Appunti di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnata la curva regolare γ di rappresentazione parametrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$, introduciamo un *sistema di ascisse curvilinee* nel modo che segue. Orientiamo γ e fissiamo un punto $O \in \gamma$ che chiamiamo *origine degli archi.*

Definizione 1 *Si dice* **ascissa curvilinea** *del punto P (corrispondente al valore t del parametro), il numero reale*

$$s(t) = \pm \int_{t_0}^{t} |\mathbf{x}(t')|\, dt', \quad \textit{dove } t_0 \textit{ è il valore del parametro corrispondente a } O \tag{1}$$

con il segno $(+)$ se il verso $O \to P$ è concorde al verso positivo di γ, e viceversa.

Dalla (1):

$$\dot{s}(t) = \pm |\dot{\mathbf{x}}(t')| \neq 0 \tag{2}$$

onde la funzione $s(t)$ definisce una sostituzione di parametro ammissibile:

$$\gamma : \mathbf{x}(s), \quad s \in [s_1, s_2] \tag{3}$$

con

$$s_1 = s(a), \ s_2 = s(b), \ \text{ se } \dot{s}(t) > 0 \text{ e viceversa}$$

Per il teorema precedente:

$$s = \int_0^s \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds'} \right| ds'$$

Derivando rispetto a s:

$$1 = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right|, \quad \forall s \in [s_1, s_2] \tag{4}$$

Rammentando che in una qualunque rappresentazione parametrica $\mathbf{x}(\theta)$, la derivata $\frac{d\mathbf{x}}{d\theta}$ è un vettore tangente alla curva, si giustifica la seguente definizione:

Definizione 2 *Assegnato un sistema di ascisse curvilinee su una curva regolare γ, la rappresentazione parametica*

$$\mathbf{x}(s), \ \in [s_1, s_2] \tag{5}$$

si dice **rappresentazione naturale** *di γ e verifica la notevole proprietà*

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = 1, \quad \forall s \in [s_1, s_2]$$

i.e.$\frac{d\mathbf{x}}{ds}$ è il versore tangente a γ.

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri