Appunti di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Definizione 1 *Assegnata una curva piana γ di rappresentazione parametrica*

$$x = x(t), \quad t \in (a,b), \quad \text{con } \mathbf{x}(t) \in C^{p \geq 1}$$

si definisce **lunghezza** *di γ, il numero reale positivo:*

$$l = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)|\, dt \tag{1}$$

Tale definizione è consistente. Ad esempio, se γ è la circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio R, una sua rappresentazione parametrica è

$$\mathbf{x}(t) = R(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t)$$

per cui

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{R^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} = R$$

Quindi

$$l = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R$$

Teorema 2 *Il numero reale (1) è indipendente dalla rappresentazione parametrica.*

Dimostrazione. Assegnata $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ eseguiamo una *riparametrizzazione* ovvero una *sostituzione di parametro ammissibile:*

$$t = t(\theta), \quad \text{con } t(\theta) \in C^2 \text{ e } \frac{dt}{d\theta} \neq 0 \tag{2}$$

Quindi

$$\gamma : \mathbf{x}(t(\theta)) = \mathbf{y}(\theta), \quad \theta \in (a', b'), \tag{3}$$

dove

$$a' = \begin{cases} \theta(a), \text{ se } \frac{dt}{d\theta} > 0 \\ \theta(b), \text{ se } \frac{dt}{d\theta} < 0 \end{cases}, \quad b' = \begin{cases} \theta(b), \text{ se } \frac{dt}{d\theta} > 0 \\ \theta(a), \text{ se } \frac{dt}{d\theta} < 0 \end{cases} \tag{4}$$

Segue

$$l = \begin{cases} \int_{a'}^{b'} \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(\theta))\right| \frac{dt}{d\theta} d\theta, \text{ se } \frac{dt}{d\theta} > 0 \\ -\int_{b'}^{a'} \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(\theta))\right| \frac{dt}{d\theta} d\theta, \text{ se } \frac{dt}{d\theta} < 0 \end{cases} \Longrightarrow l = \int_{a'}^{b'} \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(\theta))\right| \left|\frac{dt}{d\theta}\right| d\theta$$

Ma

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t(\theta))\right| \left|\frac{dt}{d\theta}\right| = \left|\frac{d\mathbf{y}}{d\theta}\right|$$

onde l'asserto. ∎

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri