^2=-7 \end{cases} \Longrightarrow k=-3, l=-16 \\ &\Longrightarrow x^2-6x-7 = (x-3)^2-16 \end{aligned}$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$x-3 = 4\cosh t,$$

donde:

$$dx = 4\sinh t, \ \ \sqrt{x^2-6x-7} = 4\sinh t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 16\int \sinh^2 t dt,$$

L'integrale $\int \sinh^2 t dt$ è già stato calcolato nell'esericizio precedente, quindi:

$$F(t) = 8\sinh t\cosh t - 8t + C$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x.

$$
\begin{aligned}
\cosh t &= \frac{x-3}{4} \\
\sinh t &= \frac{1}{4}\sqrt{x^2-6x-7} \\
t &= \operatorname{arccos h}\left(\frac{x-3}{4}\right) \\
&= \ln\left|\frac{x-3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{x^2-6x-7}\right| \\
&= \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right| - \ln 4
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\int \sqrt{x^2-6x-7}dx = \frac{x-3}{2}\int \sqrt{x^2-6x-7}dx - 8\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}\right| + C
$$

Esercizio 935

Calcolare l'integrale:

$$
\int \sin x \sinh x dx
$$

***

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti:

$$
\begin{aligned}
\int \sin x \sinh x dx &= \int \sin x d(\cosh x) \\
&= \sin x \cosh x - \int \cosh x \cos x dx
\end{aligned}
$$

$\int \cosh x \cos x dx$ può essere calcolato per parti:

$$
\begin{aligned}
\int \cosh x \cos x dx &= \int \cos x d(\sinh x) \\
&= \cos x \sinh x + \int \sin x \sinh x dx
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'equazione precedente:

$$
\int \sin x \sinh x dx = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x - \int \sin x \sinh x dx,
$$

che può essere risolta rispetto a $\int \sin x \sinh x dx$

$$
\int \sin x \sinh x dx = \frac{1}{2}(\sin x \cosh x - \sinh x \cos x) + C
$$

Esercizio 936

Calcolare l'integrale:

$$\int \left(x^2+1\right)^2 e^{2x} dx \tag{3}$$

***

Soluzione
Si potrebbe integrare per parti, ma conviene utilizzare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\int \left(x^2+1\right)^2 e^{2x} dx = \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right) e^{2x} \tag{4}$$

Derivando primo e secondo membro della (4):

$$\begin{aligned}
\left(x^2+1\right)^2 e^{2x} &= \left(4Ax^4+3Bx^3+Cx^2+Dx+E\right) e^{2x} \\
&+ 2e^{2x}\left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right) \\
&= e^{2x}\left[2Ax^4+(4A+2B)\,x^3+(3B+2C)\,x^2+(2C+2D)\,x+(D+2E)\right]
\end{aligned}$$

Cioè:

$$x^4+2x^2+1 = 2Ax^4+(4A+2B)\,x^3+(3B+2C)\,x^2+(2C+2D)\,x+(D+2E)$$

Per il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2A=1 \\ 2A+B=0 \\ 3B+2C=2 \\ C+D=0 \\ D+2E=1 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$A=\frac{1}{2}, B=-1, C=\frac{5}{2}, D=-\frac{5}{2}, E=\frac{7}{4}$$

Quindi l'integrale:

$$\int \left(x^2+1\right)^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{4}\left(2x^4-4x^3+10x^2-10x+7\right)+C$$

Esercizio 937

Calcolare l'integrale:

$$\int x^2 \cos^2 3x dx \tag{5}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la nota formula:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

cioè:

$$\cos^2 3x = \frac{1}{2}(\cos 6x + 1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos^2 3x dx &= \frac{1}{2}\int x^2 (\cos 6x + 1)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int x^2 \cos 6x + \int x^2 dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\int x^2 \cos 6x dx}_{F_1(x)} + \frac{1}{6}x^3\end{aligned} \tag{6}$$

Calcoliamo a parte $F_1(x)$:

$$F_1(x) \overset{t=6x}{\rightarrow} F_1(t) = \frac{1}{216}\int t^2 \cos t dt = \frac{1}{216}\left(\int t^2 \sin t dt - 2\int t \sin t dt\right)$$

$$\begin{aligned}\int t^2 \sin t dt &= \int t d(-\cos t) = -t\cos t + \int \cos t dt \\ &= -t\cos t + \sin t \\ \int t \sin t dt &= \int t d(-\cos t) = -t\cos t + \int \cos t dt \\ &= -t\cos t + \sin t\end{aligned}$$

$$F_1(t) = \frac{1}{216}\left(t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t\right)$$

Ripristinando x:

$$F_1(x) = \frac{1}{216}\left(36x^2 \sin 6x + 12x\cos 6x - 2\sin 6x\right)$$

Sostituendo nella (6):

$$\int x^2 \cos^2 3x dx = \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{x^2}{2}\sin 6x + \frac{x}{6}\cos 6x - \frac{1}{36}\sin 6x\right) + C$$

Esercizio 938

Calcolare l'integrale:

$$\int x \sin x \cos 2x dx \tag{7}$$

***

Soluzione
Sviluppiamo $\sin x \cos 2x$ con le formule di Werner:

$$\sin x \cos 2x = \frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x)$$

Determiniamo:

$$\begin{aligned} \int \sin x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 3x - \sin x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x \end{aligned} \tag{8}$$

La (8) ci permette di calcolare l'integrale (7) per parti

$$\begin{aligned} \int x \sin x \cos 2x dx &= \int x d \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x \right) \\ &= \frac{x}{2} \cos x - \frac{x}{6} \cos 3x - \int \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x \right) dx \\ &= \frac{x}{2} \cos x - \frac{x}{6} \cos 3x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{18} \sin 3x + C \end{aligned}$$

Esercizio 939

Calcolare l'integrale:

$$\int e^{2x} \sin^2 x dx \tag{9}$$

***

Soluzione
Svincoliamoci da $\sin^2 x$ attraverso la nota formula di duplicazione:

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int e^{2x} \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int e^{2x} \left(1 - \cos 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} F\left(x\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

essendo:

$$F\left(x\right) \stackrel{def}{=} \int e^{2x} \cos 2x dx \stackrel{t=2x}{\to} F\left(t\right) = \frac{1}{2} \int e^{t} \cos t dt$$

L'ultimo integrale si calcola per parti:

$$\begin{aligned}
\int e^{t} \cos t dt &= \int e^{t} d\left(\sin t\right) = e^{t} \sin t - \int e^{t} \sin t dt \\
&= e^{t} \sin t - \int e^{t} d\left(-\cos t\right) \\
&= e^{t} \sin t + e^{t} - \int e^{t} \cos t dt,
\end{aligned}$$

risolvendo rispetto a $\int e^{t} \cos t dt$:

$$\int e^{t} \cos t dt = \frac{e^{t}}{2} \left(\sin t + \cos t\right)$$

Quindi:

$$F\left(x\right) = \frac{e^{2x}}{4} \left(\sin 2x + \cos 2x\right)$$

Sostituendo nella (10):

$$\begin{aligned}
\int e^{2x} \sin^2 x dx &= \frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{8} \left(\sin 2x + \cos 2x\right) \\
&= \frac{e^{2x}}{8} \left(2 - \sin 2x - \cos 2x\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio 940

Calcolare l'integrale:

$$\int e^{x} \sin x \sin 3x dx \tag{11}$$

***

Soluzione
Sviluppiamo $\sin x \sin 3x$ con le formule di Werner:

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 4x\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \sin 3x dx &= \frac{1}{2}\int e^x \left(\cos 2x - \cos 4x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int e^x \cos 2x dx - \int e^x \cos 4x dx\right)\end{aligned} \tag{12}$$

Calcoliamo a parte i due integrali, procedendo per parti:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos 2x dx &= \int e^x d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \\ &= \frac{e^x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int e^x \sin 2x dx\end{aligned}$$

Eseguiamo un'integrazione per parti su $\int e^x \sin 2x dx$:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin 2x dx &= \int e^x d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \\ &= -\frac{e^x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int e^x \cos 2x dx,\end{aligned}$$

che sostituita nella precedente:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{2}\sin 2x + \frac{e^x}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}\int e^x \cos 2x dx,$$

che risolta rispetto a $\int e^x \cos 2x dx$:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2e^x}{5}\left(\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) \tag{13}$$

Passiamo all'altro integrale:

$$\int e^x \cos 4x dx = \int e^x d\left(\frac{\sin 4x}{4}\right) = \frac{e^x}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 4x dx$$

Eseguiamo un'integrazione per parti su $\int e^x \sin 4x dx$:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin 4x dx &= \int e^x d\left(-\frac{\cos 4x}{2}\right) \\ &= -\frac{e^x}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\int e^x \cos 4x dx,\end{aligned}$$

che sostituita nella precedente:

$$\int e^x \cos 4x dx = \frac{e^x}{4} \sin 4x + \frac{e^x}{16} \cos 4x - \frac{1}{16} \int e^x \cos 4x dx,$$

che risolta rispetto a $\int e^x \cos 4x dx$:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{4e^x}{17} \left(\sin 4x + \frac{1}{4} \cos 2x \right) \tag{14}$$

Sostituendo le (13)-(14) nella (12):

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx = \frac{e^x}{2} \left(\frac{2 \sin 2x + \cos 2x}{5} - \frac{4 \sin 4x + \cos 4x}{17} \right) \tag{15}$$

Esercizio 941

Calcolare l'integrale:

$$\int x e^x \cos x dx \tag{16}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int x e^x \cos x dx &= \int x e^x d (\sin x) \\ &= x e^x \sin x - \int \sin x d (x e^x) \\ &= x e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{F_1(x)} - \underbrace{\int x e^x \sin x dx}_{F_2(x)} \end{aligned} \tag{17}$$

Calcoliamo a parte $F_1 (x), F_2 (x)$:

$$\begin{aligned} F_1 (x) &= \int \sin x d (e^x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \sin x - \int \cos x d (e^x) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - F_1 (x), \end{aligned}$$

da cui:

$$F_1 (x) = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$$

Passiamo a $F_2 (x)$:

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int e^x d(-\cos x) = -xe^x \cos x + \int \cos x \left(e^x + xe^x\right) dx \\ &= -xe^x \cos x + \int e^x \cos x dx + \int xe^x \cos x dx \end{aligned}$$

$\int e^x \cos x dx$ si calcola facilmente per parti:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$$

Quindi:

$$F_2(x) = -xe^x \cos x + \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + \int xe^x \cos x dx$$

Sostituendo $F_1(x), F_2(x)$ nella (17)

$$\int xe^x \cos x dx = xe^x (\sin x + \cos x) - e^x \cos x - \int xe^x \cos x dx,$$

da cui ricaviamo $\int xe^x \cos x dx$:

$$\int xe^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} [x(\sin x + \cos x) - \cos x] + C$$

Esercizio 942

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} \tag{18}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} \\ &= \int \frac{e^x dx}{e^{3x} + e^{2x} - 2e^x} \end{aligned}$$

Poniamo $y = e^x$, per cui:

$$e^x dx = dy$$

L'integrale in funzione di y:

$$
\begin{aligned}
F(y) &= \int \frac{ydy}{y^3+y^2-2y} \\
&= \int \frac{dy}{y(y^2+y-2)} \\
&= \int \frac{dy}{y(y-1)(y+2)}
\end{aligned}
$$

Abbiamo così ridotto l'integrale di una funzione trascendente all'integrale di una funzione razionale regolare, quindi integriamo per decomposizione in frazioni semplici:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y(y-1)(y+2)} &= \frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}+\frac{C}{y+2} \\
&= \frac{A(y^2+y-2)+By(y+2)+Cy}{y(y-1)(y+2)} \\
&= \frac{(A+B+C)y^2+(A+2B-C)y+2A}{y(y-1)(y+2)}
\end{aligned}
$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$
\begin{cases}
A+B+C=0 \\
A+2B-C=0 \\
2A=-1
\end{cases},
$$

la cui soluzione è:

$$
A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{6}
$$

Quindi:

$$
F(y) = -\frac{1}{2}\ln|y|+\frac{1}{3}\ln|y-1|+\frac{1}{6}\ln|y+2|+C
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} = -\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+6)+C
$$

Esercizio 943

Calcolare l'integrale:

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} \tag{19}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} \\ &= \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1+e^{-x}+e^{-2x}}} \end{aligned}$$

Poniamo $y = e^{-x}$, per cui:

$$e^{-x}dx = -dy$$

L'integrale in funzione di y:

$$F(y) = -\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+y+1}}$$

Abbiamo così ridotto l'integrale di una funzione trascendente all'integrale di una funzione irrazionale. In particolare si tratta di un integrale contenente un trinomio semplice, che si calcola facendo comparire la somma o la differenza di due quadrati. Scriviamo:

$$\begin{aligned} y^2+y+1 &= (y+k)^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ l = \frac{3}{4} \end{cases}, \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F(y) &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} \\ &= -\ln\left|\frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right| + C_1 \\ &= -\ln\left|2y + 2\sqrt{y^2+y+1}\right| + \underbrace{C_1 + \ln 3}_{=C} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} &= -\ln\left|2e^{-x}+1+2\sqrt{e^{-2x}+e^{-x}+1}\right| + C \\ &= -\ln\left|e^{-x}\left(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)\right| + C \\ &= x - \ln\left|2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right| + C \end{aligned}$$

Esercizio 944

Calcolare l'integrale:

$$\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx \tag{20}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx &= \int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) d\left(\frac{x^3}{3}\right) \\ &= \frac{x^3}{3}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{3}\int x^3 d\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]\end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{1-x^2},\end{aligned}$$

per cui:

$$\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{x^3}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2}{3}\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$$

Risulta:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)},$$

onde:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|$$

Finalmente l'integrale:

$$\int x^2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{1}{3}\left[x^3\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln\left|1-x^2\right| + x^2\right] + C$$

Esercizio 945

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9} \tag{21}$$

***

Soluzione
Trattandosi dell'integrale contenente un trinomio di secondo grado, applichiamo il procedimento standard:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 4x + 9 &= 2(x+k)^2 + l \\
&= 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4k = -4 \\ l + 2k^2 = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ l = 7 \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$2x^2 - 4x + 9 = 2(x-1)^2 + 7 = 7\left\{1 + \left[\sqrt{\frac{2}{7}}(x-1)\right]^2\right\},$$

cosicchè l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 9} &= \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1 + \left[\sqrt{\frac{2}{7}}(x-1)\right]^2} \\
&= \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}\int \frac{d\left[\sqrt{\frac{2}{7}}(x-1)\right]}{1 + \left[\sqrt{\frac{2}{7}}(x-1)\right]^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{14}}\arctan\left[\sqrt{\frac{2}{7}}(x-1)\right] + C
\end{aligned}$$

Esercizio 946

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{x-5}{x^2 - 2x + 2}dx \tag{22}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x-5 &= a\frac{d}{dx}\left(x^2-2x+2\right)+b \\ &= a\left(2x-2\right)+b \\ &\Longrightarrow a=\frac{1}{2}, b=-4 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int\frac{x-5}{x^2-2x+2}dx &= \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-2x+2\right)}{x^2-2x+2}-4\int\frac{dx}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right)-4\int\frac{dx}{x^2-2x+2} \end{aligned} \tag{23}$$

A secondo membro troviamo l'integrale contenente un trinomio di secondo grado; applichiamo quindi il procedimento standard:

$$x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=\left(x-1\right)^2+1$$

Quindi:

$$\int\frac{dx}{x^2-2x+2}=\int\frac{d\left(x-1\right)}{1+\left(x-1\right)^2}=\arctan\left(x-1\right)$$

Sostituendo nella (23):

$$\int\frac{x-5}{x^2-2x+2}dx=\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\arctan\left(x-1\right)+C$$

Esercizio 947

Calcolare l'integrale:

$$\int\frac{dx}{x\left(x^2+5\right)} \tag{24}$$

***

Soluzione
L'integrando è una funzione razionale regolare, per cui procediamo per decomposizione in frazioni semplici

$$\begin{aligned} \frac{1}{x\left(x^2+5\right)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5} \\ &= \frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+5A}{x\left(x^2+5\right)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A+B)\,x^2 + Cx + 5A = 1$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 5A=1 \end{cases},$$

ottenendo:

$$A = \frac{1}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = 0$$

Ora possiamo calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\,(x^2+5)} &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int \frac{xdx}{x^2+5} \\ &= \frac{1}{5}\left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)\right] + C \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+5}} + C \end{aligned}$$

Esercizio 948

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\,(x+3)^2} \tag{25}$$

***

Soluzione
L'integrando è una funzione razionale regolare, per cui procediamo per decomposizione in frazioni semplici

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)^2\,(x+3)^2} &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{1}{(x+2)^2\,(x+3)^2} \cdot [(A_1+B_1)\,x^3 + \\ &+ (8A_1 + A_2 + 7B_1 + B_2)\,x^2 + (21A_1 + 6A_2 + 16B_1 + 4B_1)\,x \\ &+ (18A_1 + 9A_2 + 12B_1 + 4B_2)] \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0 \\ 8A_1 + A_2 + 7B_1 + B_2 = 0 \\ 21A_1 + 6A_2 + 16B_1 + 4B_1 = 0 \\ 18A_1 + 9A_2 + 12B_1 + 4B_2 = 1 \end{cases},$$

ottenendo:

$$A_1 = -2, A_2 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1$$

Ora possiamo calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)^2 (x+3)^2} &= -2 \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{dx}{(x+3)^2} \\ &= 2 \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + C \end{aligned}$$

Esercizio 949

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx \tag{26}$$

***

Soluzione
Sviluppiamo il numeratore:

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3} dx &= \int \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x^3} dx \\ &= \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int x^{-5/2} dx + \int x^{-3} dx \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2} + C \end{aligned}$$

Esercizio 950

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \tag{27}$$

***

Soluzione
Esprimiamo il trinomio come somma di due quadrati:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (x+k)^2+l \\ &= x^2+2kx+k^2+l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2k=1 \\ l+k^2=1 \end{cases} \Longrightarrow k=\frac{1}{2}, l=\frac{3}{4} \\ &\Longrightarrow x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right] \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \\ &= \int \frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \\ &= \ln\left|\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}\right|+C_1 \\ &= \ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+\underbrace{C_1-\ln\sqrt{3}}_{=C} \\ &= \ln\left|2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right|+C \end{aligned}$$

Esercizio 951

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} \tag{28}$$

***

Soluzione
Quest'integrale è del tipo:

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} = \int \mathcal{R}\left[(2x)^{1/2}, (2x)^{1/3}\right] dx,$$

dove $\mathcal{R}$ è una funzione razionale. Il cambio di variabile è $2x=t^6$, per cui:

$$\sqrt{2x} = t^3, \ \sqrt[3]{2x} = t^2$$
$$x = \frac{1}{2}t^6, \ dx = 3t^5 dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= 3\int t^2\left(1-t^2\right)dt \\ &= 3\left(\int t^2 dt - \int t^4 dt\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}} &= 3\left(\frac{1}{3}\sqrt{2x} - \frac{1}{5}\sqrt[6]{(2x)^6}\right) + C \\ &= \sqrt{2x} - \frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^6} + C \end{aligned}$$

Esercizio 952

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2} \tag{29}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2} &= \int \frac{dx}{\left[\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2\right]} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2} \end{aligned}$$

Eseguaimo il cambio di variabile $t = \sqrt[3]{x}$, per cui:

$$dt = \frac{1}{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 3\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{3}{t+1} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right)^2} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}$$

Esercizio 953

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5-x}} \tag{30}$$

***

Soluzione
L'integrale è del tipo

$$\int \mathcal{R}\left[(5-x)^{1/4}, (5-x)^{1/2}\right] dx$$

Quindi il cambio di variabile è $5 - x = t^4$, onde:

$$dx = -4t^3 dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= -4\int \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= -4\int \left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= -4\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x} + \sqrt{5+x}} &= -4\left(\frac{1}{2}\sqrt{5-x} - \sqrt[4]{5-x} + \ln\left|\sqrt[4]{5-x}+1\right|\right) + C \\ &= 4\sqrt[4]{5-x} - 2\sqrt{5-x} - \ln\left|\sqrt[4]{5-x}+1\right| + C \end{aligned}$$

Esercizio 954

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2-9}dx \tag{31}$$

***

Soluzione
Ci conviene eseguire una sostituzione iperbolica, ponendo: $x = 3\cosh t$, per cui:

$$dx = 3\sinh t,\ x^2 - 9 = 9\sinh^2 t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 9\int \sinh^2 t dt$$

Dalla formula di duplicazione del coseno iperbolico:

$$\cosh 2t = 2\sinh^2 t + 1,$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\sinh^2 t &= \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1) \\
F(t) &= \frac{9}{2}\int (\cosh 2t - 1)\, dt \\
&= \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2t - t\right) + C' \\
&= \frac{9}{2}(\sinh t \cosh t - t) + C'
\end{aligned}$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\begin{aligned}
\cosh t &= \frac{x}{3}, \\
\sinh t &= \sqrt{\cosh^2 t - 1} = \frac{1}{3}\sqrt{x^2-9} \\
t &= \operatorname{arccos h}\frac{x}{3} = \ln\left|\frac{x}{3} + \sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}\right| = \ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| - \ln 3,
\end{aligned}$$

da cui il risultato:

$$\int \sqrt{x^2-9}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-9}\right| + \underbrace{C' - \ln 3}_{=C}$$

Esercizio 955

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2 - 4x} dx \tag{32}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= -4\left(x^2 + 2kx + k^2\right) + l \\ &= -4x^2 - 8kx - 2 - 4k^2 + l \\ &= -4\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{16} \\ &= -4\left[\frac{1}{64} - \left(x - \frac{1}{8}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Ci conviene eseguire una sostituzione trignometrica, ponendo: $x - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\sin t$, per cui:

$$dx = \frac{1}{8}\cos t, \ \sqrt{\frac{1}{64} - \left(x - \frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}\cos t$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \frac{1}{32}\int \cos^2 t dt$$

Dalla formula di duplicazione del coseno

$$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1,$$

ricaviamo:

$$\begin{aligned} \cos^2 t &= \frac{1}{2}(\cos 2t - 1) \\ F(t) &= \frac{1}{64}\int (\cos 2t - 1)\, dt \\ &= \frac{1}{64}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\right) + C \\ &= \frac{1}{64}(\sin t \cos t - t) + C \end{aligned}$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$\begin{aligned}\sin t &= 8\left(x - \frac{1}{8}\right) = 8x - 1, \\ \cos t &= 4\sqrt{x - 4x^2} \\ t &= \arcsin\left(8x - 1\right),\end{aligned}$$

da cui il risultato:

$$\int \sqrt{x^2 - 4x}dx = \frac{1}{64}\left[4\left(8x - 1\right)\sqrt{x - 4x^2} - \arcsin\left(8x - 1\right)\right] + C$$

Esercizio 956

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} \tag{33}$$

***

Soluzione
Eseguiamo la sostituzione $x = 1/t$, per cui:

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}F\left(t\right) &= -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}} \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}}\end{aligned}$$

Scriviamo:

$$t^2 + t + 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

onde:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} \\
&= -\int \frac{d\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} \\
&= -\ln\left|\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{t^2+t+1}\right|+C' \\
&= -\ln\left|2t+1+2\sqrt{t^2+t+1}\right|+\underbrace{C'-\sqrt{3}}_{=C}
\end{aligned}
$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} &= -\ln\left|\frac{2}{x}+1+\frac{2}{x}\sqrt{x^2+x+1}\right|+C \\
&= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C \\
&= \ln\left|\frac{x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 957

Calcolare l'integrale:

$$
\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx \tag{34}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
x^2+2x+2=(x+1)^2+1,
$$

quindi:

$$
\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx=\int x\sqrt{(x+1)^2+1}dx
$$

Eseguiamo la sostituzione iperbolica $x+1=\sinh t$, per cui:

$$
dx=\cosh t dt, \quad \sqrt{(x+1)^2+1}=\cosh t
$$

L'integrale in funzione di t:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \int (\sinh t - 1)\cosh^2 t dt \\
&= \int \sinh t \cosh^2 t dt - \int \cosh^2 t \\
&= \frac{1}{3}\int \cosh^2 t d(\cosh) - \int \cosh^2 t
\end{aligned}
$$

L'ultimo integrale è già stato calcolato negli esercizi precedenti:

$$
\int \cosh^2 t = \frac{1}{2}\sinh t \cosh t + \frac{t}{2},
$$

Ripristiniamo la variabile x:

$$
\begin{aligned}
t &= \operatorname{arcsin h}(x+1) = \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| \\
\sinh t &= x + 1 \\
\cosh t &= \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{x^2 + 2x + 2}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{x^2 + 2x + 2}dx = & \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + 2x + 2)^3} - \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 2} \\
& - \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 958

Calcolare l'integrale:

$$
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx \tag{35}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}
$$

Utilizziamo note formule trigonometriche:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} &= 1 + \frac{1}{\tan^2 x} \Longrightarrow \sin^2 x = \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x} \\
\frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \Longrightarrow \frac{1}{\cos^4 x} = \left(1 + \tan^2 x\right)^2
\end{aligned}
$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int \tan^2 x \left(1 + \tan^2 x\right) d\left(\tan x\right) \\ &= \int \tan^2 x d\left(\tan x\right) + \int \tan^4 x dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C\end{aligned}$$

Esercizio 959

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos^4 x dx \tag{36}$$

***

Soluzione
Utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

per ricavare $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + 1\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4}\int \left(\cos 2x + 1\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1\right) dx \\ &= \frac{1}{4}F\left(x\right) + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{4} + C,\end{aligned} \tag{37}$$

essendo:

$$F\left(x\right) \stackrel{def}{=} \int \cos^2 2x dx$$

Poniamo $t = 2x$

$$\begin{aligned}F\left(t\right) &= \frac{1}{2}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int \left(\cos 2t + 1\right) dt \\ &= \frac{1}{8}\sin 2t + \frac{t}{4} + C_1\end{aligned}$$

Ripristinando x:

$$F(x) = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}x + C_1$$

Sostituendo nella (37):

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \frac{3}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C \\ &= \frac{1}{32}(12x + 8\sin 2x + \sin 4x) + C\end{aligned}$$

Esercizio 960

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx \tag{38}$$

***

Soluzione
Utilizziamo rispettivamente le formule di sottrazione e di addizione:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x),\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx &= \frac{1}{2}\int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) dx \qquad (39) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \cos^2 x dx - \int \sin^2 x dx\right)\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due integrali a secondo membro:

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \Longrightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right) \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x - 1) \Longrightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \sin 2x)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x - x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C \\ &= \frac{\sin 2x}{8} + C\end{aligned}$$

Esercizio 961

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} \tag{40}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} &= \int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} \underbrace{\frac{dx}{\sin^2 x}}_{=-d(\cot x)} \\ &= -\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x} d\left(\cot x\right)\end{aligned}$$

Utilizziamo ora le formule:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{1}{\cot^2 x} &\Longrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x} \\ \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x &\Longrightarrow \frac{1}{\sin^3 x} = \left(1+\cot^2 x\right)^{3/2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} = -\int \frac{\left(1+\cot^2 x\right)}{\cot x} d\left(\cot x\right)$$

Ponendo $t = \cot x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned}F\left(t\right) &= -\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t} dt \\ &= -\int \left(t^3 + 2t + \frac{1}{t}\right) dt \\ &= -\left(\frac{1}{4}t^4 + t^2 + \ln|t|\right) + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x} = \ln|\tan x| - \frac{\cot^4 x}{4} - \cot^2 x + C$$

Esercizio 962

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx \tag{41}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx = -\int \left(1+\sqrt{\cot x}\right) d\left(\cot x\right)$$

Ponendo $t = \cot x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\int \left(1+\sqrt{t}\right) dt \\ &= -\left(t+\frac{2}{3}t^{3/2}\right)+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{1+\sqrt{\cot x}}{\sin^2 x}dx = -\left(\cot x+\frac{2}{3}\sqrt{\cot^3 x}\right)+C$$

Esercizio 963

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx \tag{42}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx &= -\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}d\left(\cos x\right) \\ &= \int \frac{\cos^2 x-1}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}d\left(\cos x\right) \end{aligned}$$

Ponendo $t=\cos x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{t^2-1}{\sqrt[5]{t^3}}dt \\ &= \int \left(t^{7/5}-t^{-3/5}\right)dt \\ &= \frac{5}{12}t^{12/5}-\frac{5}{2}t^{2/5}+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx &= \frac{5}{12}\left(\cos^2 x\sqrt[5]{\cos^2 x}-6\sqrt[5]{\cos^2 x}\right)+C \\ &= \frac{5}{12}\sqrt[5]{\cos^2 x}\left(\cos^2 x-6\right)+C \end{aligned}$$

Esercizio 964

Calcolare l'integrale:

$$\int \tan^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx \tag{43}$$

***

Soluzione
Ponendo $t=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t)=2\int \tan^3 t dt$$

Dalla nota formula:

$$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t,$$

ricaviamo:

$$\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}-1,$$

per cui l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\int \tan t\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt \\ &= 2\int \tan t\underbrace{\frac{dt}{\cos^2 t}}_{=d(\tan t)}+2\int \underbrace{\tan t dt}_{=\frac{d(-\cos t)}{\cos t}} \\ &= \tan^2 t+2\ln|\cos t|+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \tan^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx = \tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Esercizio 965

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{\sinh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx \tag{44}$$

***

Soluzione
Ponendo $t=\sqrt{1-x}$, segue:

$$dx = -\frac{2dx}{\sqrt{1-x}},$$

mentre l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= -2\int \sinh t dt \\ &= -2\cosh t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sinh\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\cosh\sqrt{1-x} + C$$

Esercizio 966

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x} \tag{45}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x} = -\int \frac{\cot x}{1+\cot x}d(\cot x),$$

giacché

$$d(\cot x) = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

Ponendo $t=\sqrt{1-x}$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned}F(t) &= -2\int \frac{t}{t+1}dt \\ &= -\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = -\int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= -(t-\ln|t+1|)+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x} = \ln|\cot x+1| - \cot x + C$$

Esercizio 967

Calcolare l'integrale:

$$\int xe^{2x}dx \tag{46}$$

***

Soluzione
Si potrebbe eseguire un'integrazione per parti, ma preferiamo applicare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\int xe^{2x}dx = (Ax+B)\,e^{2x}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto a x:

$$xe^{2x} = Ae^{2x} + 2(Ax+B)\,e^{2x},$$

cioè:

$$x = 2Ax + (A+2B)$$

Il pincipio di identità dei polinomi implica:

$$\begin{cases} 2A=1 \\ A+2B \end{cases} \Longrightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{4}$$

Quindi l'integrale:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{4}(2x-1)+C$$

Esercizio 968

Calcolare l'integrale:

$$\int x^2 e^{x^3} dx \tag{47}$$

***

Soluzione
L'integrazione è immediata:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} d\left(x^3\right) = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

Esercizio 969

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x \sin^2 x dx \tag{48}$$
$$\int x \sin x^2 dx$$

***

Soluzione
Per calcolare il primo integrale svincoliamoci innanzitutto da $\sin^2 x$, utilizzando la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x,$$

da cui:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

Quindi l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned}\int x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x \left(1 - \cos 2x\right) dx = \frac{1}{2}\left(\int x dx - \int x \cos 2x dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - F\left(x\right)\right),\end{aligned} \tag{49}$$

essendo:

$$F\left(x\right) = \int x \cos 2x dx$$

Integrando per parti:

$$F(x) = \int x d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

Sostituendo nella (49):

$$\int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{8} + C$$

Passiamo ora al secondo integrale, "visualmente" simile al primo ma ovviamente diverso, il cui calcolo è immediato:

$$\int x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2 d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

Esercizio 970

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx \tag{50}$$

***

Soluzione
Innanzitutto poniamo $t = \frac{x}{2}$, per cui l'integrale in funzione di t:

$$F(t) = 2\int \sin^2 t\cos 3t dt = 2\int \sin t\sin t\cos 3t dt$$

Applichiamo le formule di Werner:

$$\sin t\cos 3t = \frac{1}{2}\left(\sin 4t - \sin 2t\right),$$

perciò:

$$F(t) = \int \sin t\sin 4t dt - \int \sin t\sin 2t dt$$

Calcoliamo a parte i due integrali espandendo l'integrando con le formule di Werner

$$\begin{aligned}
\int \sin t\sin 4t dt &= \frac{1}{2}\int\left(\cos 3t - \cos 5t\right)dt \\
&= \frac{1}{6}\sin 3t - \frac{1}{10}\sin 5t \\
\int \sin t\sin 2t dt &= 2\int \sin^2 t\cos t dt \\
&= 2\int \sin^2 t d\left(\sin t\right) \\
&= \frac{2}{3}\sin^2 t
\end{aligned}$$

Quindi:

$$F(t)=\frac{1}{6}\sin 3t-\frac{1}{10}\sin 5t-\frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2}+C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx=\frac{1}{6}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}-\frac{2}{3}\sin^3\frac{x}{2}+C$$

Esercizio 971

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2\ln\sqrt{1-x}dx \tag{51}$$

***

Soluzione

Eseguiamo un'integrazione per parti assumendo come termine finito $\ln\sqrt{1-x}$:

$$\int \ln\sqrt{1-x}d\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x}+\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x-1}dx \tag{52}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{x-1}dx &= \int\frac{x^3-1+1}{x-1}dx=\\ &=\int\left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &=\int\left[\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right]dx\\ &=\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C_1\end{aligned}$$

Sostituendo nella (52):

$$\int x^2\ln\sqrt{1-x}dx=\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x}-\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{x^2}{18}-\frac{x^2}{12}-\frac{x}{6}+C$$

Esercizio 972

Calcolare il seguente integrale:

$$\int\frac{2^x dx}{1-4^x} \tag{53}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = 2^x$, per cui:

$$dt = 2^x \ln 2 dx \Longrightarrow 2^x dx = \frac{dt}{\ln 2}$$
$$4^x = t^2$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2 \ln 2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \int \frac{2^x dx}{1 - 4^x} &= \frac{1}{2 \ln 2} \ln \left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right| + C \\ &= \frac{1}{\ln 4} \ln \left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right| + C \\ &= \frac{1}{\ln 2} \ln \sqrt{\left| \frac{1+2^x}{1-2^x} \right|} + C \end{aligned}$$

Esercizio 973

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} \tag{54}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x} = \int \frac{e^{-x} dx}{e^x - 2^x}$$

Ponendo $t = e^{-x}$

$$e^{-x} dx = -dt,$$

mentre l'integrale in funzione di t si scrive:

$$
\begin{aligned}
F(t) &= -\int \frac{dt}{\frac{1}{t}-2} \\
&= -\int \frac{tdt}{1-2t} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-2t-1}{1-2t}dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1-2t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(t+\frac{1}{2}\ln|1-2t|\right)+C
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^{x}} = \frac{e^{-x}}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|1-2e^{-x}\right|+C
$$

Osserviamo che $\ln|1-2e^{-x}| = \ln\frac{|e^x-2|}{e^x} = \ln|e^x-2|-x$, per cui:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^{x}} &= \frac{1}{2e^x}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln|e^x-2|+C \\
&= \frac{2-xe^x+e^x\ln|e^x-2|}{4e^x}+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 974

Calcolare il seguente integrale:

$$
\int \left(x^2-1\right)a^{-2x}dx, \qquad (a>0,\, a\neq 1) \tag{55}
$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$
\int \left(x^2-1\right)a^{-2x}dx = \int x^2a^{-2x}dx - \int a^{-2x}dx \tag{56}
$$

Il secondo integrale a secondo membro della (56) è immediato:

$$
\int a^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int a^{-2x}d(-2x) = -\frac{a^{-2x}}{2\ln a}
$$

Il primo integrale può essere calcolato con il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$
\int x^2a^{-2x}dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)a^{-2x}
$$

Derivando primo e secondo membro:

$$x^2 a^{-2x} = (2Ax + B)\, a^{-2x} - 2 \ln a \left(Ax^2 + Bx + C \right) a^{-2x},$$

da cui:

$$x^2 = (-2A \ln a)\, x^2 + 2\,(2A - B \ln a) + B - 2C \ln a$$

Per il principio di identità dei polinomi i coefficienti A, B, C devono soddisfare il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -2A \ln a = 1 \\ A = B \ln a \\ B = 2C \ln a \end{cases},$$

la cui unica soluzione è:

$$A = -\frac{1}{2 \ln a},\ B = -\frac{1}{2 \ln^2 a}, C = -\frac{1}{4 \ln^3 a}$$

Quindi:

$$\int x^2 a^{-2x} dx = -\frac{x^2 a^{-2x}}{2 \ln a} - \frac{x a^{-2x}}{2 \ln^2 a} - \frac{a^{-2x}}{4 \ln^3 a}$$

Sostituendo nella (56):

$$\int \left(x^2 - 1 \right) a^{-2x} dx = -\frac{a^{-2x}}{2 \ln a} \left(x^2 - 1 + \frac{x}{\ln a} + \frac{1}{2 \ln^2 a} \right) + C$$

Esercizio 975

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt{e^x + 1} dx \tag{57}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = \sqrt{e^x + 1}$, per cui:

$$dx = \frac{2t}{e^x} dt = \frac{2t}{\sqrt{e^x + 1}} dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned}
F(t) &= 2\int \frac{t^2}{t^2-1}dt \\
&= 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt \\
&= 2\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt \\
&= 2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sqrt{e^x+1}dx = 2\sqrt{e^x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$$

Esercizio 976

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}} \tag{58}$$

***

Soluzione
Applichiamo il procedimento standard degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente, scriviamo:

$$x = a(10x-2)+b = 10ax-2a+b,$$

onde:

$$a = \frac{1}{10}, b = \frac{1}{5}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2x+1}} &= \frac{1}{10}\int \frac{d(5x^2-2x+1)}{\sqrt{5x^2-2x+1}}+\frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}} \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5}F_1(x),
\end{aligned} \tag{59}$$

essendo:

$$F_1(x) \stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$$

Per calcolare $F_1(x)$ scriviamo:

$$\begin{aligned}5x^2-2x+1&=5\left(x+k\right)^2+l\\&=5\left(x^2+2kx+k^2\right)+l\\&=5x^2+10kx+5k^2+l\\&\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}10k=-2\\l+5k^2=1\end{array}\right.\Longrightarrow k=-\frac{1}{5},\,l=\frac{4}{5},\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}5x^2-2x+1&=\frac{4}{5}\left[1+\left(\frac{5x-1}{2}\right)^2\right]\\F_1\left(x\right)&=\frac{\sqrt{5}}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{5x-1}{2}\right)^2}}\end{aligned}$$

Poniamo $t=\frac{5x-1}{2}$:

$$F_1\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C_1$$

Cioè:

$$\begin{aligned}F_1\left(x\right)&=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{5x-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|5x-1+\sqrt{5}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln 2+C_1\end{aligned}$$

Sostituendo nella (59) e incorporando $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln 2$ nella costante di integrazione:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|5x-1+\sqrt{5}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|+C$$

Esercizio 977

Calcolare il seguente integrale:

$$F\left(x\right)=\int\frac{\arctan x}{x^2}dx \tag{60}$$

***

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti, assumendo come fattore finito $\arctan x$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2} dx &= \int \arctan x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro, procedendo per decomposizione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{x(1+x^2)},\end{aligned}$$

cioè:

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A$$

Il principio di identità dei polinomi implica il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases},$$

la cui unica soluzione è:

$$A = 1, B = -1, C = 0,$$

donde:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(1+x^2)} &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \\ &= \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\arctan x + \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Esercizio 978

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \cosh(\ln x)\, dx \tag{61}$$

***

Soluzione
Esplicitiamo il coseno iperbolico:

$$\begin{aligned}
\int \cosh(\ln x)\, dx &= \int \frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{2} dx \\
&= \int \frac{x + \frac{1}{x}}{2} dx \\
&= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x + C
\end{aligned}$$

Esercizio 979

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \left(x^2 - 3x\right) \sin 5x dx \tag{62}$$

***

Soluzione
Si potrebbe integrare per parti, ma conviene utilizzare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned}
\int \left(x^2 - 3x\right) \sin 5x dx &= \left(Ax^2 + Bx + C\right) \sin 5x \\
&\quad + \left(Dx^2 + Ex + F\right) \cos 5x
\end{aligned}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}
\left(x^2 - 3x\right) \sin 5x dx &= (2Ax + B) \sin 5x + 5\left(Ax^2 + Bx + C\right) \cos 5x + \\
&+ (2Dx + E) \cos 5x - 5\left(Dx^2 + Ex + F\right) \sin 5x \\
&= \left[-5Dx^2 + (2A - 5E)\, x + (B - 5D)\right] \sin 5x + \\
&+ \left[5Ax^2 + (5B + 2D)\, x + (5C + E)\right] \cos 5x,
\end{aligned}$$

da cui otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} -5D = 1 \\ 2A - 5E = -3 \\ B - 5F = 0 \\ 5A = 0 \\ 5B + 2D = 0 \\ 5C + E = 0 \end{cases},$$

la cui unica soluzione è:

$$D = -\frac{1}{5}, E = \frac{3}{5}, C = -\frac{3}{25}, B = \frac{2}{25}, F = \frac{2}{2 \cdot 25}, A = 0$$

Quindi:

$$\int \left(x^2 - 3x\right) \sin 5x dx = \frac{1}{25} \left[(x-3) \sin 5x - \left(5x^2 - 15x - \frac{2}{5}\right) \cos 5x\right] + C$$

Esercizio 980

Calcolare il seguente integrale:

$$\int |x|\, dx \tag{63}$$

***

Soluzione
Poniamo per definizione

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int |x|\, dx$$

Per una nota proprietà del valore assoluto, abbiamo:

$$F(x \geq 0) \underset{|x|=x}{=} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$
$$F(x < 0) \underset{|x|=-x}{=} -\int x dx = -\frac{1}{2} x^2 + C,$$

da cui il risultato:

$$\int |x|\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} x^2, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} x^2, & x < 0 \end{cases},$$

che può essere scritto in un'unica formula:

$$\int |x|\, dx = \frac{1}{2} |x|\, x + C$$

Esercizio 981

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13} \tag{64}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = e^x$, per cui

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \int \frac{dt}{t^2 - 6t + 13}$$

Il cambio di variabile ha ridotto l'integrale di una funzione trascendente nell'integrale di una funzione razionale. Precisamente, di una funzione contente un trinomio di secondo grado, onde applichiamo il procedimento standard per questi casi.

$$\begin{aligned} t^2 - 6t + 1 &= (t + k)^2 + l \\ &= t^2 + 2kt + k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2k = -6 \\ k^2 + l = 13 \end{cases} \Longrightarrow k = -3,\, l = 4 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} t^2 - 6t + 1 &= (t - 3)^2 + 4 \\ &= 4\left[1 + \left(\frac{t-3}{2}\right)^2\right] \end{aligned}$$

L'integrale $F(t)$ diventa:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{t-3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{t-3}{2}\right)}{1 + \left(\frac{t-3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t-3}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile :

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 6e^x + 13} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^x - 3}{2}\right) + C$$

Esercizio 982

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \cos x \cosh x dx \tag{65}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int \cos x \cosh x dx &= \int \cos x d(\sinh x) \\ &= \cos x \sinh x + \int \sinh x \sin x dx\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro, integriamo nuovamente per parti:

$$\begin{aligned}\int \sinh x \sin x dx &= \int \sin x d(\cosh x) \\ &= \sin x \cosh x - \int \cosh x \cos x dx\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \cos x \cosh x dx = \cos x \sinh x + \cosh x \sin x + \int \cosh x \cos x dx$$

da cui possiamo ricavare $\int \cosh x \cos x dx$, ottenendo

$$\int \cosh x \cos x dx = \frac{1}{2}(\cos x \sinh x + \cosh x \sin x) + C$$

Esercizio 983

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \tag{66}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx \\
&= -\int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \\
&= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C \\
&= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 984

Calcolare i seguenti integrali

$$
\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}
$$
$$
\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}
$$

***

Soluzione
Il primo si calcola immediatamente:

$$
\int \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)} + C
$$

Per il secondo scriviamo:

$$
\begin{aligned}
x - x^2 &= -\left(x+k\right)^2 + l \\
&= -x^2 - 2kx - k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = -1 \\ l - k^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{1}{2}, \, l = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
x - x^2 = \frac{1}{4}\left[1 - \left(2x-1\right)^2\right]
$$

L'integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\
&= \int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\
&= \arcsin(2x-1) + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 985

Calcolare il seguente integrale

$$
\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
x + x^2 &= (x+k)^2 + l \\
&= x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2k = 1 \\ k^2 + l = 0 \end{cases} \Longrightarrow k = \frac{1}{2},\, l = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
x + x^2 = \frac{1}{4}\left[(2x+1)^2 + 1\right]
$$

L'integrale diventa:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} &= 2\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+1}} \\
&= \int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+1}} \\
&= \ln\left[2x+1+\sqrt{(2x+1)^2+1}\right] + C \\
&= \ln\left[2x+1+2\sqrt{x+x^2}\right] + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 989

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{3x}}{1-e^{4x}}dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \frac{e^{3x}}{1-e^{4x}}dx = \int \frac{e^{2x}}{1-e^{4x}}e^{x}dx$$

Quindi poniamo $t = e^x$, per cui:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$F(t) = \int \frac{t^2}{1-t^4}dt$$

Integriamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2}{1-t^4} &= \frac{t^2}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} \\
&= \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \\
&= \frac{A(1+t)(1+t^2) + B(1-t)(1+t^2) + (Ct+D)(1-t^2)}{(1-t)(1+t)(1+t^2)} \\
&= \frac{(A-B-C)t^3 + (A+B-D)t^2 + (A-B+C)t + (A+B+D)}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}
\end{aligned}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A-B-C=0 \\ A+B-D=1 \\ A-B+C=0 \\ A+B+D=0 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

onde:

$$\frac{t^2}{1-t^4} = \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{1-t^4}dt &= \frac{1}{4}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\arctan t + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|1-t^2\right| - \frac{1}{2}\arctan t + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{e^{3x}}{1-e^{4x}}dx = \frac{1}{4}\ln\left|1-e^{2x}\right| - \frac{1}{2}\arctan e^x + C$$

Esercizio 990

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^n}dx$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln^2 x}{x^n}dx &= \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{1-n}x^{1-n}\right) \\ &= \frac{1}{1-n}x^{1-n}\ln^2 x - 2\cdot\frac{1}{1-n}\int x^{1-n}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln^2 x - \frac{2}{1-n}\int x^{-n}\ln x dx\end{aligned}$$

Eseguiamo un'ulteriore integrazione per parti sull'integrale:

$$\begin{aligned}\int x^{-n}\ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^{-n}+1}{-n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1-n}x^{1-n}\ln x - \frac{1}{1-n}\int x^{-n}dx \\ &= \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln x - \frac{x^{1-n}}{(1-n)^2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^n}dx = \frac{x^{1-n}}{1-n}\ln^2 x - \frac{2x^{1-n}}{(1-n)^2}\ln x - \frac{2}{(1-n)^3}x^{1-n} + C$$

Esercizio 991

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \left(x^2 + x + 1\right) e^{2x} dx$$

***

Soluzione
Si potrebbe integrare per parti, ma è preferibile utilizzare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\int \left(x^2 + x + 1\right) e^{2x} dx = \left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{2x} + \text{const}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\left(x^2 + x + 1\right) e^{2x} &= (2Ax + B) e^{2x} + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) e^{2x} \\ &= e^{2x} \left[2Ax + (2A + 2B) x + 2C + B\right]\end{aligned}$$

Cioè:

$$x^2 + x + 1 = 2Ax + (2A + 2B) x + 2C + B$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \\ 2C + B = 1 \end{cases},$$

da cui:

$$A = \frac{1}{2},\ B = 0,\ C = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int \left(x^2 + x + 1\right) e^{2x} dx = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right) e^{2x} + \text{const}$$

Esercizio 992

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{2x} - e^x}{2 + e^{-x}} dx$$

***

Soluzione
A numeratore della funzione integranda mettiamo in evidenza e^{-x}:

$$\int \frac{e^{2x}-e^{x}}{2+e^{-x}}dx = \int \frac{e^{2x}-e^{x}}{2e^{x}+1}e^{x}dx$$

Quindi poniamo $t=e^{x}$, per cui:

$$e^{x}dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \frac{t^{2}-t}{2t+1}dt \\ &= \int \left(-\frac{3}{4}+\frac{t}{2}+\frac{3}{4}\frac{1}{1+2t}\right)dt \\ &= -\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}t^{2}+\frac{3}{8}\ln|1+2t|+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{e^{2x}-e^{x}}{2+e^{-x}}dx = \frac{3}{8}\ln|1+2e^{x}|+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{3}{4}e^{x}$$

Esercizio 993

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sinh x+1}{\cosh x-1}dx$$

***

Soluzione
Dobbiamo esplicitare le funzioni iperboliche che compaiono nell'integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh x+1}{\cosh x-1}dx &= \int \frac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+1}{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}-1}dx \\ &= \int \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{e^{x}+e^{-x}-2}dx \\ &= \int \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{e^{-x}\left(e^{2x}+1-2e^{x}\right)}dx \\ &= \int \frac{e^{x}-e^{-x}+2}{\left(e^{2x}+1-2e^{x}\right)}e^{x}dx \end{aligned}$$

Poniamo $t=e^{x}$, per cui:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \int \frac{t^2 + 2t - 1}{t(t-1)^2} dt$$

Procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2 + 2t - 1}{t(t-1)^2} &= \frac{A}{t} + \frac{B_1}{t-1} + \frac{B_2}{(t-1)^2} \\
&= \frac{A(t-1)^2 + B_1 t(t-1) + B_2 t}{t(t-1)^2} \\
&= \frac{(A + B_1)t^2 + (B_2 - B_1 - 2A)t + A}{t(t-1)^2}
\end{aligned}$$

Cioè:

$$t^2 + 2t - 1 = (A + B_1)t^2 + (B_2 - B_1 - 2A)t + A$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + B_1 = 1 \\ -2A + B_2 - B_1 = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$A = -1, B_1 = 2, B_2 = 2$$

Quindi:

$$\frac{t^2 + 2t - 1}{t(t-1)^2} = \frac{2}{t-1} + \frac{2}{(t-1)^2} - \frac{1}{t}$$

Integrando:

$$F(t) = 2\ln|t-1| - \frac{2}{t-1} - \ln|t| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sinh x + 1}{\cosh x - 1} dx = \ln(e^x - 1)^2 - x - \frac{2}{e^x - 1} + C$$

Esercizio 994

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2-\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-1}}}{x+4\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}}dx \tag{67}$$

***

Soluzione
È un integrale del tipo:

$$\int \mathcal{R}\left[x,\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/3},\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/2}\right],$$

dove $\mathcal{R}$ denota una funzione razionale. Il cambio di variabile è:

$$t=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/2} \tag{68}$$

Risolviamo la (68) rispetto a x:

$$x=\frac{t^6+1}{t^6-1}$$

Differenziando:

$$dx=-\frac{18t^5}{\left(t^6-2\right)^2}$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}F\left(t\right)&=-\int\frac{2-t^2}{\frac{t^6+1}{t^6-1}+4t^3}\frac{18t^5}{\left(t^6-2\right)^2}dt\\&=18\int\frac{t^7-2t^5}{\left(t^6-2\right)\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}\end{aligned}$$

La funzione integranda si decompone in:

$$\frac{t^7-2t^5}{\left(t^6-2\right)\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}=\frac{8t^8+2t^5-8t^4+t}{3\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}-\frac{2\left(t^5-t\right)}{3\left(t^6-2\right)},$$

per cui:

$$\begin{aligned}F\left(t\right)&=18\left[\int\frac{8t^8+2t^5-8t^4+t}{3\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}dt-\frac{2}{3}\int\frac{t^5-t}{t^6-2}dt\right]\\&=18\int\frac{8t^8+2t^5-8t^4+t}{3\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}dt+\frac{1}{36}[-2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1+\sqrt[3]{4}t^2}{\sqrt{3}}\right)\\&+2\sqrt[3]{2}\ln\left|-2+\sqrt[3]{4}t^2\right|-\sqrt[3]{2}\ln\left|2+\sqrt[3]{2}t^2+\sqrt[3]{2}t^4\right|-4\ln\left|t^6-2\right|]+C\end{aligned}$$

L'integrale

$$\int \frac{8t^8+2t^5-8t^4+t}{3\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}dt$$

non è esprimibile in forma chiusa, per cui non è possibile espslicitare la primitiva della funzione proposta.

Esercizio 995

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+2}} \tag{69}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x &= a\left(2x+4\right)+b \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-2 \end{cases}, \end{aligned}$$

per cui:

$$x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2+4x+2\right)-2$$

Perciò l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+4x+2\right)}{\sqrt{x^2+4x+2}} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+2}} \\ &= \sqrt{x^2+4x+2} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+2}} \end{aligned} \tag{70}$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro, scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2+4x+2 &= x^2+4x+4-2 \\ &= (x+2)^2-2 \\ &= 2\left[\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2-1\right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}} \\
&= \int \frac{d\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1}} \\
&= \ln \left(\frac{x+2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1} \right) \\
&= \ln \left(x+2+\sqrt{x^2+4x+2} \right) - \frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

Sostituendo nella (70) ed incorporando $-\ln 2$ nella costante di integrazione:

$$
\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+2}} = \sqrt{x^2+4x+2} - 2\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right) + C
$$

Esercizio 996

Calcolare il seguente integrale:

$$
\int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}dx \tag{71}
$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$
\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx
$$

Qui è:

$$
m = \frac{1}{3}, n = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{4}
$$

Risulta:

$$
\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z},
$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$
1 + x^{2/3} = t^4
$$

Ricaviamo x:

$$x = \left(t^4 - 1\right)^{3/2}$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx = 6\left(t^4 - 1\right)^{1/2} dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \left(t^4 - 1\right)^{1/2} t \cdot 6t^3 \left(t^4 - 1\right)^{1/2} dt \\ &= 6\int \left(t^8 - t^4\right) dt \\ &= \frac{2}{3}t^9 - \frac{6}{5}t^5 + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt[4]{\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)^9} - \frac{6}{5}\sqrt[4]{\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)^5} + C$$

Esercizio 997

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx \tag{72}$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

Qui è:

$$m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$$

Risulta:

$$\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z},$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$1 + x^{1/4} = t^3$$

Ricaviamo x:

$$x = \left(t^3 - 1\right)^4$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx = 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= 12 \int t^3 \left(t^3 - 1\right) dt \\ &= 12 \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt \right) \\ &= \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = \frac{12}{7} \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^7} - 3 \sqrt[4]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^4} + C$$

Esercizio 998

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^{-3} \left(1 + x^4\right)^{1/2} dx \tag{73}$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

Qui è:

$$m = -3, n = 4, p = \frac{1}{2}$$

Risulta:

$$\frac{m+1}{n} + p = 0,$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$x^{-4} + 1 = t^2$$

Ricaviamo x:

$$x = \left(t^2 - 1\right)^{-1/4}$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx = -\frac{1}{2}t\left(t^2 - 1\right)^{-5/4} dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int \left(t^2 - 1\right)^{3/4} t\left(t^2 - 1\right)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) t\left(t^2 - 1\right)^{-5/4} dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2 - 1} dt \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(t + \int \frac{dt}{t^2 - 1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{x^{-4} + 1} + \ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^{-4}+1}+1}{\sqrt{x^{-4}+1}-1}} + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right| - \frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} + C
\end{aligned}$$

Esercizio 999

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \ln\left(x^2 + 1\right) dx \tag{74}$$

***

Soluzione

Eseguiamo un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(x^2 + 1\right) dx &= x\ln\left(x^2 + 1\right) - \int x d\left[\ln\left(x^2 + 1\right)\right] \\
&= x\ln\left(x^2 + 1\right) - 2\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}
\end{aligned} \tag{75}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$
$$= x - \arctan x + C_1$$

Sostituendo nella (75):

$$\int \ln\left(x^2+1\right) dx = x \ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan x + C$$

Esercizio 1000

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \tag{76}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$, per cui

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2\int \arcsin t dt = 2\left(t \arcsin t - \int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}\right) \\ &= 2\left[t \arcsin t + \frac{1}{2}\int \left(1-t^2\right)^{-1/2} d\left(1-t^2\right)\right] \\ &= 2\left(t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\left(\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}\right) + C$$

Esercizio 1001

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx \tag{77}$$

***

Soluzione
Integriamo per parti:

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \int xd\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x}\,(x+1)} \tag{78}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int\frac{xdx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

Ponendo $\sqrt{x} = t$ si ha:

$$\begin{aligned}F(t) &= 2\int\frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt\\ &= 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\\ &= 2\,(t-\arctan t)+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x) = 2\left(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x}\right)+C$$

Sostituendo nella (78):

$$\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C$$

Esercizio 1002

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{79}$$

***

Soluzione
Osserviamo che:

$$\frac{d}{dx}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quindi possiamo integrare per parti:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \arcsin x d\left(-\sqrt{1-x^2}\right) \\
&= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int dx \\
&= x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C
\end{aligned}$$

Esercizio 1005

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+2} \tag{80}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}
x^2+3x+2 &= (x+k)^2 + l \\
&= x^2 + 2kx + k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ l = -\frac{1}{4} \end{cases} \\
&\Longrightarrow x^2+3x+2 = \frac{1}{4}\left[(2x+3)^2 - 1\right]
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+3x+2} &= 4\int \frac{dx}{(2x+3)^2-1} \\ &= 2\int \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^2-1} \\ &= \ln\left|\frac{2x+3-1}{2x+3+1}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C\end{aligned}$$

Esercizio 1006

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \tag{81}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = 1+\sqrt{x}$, per cui:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

L'integrale in funzione di t

$$F(t) = 2\int \sqrt{t}dt = \frac{4}{3}t^{3/2} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{4}{3}\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^3} + C$$

Esercizio 1007

Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned}&\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx \\ &\int \frac{x^2dx}{2-x^6}\end{aligned} \tag{82}$$

***

Soluzione
Il primo è immediato:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{1+\ln x}d\left(1+\ln x\right)$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\ln x\right)^3}+C$$

Per il secondo poniamo $t = x^3$, per cui:

$$x^2 dx = \frac{dt}{3}$$

L'integrale in funzione di t

$$F\left(t\right) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2-t^2}$$

Decomponiamo l'integrando in frazioni semplici:

$$\frac{1}{2-t^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-t}+\frac{B}{\sqrt{2}+t}$$
$$= \frac{A\sqrt{2}+At+B\sqrt{2}-Bt}{2-t^2}$$
$$= \frac{\left(A-B\right)t+A+B}{2-t^2},$$

cioè:

$$1 = \left(A-B\right)t+A+B$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A-B=0 \\ \left(A+B\right)\sqrt{2}=1 \end{cases},$$

da cui:

$$A = B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Quindi:

$$F\left(t\right) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{x^2 dx}{2-x^6} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x^3}{\sqrt{2}-x^3}\right|+C$$

Esercizio 1008

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{83}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = x^2$, per cui:

$$xdx = \frac{dt}{2}$$

L'integrale in funzione di t

$$F(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C$$

Esercizio 1009

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{xdx}{x^4+\alpha^4} \tag{84}$$

***

Soluzione
Poniamo $t = x^2$, per cui:

$$xdx = \frac{dt}{2}$$

L'integrale in funzione di t

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\alpha^4} = \frac{1}{2\alpha^4}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2}\int \frac{d\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)}{1+\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2}\arctan\frac{t}{\alpha^2} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{xdx}{x^4+\alpha^4} = \frac{1}{2\alpha^2}\arctan\frac{x^2}{\alpha^2} + C$$

Esercizio 1012

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$$
$$\int \frac{\cos x}{\alpha^2+\sin^2 x}dx$$

$$***$$

Soluzione
Il primo si esprime attraverso la funzione arcsin. Infatti:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{3}}x\right)+C\end{aligned}$$

Per il secondo scriviamo:

$$\int \frac{\cos x}{\alpha^2+\sin^2 x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\alpha^2+\sin^2 x}$$

Ponendo $t=\sin x$, l'integrale diventa:

$$\begin{aligned}F(t) &= \int \frac{dt}{\alpha^2+t^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha}\int \frac{d\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha}\arctan t + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cos x}{\alpha^2+\sin^2 x}dx = \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{\sin x}{\alpha}\right)+C$$

Esercizio 1013

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$
$$\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$$

***

Soluzione
Il calcolo di questi integrali è immediato:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C$$
$$\int \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)} = \int \frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x} = \arctan(\ln x) + C$$

Esercizio 1014

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$\int \frac{\arctan x - x}{1+x^2}dx$$

***

Soluzione
Osservando che $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$per il primo abbiamo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \int \arccos x d(\arccos x) \\ &= \frac{1}{2}(\arccos x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Per il secondo:

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x - x}{1+x^2}dx &= \int \arctan x d(\arctan x) - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}(\arctan x)^2 - \ln\sqrt{1+x^2} + C\end{aligned}$$

Esercizio 1015

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + \cos^2 x}$$
$$\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\sin 2x dx$$

***

Soluzione
Per il primo integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{2}\tan^2 x+1}\underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d(\tan x)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)^2}\end{aligned}$$

Ponendo $t=\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x$, l'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan t+C$$

Ripristinando la variabile mx:

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)+C$$

Per il secondo, svincoliamoci dal $\cos^2 x$, attraverso la fomula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1\Longrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}\cos 2x+1$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\sin 2x dx &= -\frac{1}{2}\int \sqrt{6+\frac{5}{2}\cos 2x}d(\cos 2x)\\ &= -\frac{1}{5}\int \sqrt{6+\frac{5}{2}\cos 2x}d\left(6+\frac{5}{2}\cos 2x\right)\\ &= -\frac{2}{15}\sqrt{\left(6+\frac{5}{2}\cos 2x\right)^3}+C\end{aligned}$$

Esercizio 1025

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin^7 x dx$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\int \sin^7 x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^3 d\left(\cos x\right)$$

Eseguiamo il cambio di variabile $y = \cos x$, cosicché l'integrale in funzione di y si scrive:

$$\begin{aligned} F\left(y\right) &= -\int \left(1-y^2\right)^3 dy \\ &= -\int \left(-y^6+3y^4-3y^2+1\right) dy \\ &= \frac{1}{7}y^7-\frac{3}{5}y^5+y^3-y+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \sin^7 x dx = \frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\cos^3 x-\cos x+C$$

Esercizio 1027

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} \tag{85}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile $t = 1+\sqrt{x}$, per cui:

$$dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$$

L'integrale in funzione di t

$$F\left(t\right) = 2\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\cdot 2\sqrt{t}+C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 4\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$$

Esercizio 1029

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-2x}} \tag{86}$$

Soluzione
Poniamo $t = e^{-x}$, per cui:

$$e^{-x}dx = -dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -\arctan t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-2x}} = -\arctan e^{-x} + C$$

Esercizio 1030

Calcolare l'integrale

$$\int \ln(\sin x)\cos x dx \tag{87}$$

Soluzione
Poniamo $t = \sin x$, per cui:

$$\cos x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t) = \int \ln t dt$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} F(t) &= t\ln t - \int dt \\ &= t\ln t - t + C \\ &= t(\ln t - 1) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \ln(\sin x)\cos x dx = \sin x\left[\ln(\sin x) - 1\right] + C$$

Esercizio 1032

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} \tag{88}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= (x+k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 2k = -6 \\ l + k^2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow k = -3,\ l = -4 \\ &\Longrightarrow x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4 \\ &= 4\left[\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1\right], \end{aligned}$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 1}$$

Poniamo $t = \frac{x-3}{2}$, onde

$$dx = 2dt$$

L'integrale in funzione della variabile ausiliaria t:

$$F(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

Come è noto, $\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$, cosicché:

$$F(t) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$$

Esercizio 1033

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} \tag{89}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 2x + 1 &= 2\left(x + k\right)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 4k = -2 \\ l + 2k^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{1}{2},\ l = \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(2x - 1\right)^2 + 1\right],
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} &= 2\int \frac{dx}{\left(2x - 1\right)^2 + 1} \\
&= \int \frac{d\left(2x - 1\right)}{\left(2x - 1\right)^2 + 1} \\
&= \arctan\left(2x - 1\right) + C
\end{aligned}$$

Esercizio 1034

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2} \tag{90}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
3x^2-2x+2 &= 3\left(x+k\right)^2+l = 3x^2+6kx+3k^2+l \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 6k=-2 \\ l+3k^2=2 \end{array} \right. \Longrightarrow k=-\frac{1}{3},\, l=\frac{5}{3} \\
&\Longrightarrow 3x^2-2x+2 = 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3} \\
&= \frac{5}{3}\left[\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right],
\end{aligned}
$$

per cui:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x^2-2x+2} &= \frac{3}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)}{1+\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)^2} \\
&= \arctan\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right)+C
\end{aligned}
$$

Esercizio 1035

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$
\int \frac{5x-4}{3x^2-7x+11}dx \tag{91}
$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
5x-4 &= a\frac{d}{dx}\left(3x^2-7x+11\right)+c \\
&= a\left(6x-7\right)+c \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 6a=5 \\ c-7a=-4 \end{array} \right. \Longrightarrow a=\frac{5}{6}, \quad c=\frac{11}{6} \\
&\Longrightarrow 5x-4 = \frac{5}{6}\frac{d}{dx}\left(3x^2-7x+11\right)+\frac{11}{6}
\end{aligned}
$$

per cui:

$$\int \frac{5x-4}{3x^2-7x+1}dx = \frac{5}{6}\ln\left(3x^2-7x+11\right) + \frac{11}{6}F(x),$$

essendo:

$$F(x) \overset{def}{=} \int \frac{dx}{3x^2-7x+11}$$

Per calcolare $F(x)$ scriviamo:

$$\begin{aligned}
3x^2-7x+11 &= 3(x+k)^2 + l = 3x^2 + 6kx + 3k^2 + l \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 6k = -7 \\ l + 3k^2 = 11 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{7}{6},\ l = \frac{83}{12} \\
&\Longrightarrow 3x^2-7x+11 = 3\left(x-\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{83}{12} \\
&= \frac{83}{12}\left[\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)^2 + 1\right],
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3x^2-7x+11} &= \frac{12}{83}\int \frac{dx}{\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)^2+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{83}}\int \frac{d\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)}{1+\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{83}}\arctan\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right) + C_1
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{5x-4}{3x^2-7x+11}dx = \frac{5}{6}\ln\left(3x^2-7x+11\right) + \frac{11}{2\sqrt{83}}\arctan\left(\frac{6x-7}{\sqrt{83}}\right) + C$$

Esercizio 1036

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+23}} \tag{92}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$2x^2 - 4x + 23 = 2(x+k)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 3k^2 + l$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 4k = -4 \\ l + 2k^2 = 23 \end{cases} \Longrightarrow k = -1,\, l = 21$$
$$\Longrightarrow 2x^2 - 4x + 23 = 2(x-1)^2 + 21$$
$$= 21\left\{\left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right]^2 + 1\right\},$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+23}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right]^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right]}{1+\left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right]^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arcsinh}\left[\sqrt{\frac{2}{21}}(x-1)\right] + C$$