Appunti di Geometria differenziale e Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Cerchio osculatore

Teorema 1 *Sia γ una curva piana regolare. Comunque prendiamo un punto $P \in \gamma$, la migliore approssimazione a γ in un intorno di P, è l'arco di circonferenza di raggio pari al raggio di curvatura di γ in P, centrata nel semipiano contenente il versore normale $\mathbf{n}$.*

Dimostrazione. Preso ad arbitrio s_0 appartenente alla base $[s_1, s_2]$ della rappresentazione naturale di γ, denotiamo con Γ la circonferenza tangente a γ in $P(s_0)$, di centro C e raggio r, come illustrato in fig. 1. Dalla predetta figura:

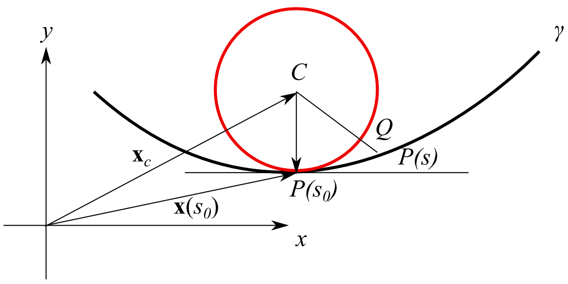

Figura 1: Teorema 1.

$$\overline{CQ} = r, \quad \overline{CP(s)} = |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C|$$

La "deviazione" di Γ dalla curva assegnata, è misurata dalla lunghezza:

$$\overline{QP(s)} = |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C| - r$$

o ciò che è equivalente:

$$f(s) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C) - r^2, \quad s \in I_\delta(s_0) = (s_0 - \delta, s_0 + \delta) \tag{1}$$

La derivata prima è

$$f'(s) = \tau(s) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C) + (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C) \cdot \tau(s) \tag{2}$$

Cioè

$$f'(s) = 2\tau(s) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C)$$

La derivata seconda:

$$f''(s) = 2k(s)\,\mathbf{n}(s) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C) + 2\underbrace{\tau(s) \cdot \tau(s)}_{=1} \tag{3}$$

onde

$$f''(s) = 2\left[k(s)\,\mathbf{n}(s) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_C) + 1\right] \tag{4}$$

L'arco Γ è la migliore approssimazione se per $s \to s_0$, la funzione (1) è un infinitesimo di ordine superiore al secondo. Assumendo come infinitesimo di riferimento, la funzione $u(s) = s - s_0$, dovrà aversi:

$$\lim_{s \to s_0} \frac{f(s)}{(s - s_0)^2} = 0 \tag{5}$$

D'altra parte

$$\lim_{s \to s_0} \frac{f(s)}{(s - s_0)^2} = \frac{0}{0} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{2} \lim_{s \to s_0} \frac{f'(s)}{s - s_0} = \frac{0}{0} \stackrel{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{2} \lim_{s \to s_0} f''(s)$$

Tenendo conto della (5) e della continuità della $f''(s)$:

$$f''(s_0) = 0$$

Dalla (4):

$$k(s_0)\, \mathbf{n}(s_0) \cdot (\mathbf{x}(s_0) - \mathbf{x}_C) + 1 = 0 \Longrightarrow (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}(s_0)) \cdot \mathbf{n}(s_0) = R(s_0),$$

essendo $R(s_0)$ il raggio di curvatura di γ in $P(s_0)$. Cioè

$$|\mathbf{x}_C - \mathbf{x}(s_0)| = R(s_0)$$

■

Il teorema appena dimostrato giustifica la seguente definizione:

Definizione 2 *Dicesi* **cerchio osculatore** *di una curva regolare γ in un punto P, il cerchio ivi tangente a γ, di raggio pari al raggio di curvatura di γ in P, centrato nel semipiano contenente il versore normale $\mathbf{n}$ a γ.*

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri