Approssimazione lineare a tratti di una curva piana

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Sia data una curva piana γ la cui equazione in coordinate polari (r, φ) è

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in B \subseteq \mathbb{R}, \tag{1}$$

essendo $r(\varphi)$ una funzione assegnata e non negativa in B. Le equazioni che legano le coordinate cartesiane (x, y) alle coordinate polari con polo nell'origine del riferimento cartesiano $\mathcal{R}(Oxy)$ e asse polare coincidente con l'asse x, sono:

$$x(r, \varphi) = r\cos\varphi, \quad y(r, \varphi) = r\sin\varphi, \quad (r, \varphi) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \tag{2}$$

Le (2) sono le componenti cartesiane del vettore posizione di un punto del piano di coordinate polari (r, φ):

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = (r\cos\varphi)\,\mathbf{i} + (r\sin\varphi)\,\mathbf{j}, \quad (r, \varphi) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R} \tag{3}$$

essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi coordinati x, y (cfr. fig. 1).

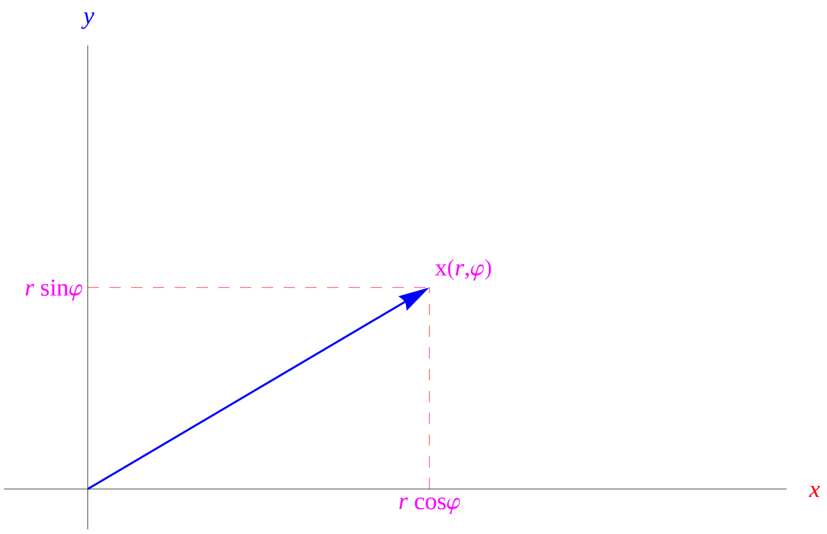

Figura 1: Vettore posizione di un punto del piano espresso in funzione delle coordinate polari (r, φ).

Sostituendo la (1) nella (3) otteniamo il vettore posizione di un punto variabile sulla curva γ:

$$\boldsymbol{\xi}(\varphi) = \mathbf{x}[r(\varphi), \varphi] = [r(\varphi)\cos\varphi]\,\mathbf{i} + [r(\varphi)\sin\varphi]\,\mathbf{j}, \quad \varphi \in B \tag{4}$$

Costruiamo una spezzata σ_γ di vertici $V_0, V_1, ..., V_N \in \gamma$. Senza perdita di generalità, supponiamo che γ passi per l'origine, e poniamo $V_0(x = 0, y = 0)$. I rimananti vertici sono:

$$V_k(r(\varphi_k), \varphi_k), \quad \text{con } \varphi_k = kd, \quad (k = 1, 2, ..., N) \tag{5}$$

Ciò implica che il k-*esimo* lato di σ_γ forma un angolo kd con l'asse x. Consideriamo il caso particolare di una rosa a 4 foglie:

$$r = a\sin(2\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{6}$$

Per $d = 1$, $N = 10$ otteniamo il grafico di fig. 2. Per $N = 300$ otteniamo il grafico di fig. 3

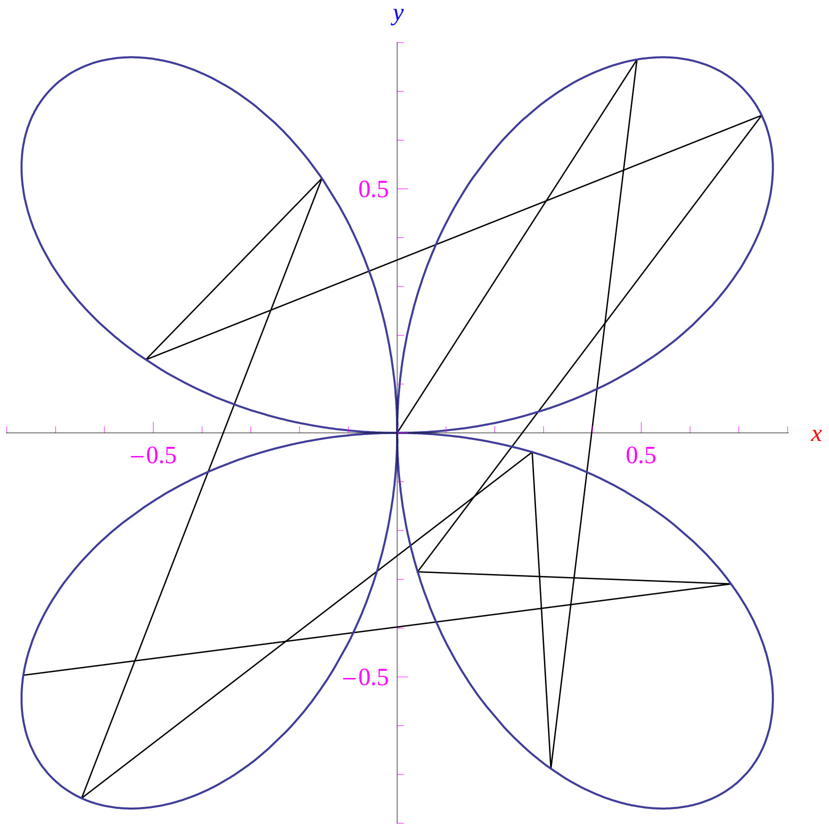

Figura 2: Approssimazione lineare a tratti di una rosa a 4 foglie, attraverso una spezzata di $N = 10$ vertici.

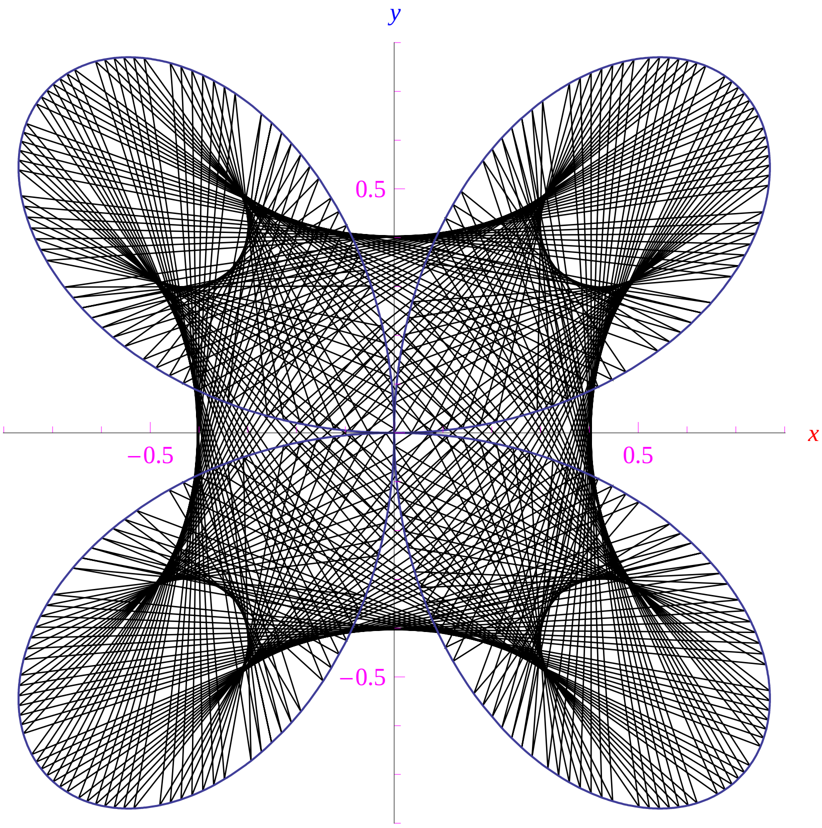

Figura 3: Approssimazione lineare a tratti di una rosa a 4 foglie, attraverso una spezzata di $N = 300$ vertici.