Applicazione bilineare

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Siano U, W sottospazi vettoriali di un assegnato spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} &\Omega : U \times W \to V \\ &\Omega : (u, w) \to \Omega (u, w), \ \ \forall (u, w) \in U \times W \end{aligned} \tag{1}$$

tale che

$$\Omega (u, w) = u - w \tag{2}$$

Dimostrare:

1. la bilinearità di Ω.

2. $\Omega (U \times W) = U + V$.

Mostrare infine che $\ker \Omega$ è isomorfo a $U \cap W$.

Soluzione

Iniziamo a dimostrare che Ω è bilineare. A tale scopo poniamo:

$$\begin{aligned} u &= \lambda u' + \mu u'', \quad \forall u', u'' \in U, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \mid (\lambda u' + \mu u'') \in U \\ w &= \lambda w' + \mu w'', \quad \forall w', w'' \in U, \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \mid (\lambda w' + \mu w'') \in W \end{aligned} \tag{3}$$

Riesce

$$\begin{aligned} \Omega (\lambda u' + \mu u'', \lambda w' + \mu w'') &= \lambda u' + \mu u'' - \lambda w' - \mu w'' \\ &= \lambda (u' - w') + \mu (u'' - w'') \\ &= \lambda \Omega (u', w') + \mu \Omega (u'', w''), \end{aligned} \tag{4}$$

da cui la bilinearità di Ω. Per il secondo punto applichiamo la definizione di immagine di un'applicazione:

$$\begin{aligned} \Omega (U \times W) &= \{\Omega (u, w) \mid (u, w) \in U \times W\} \\ &= \{u - w \mid u \in U, \ w \in W\} \end{aligned} \tag{5}$$

Dal momento che W è un sottospazio vettoriale, dovrà aversi:

$$(\alpha w) \in W, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \tag{6}$$

Per $\alpha = -1$:

$$(-w) \in W,$$

per cui la (5) si scrive:

$$\Omega (U \times W) = \{u + (-w) \mid u \in U, \ (-w) \in W\}$$

E per definizione di somma di spazi vettoriali segue che il secondo membro altro non è che $U + W$, onde

$$\Omega (U \times W) = U + W \tag{7}$$

Determiniamo il kernel di Ω:

$$\begin{aligned}\ker\Omega &= \{(u,w) \in U \times W \mid u - w = 0\} \\ &= \{(u,w) \in U \times W \mid u = w\}\,,\end{aligned}$$

cosicché:

$$(u,w) \in \ker\Omega \Longleftrightarrow u = w \tag{8}$$

Osserviamo però che in questo caso è $\ker\Omega \subset U \times W$ è come tale non è un sottoinsieme di V (e quindi nemmeno un sottospazio), per cui non ha senso chiedersi se sia isomorfo al sottospazio $U \cap W$. Tuttavia, potremmo ridefinire $\ker\Omega$:

$$\ker\Omega = \{u \in V \mid u \in U \cap W\}\,,$$

che in tal modo si identifica con $U \cap W$.