Appunti di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia $\gamma : F(x,y) = 0$ una curva regolare, dove F è la consueta funzione:

$$F : A \to \mathbb{R}, \quad (A \subseteq \mathbb{R}^2, \quad F \in C^{p \geq 2}(A)) \tag{1}$$

Assegnato ad arbitrio $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$ si ha:

$$\nabla F(P_0) = F_x(x_0, y_0)\,\mathbf{i} + F_y(x_0, y_0)\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0} \tag{2}$$

Senza perdita di generalità supponiamo $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dalla regolarità di $F_y(x,y)$

$$\exists I(P_0) \mid (x,y) \in A \cap I(P_0) \Longrightarrow F_y(x,y) \neq 0$$

Segue

$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}, \quad \forall (x,y) \in A \cap I(P_0) \tag{3}$$

In particolare

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} \tag{4}$$

che è il coefficiente angoglare della retta tangente τ a γg in P_0. Ne consegue l'equazione di τ:

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x - x_0) \tag{5}$$

Una coppia di numeri direttori di τ è dunque

$$\left(1, -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}\right)$$

o ciò che è lo stesso

$$(-F_y(x_0,y_0), F_x(x_0,y_0)) \tag{6}$$

Come è noto, i numeri direttori di una retta, sono le componenti cartesiane di un qualunque vettore parallelo alla retta medesima, mentre i coseni direttori sono le componenti di uno dei versori (unico se la retta è orientata).

Il coefficiente angolare della retta normale n a γ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ è $+\frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}$, da cui una coppia di numeri direttori di n è

$$(F_x(x_0,y_0), F_y(x_0,y_0)) \tag{7}$$

cioè $\nabla F(P_0)$. Ne concludiamo che $\nabla F(P_0)$ è orientato secondo la normale n (fig: 1). Ciò implica che l'equazione di τ può essere scritta in forma vettoriale:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla F(\mathbf{x}_0) \tag{8}$$

avendo introdotto il vettore posizione $\mathbf{x} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$.

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri

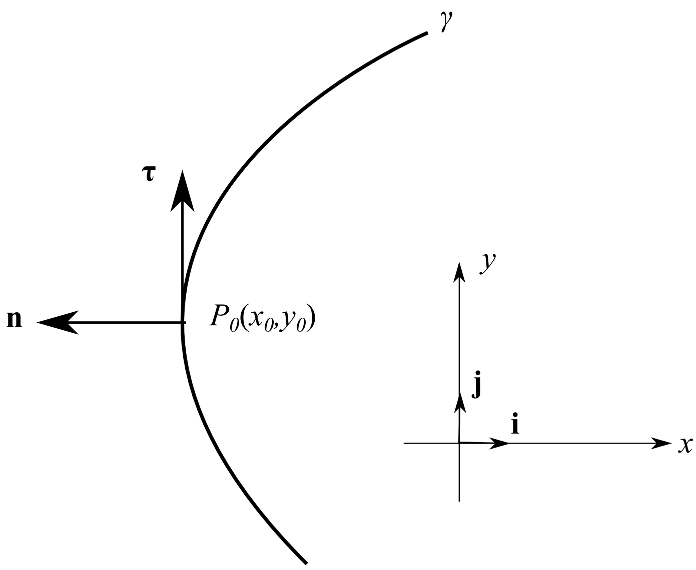

Figura 1: Il vettore ∇F è orientato secondo la normale alla curva γ nel punto dato.