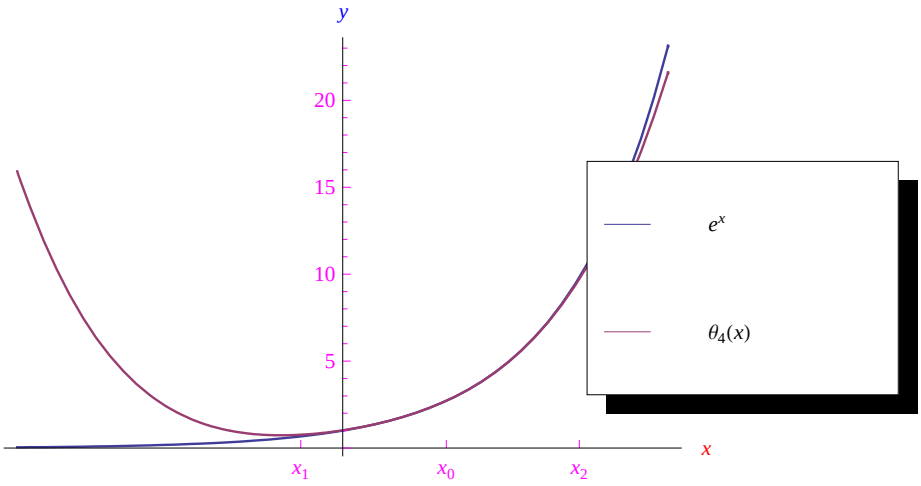
SCIENTIA – http://www.scientiajournal.org
International Review of Scientific Synthesis – ISSN 2282-2119
Monografia 00xx – 2015

MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO

Approssimazione di una funzione reale di una variabile reale

Marcello Colozzo



Sia $f \in C([a,b])$, dove il simbolo $C([a,b])$ denota lo spazio funzionale i cui elementi sono le funzioni continue nell'intervallo $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Analizziamo le varie modalità di approssimazione di f mediante una funzione del tipo:

$$\tau_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{1}$$

essendo $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)\} \subset C([a,b])$ un sistema di funzioni (non necessariamente polinomi) linearmente indipendente. Cioè:

$$\forall x \in [a,b], \quad \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + ... + \lambda_n\varphi_n(x) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Definizione 1 *Si dice* ***errore*** *generato dall'approssimazione $f \sim \tau_n$ la funzione:*

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - \tau_n(x) \tag{2}$$

Una "buona approssimazione" di f mediante τ_n richiede una condizione del tipo $|\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_{\max}$, dove $\varepsilon_{\max} > 0$ è l'*accuratezza* con cui vogliamo approssimare f, ed è un parametro fissato a priori. Un tipico esempio è offerto dalla sviluppo di Taylor di punto iniziale $x_0 \in [a,b]$ arrestato al termine di ordine n:

$$\theta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x_0 \in [a,b],$$

per cui:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(x) &= f(x) - \theta_n(x) \\ &= f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\end{aligned}$$

Ciò implica $\varepsilon_n(x_0) = 0$, mentre $|\varepsilon_n(x)|$ aumenta se ci allontaniamo da x_0. Ad esempio, consideriamo la funzione:

$$f : x \in [-\pi, \pi] \to e^x$$

L'errore è dato da:

$$\varepsilon_n(x) = e^x - e^{x_0} - e^{x_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k$$

Ad esempio per $n = 4$ il valore assoluto dell'errore ha l'andamento riportato in fig. 1.

Assumendo un'accuratezza $\varepsilon_{\max} = 10^{-1}$, deve essere ($n = 4$, $x_0 = 1$):

$$\left| e^x - e - e \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k \right| \leq 10^{-1} \tag{3}$$

Quindi, l'intorno $I(x_0)$ in cui possiamo approssimare e^x mediante $\theta_4(x)$ con un'accuratezza di 10^{-1}, è l'insieme delle soluzioni della disequazione (3), che può essere risolta numericamente ottenendo $I(x_0) = (x_1, x_2)$, dove $x_1 \simeq -0.4052$, $x_2 \simeq 2.2848$. In fig. 2 vediamo ("a occhio") che $e^x \sim \theta_4(x)$ con una accuratezza di 10^{-1} in (x_1, x_2), mentre per $x \notin (x_1, x_2)$ è $|e^x - \theta_4(x)| > 10^{-1}$.

Da questa analisi segue che lo sviluppo di Taylor fornisce una buona approssimazione solo localmente. Per un'approssimazione globale possiamo tentare di rendere minimo l'*errore lineare medio*, cioè il valor medio nell'intervallo $[a,b]$ della funzione (2):

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varepsilon_n(x)\, dx \tag{4}$$

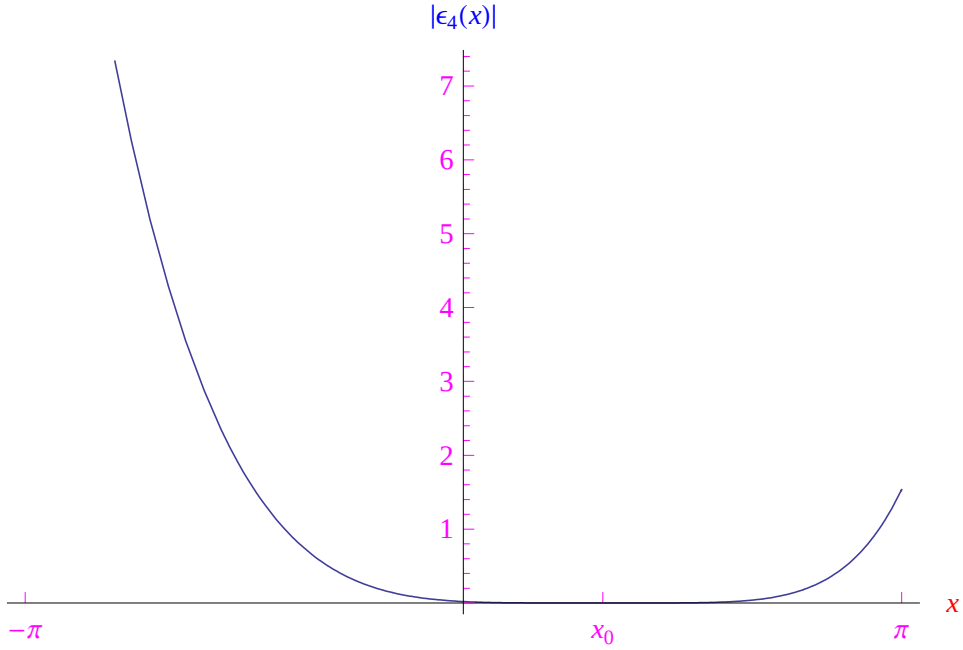


Figura 1: Grafico di $|\varepsilon_4(x)| = |e^x - \theta_4(x)|$. Qui è $x_0 = 1$.

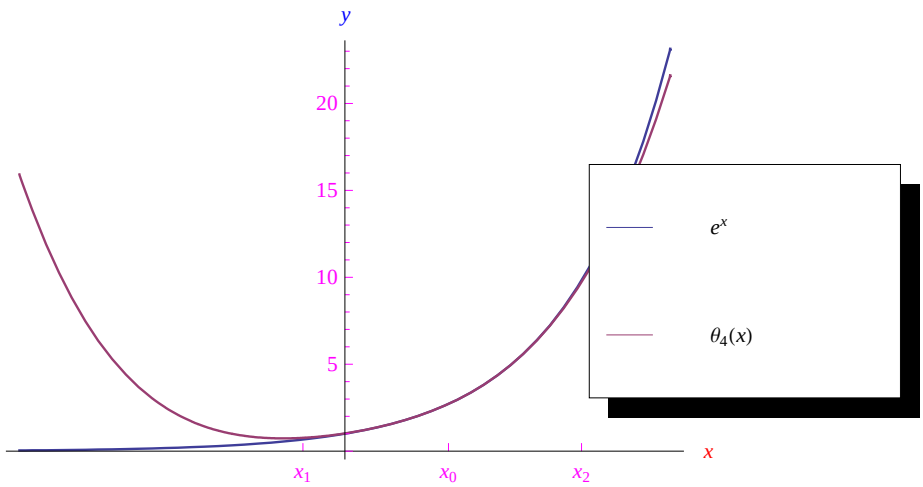


Figura 2: Approssimazione della funzione $f(x) = e^x$ in $[-\pi, \pi]$ mediante $\theta_4(x)$. Per $x \in (x_1, x_2)$ la differenza $|f(x) - \theta_4(x)|$ non supera 10^{-1}.

Si osservi che in alcuni casi può aversi:

$$|\langle\varepsilon_n\rangle| \leq \varepsilon_{\max}, \quad |\varepsilon_n(x)| \gg \varepsilon_{\max} \tag{5}$$

Ciò si verifica, ad esempio, se esiste $\xi \in (a,b)$ tale che

$$\begin{aligned} x \in (a,\xi) &\Longrightarrow f(x) \ll \tau_n(x) \\ x \in (\xi,b) &\Longrightarrow f(x) \gg \tau_n(x), \end{aligned}$$

onde l'errore lineare medio è:

$$\langle\varepsilon_n\rangle = \frac{1}{b-a}\left[-\int_a^{\xi} |f(x)-\tau_n(x)|\,dx + \int_a^{\xi} |f(x)-\tau_n(x)|\,dx\right],$$

per cui può verificarsi la (5). In altri termini,

$$|\langle\varepsilon_n\rangle| \leq \varepsilon_{\max} \not\Rightarrow |\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_{\max}$$

Riprendendo l'esempio della funzione e^x in $[-\pi,\pi]$, supponiamo di approssimare mediante il sistema di funzioni $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ con $\varphi_1(x) = 4$, $\varphi_2(x) = \sin x^2$, onde:

$$\tau_2(x) = 4a_1 - a_2 \sin x^2$$

Assumendo $a_1 = a_2 = 1$, si ha $\tau_2(x) = 4 - \sin x^2$ e $\varepsilon_2(x) = e^x - 4 + \sin x^2$, per cui:

$$\langle\varepsilon_2\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^x - 4 + \sin x^2\right) dx \simeq -7.7 \cdot 10^{-2},$$

cioè $|\langle\varepsilon_2\rangle| < 10^{-1}$. Tuttavia risulta $|\varepsilon_2(x)| \gg 10^{-1}$ come possiamo vedere dal grafico di fig. 3.

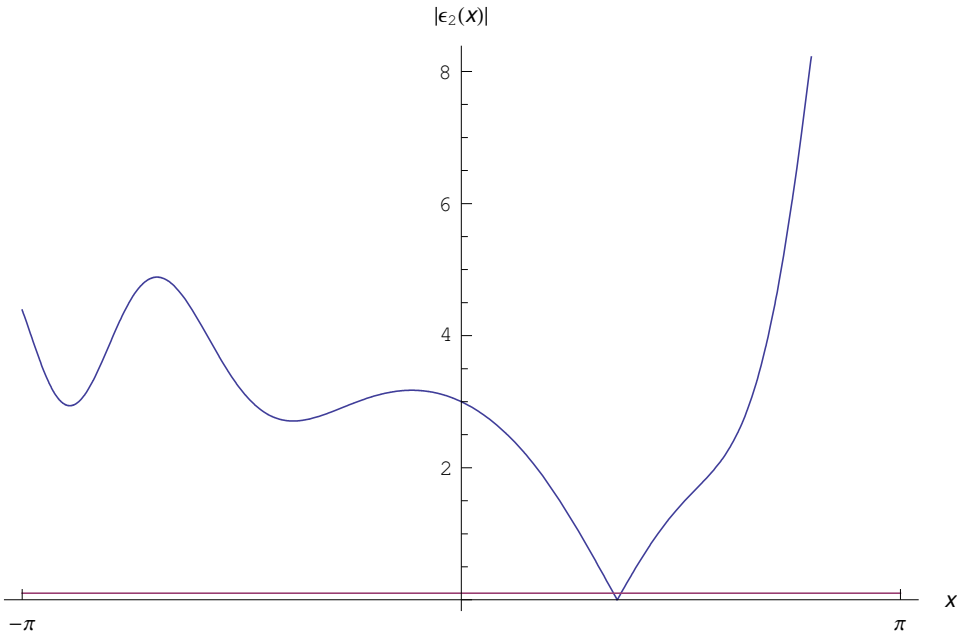


Figura 3: Andamento di $|\varepsilon_2(x)|$ da cui vediamo che $|\varepsilon_2(x)| \gg 10^{-1}$ per $x \in [-\pi,\pi] - I(x_0)$, pur avendosi $|\langle\varepsilon_2\rangle| \simeq 7.7 \cdot 10^{-2}$.

La fig. 4 conferma quanto detto sopra. Inoltre, vediamo che posto $\xi \simeq 1.11$ pari all'ascissa del punto di intersezione della curva $y = e^x$ con $y = 4 - \sin x^2$, si ha:

$$\langle\varepsilon_2\rangle = \frac{1}{2\pi}(I_1 + I_2),$$

dove:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\xi} \left(e^x - 4 + \sin x^2\right) dx \simeq -12.834$$

$$I_2 = \int_{\xi}^{\pi} \left(e^x - 4 + \sin x^2\right) dx \simeq 12.343,$$

che giustificano la "piccolezza" di $\langle \varepsilon_2 \rangle$. Detto in altro modo, le regioni

$$\mathcal{R}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \leq x \leq \xi,\ \ e^x \leq y \leq 4 - \sin x^2\right\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi \leq x \leq \pi,\ \ 4 - \sin x^2 \leq y \leq e^x\right\},$$

hanno aree "quasi" uguali in valore assoluto, ma di segno opposto, cosicchè $I_1 = mis\mathcal{R}_1 \simeq -I_2 = mis\mathcal{R}_2$.

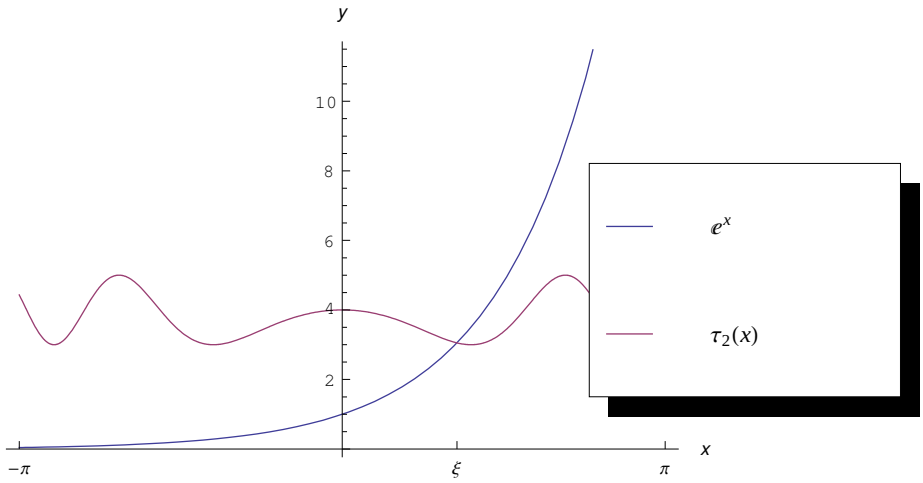


Figura 4: $\tau_2(x) = 4 - \sin x^2$ non riesce ad approssimare e^x, pur avendosi $|\langle \varepsilon_2 \rangle| \ll \varepsilon_{\max}$.

Se, invece, proviamo a calcolare l'*errore quadratico medio*, cioè il valor medio su $[-\pi, \pi]$ della funzione $\varepsilon_2(x)$, si ha:

$$\left\langle \varepsilon_2^2 \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^x - 4 + \sin x^2\right)^2 dx \simeq 29.138,$$

da cui vediamo che la combinazione lineare $\tau_2(x) = 4 - \sin x^2$ è tutt'altro che "accurata" per poter approssimare e^x in $[-\pi, \pi]$. In altri termini, nel caso dell'errore quadratico medio vale un implicazione del tipo:

$$\left\langle \varepsilon_n^2 \right\rangle \leq \varepsilon_{\max} \Longrightarrow\ |\varepsilon_n(x)| \leq \varepsilon_{\max}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Ne consegue che il miglior criterio consiste nel minimizzare l'errore quadratico medio la cui espressione nel caso generale si scrive:

$$\left\langle \varepsilon_n^2 \right\rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left[\varepsilon_n(x)\right]^2 dx$$