Appunti di Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Classificazione dei punti singolari

Per quanto precede, un punto $P_0(x_0, y_0) \in \gamma : F(x, y) = 0$ è un punto singolare se (x_0, y_0) risolve il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 & \text{(appartenenza a } \gamma) \\ F_x(x, y) = 0 \\ F_y(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Dal momento che per ipotesi $F \in C^{p \geq 1}$ fissiamo la nostra attenzione sulle derivate parziali seconde $F_{xx}(x, y)$, $F_{xy}(x, y)$, $F_{yy}(x, y)$, introducendo i numeri reali:

$$A = F_{xx}(x_0, y_0), \; B = F_{xy}(x_0, y_0), \; C = F_{yy}(x_0, y_0) \tag{2}$$

Definizione 1 *Sia $P_0(x_0, y_0)$ un punto singolare di γ tale che*

$$A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

Posto

$$\Delta = AC - B^2$$

si ha:

1. $\Delta > 0 \Longrightarrow P_0$ *è un* **punto isolato**;
2. $\Delta < 0 \Longrightarrow P_0$ *è un* **punto doppio** *o* **nodo**;
3. $\Delta = 0$. *Abbiamo tre casi possibili: a)* **tecnodo di prima specie** *o* **cuspide**; *b)* **tecnodo di seconda specie**; *c)* **punto di osculazione** . *Per stabilire quali dei tre, occorre disegnare la curva.*

Esercizio 2 *Classificare i punti singolari della curva*

$$\gamma : y^2 = ax^2 + x^3,$$

al variare del parametro reale a.

Soluzione
La rappresentazione implicita della curva è

$$F(x, y) = 0,$$

dove

$$F(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2 \tag{3}$$

Segue

$$F_x(x, y) = 2ax + 3x^2, \quad F_y(x, y) = -2y \tag{4}$$

Risolviamo il sisema

$$\begin{cases} 2ax + 3x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0)$$

Dal momento che $F(0,0)$, il punto $(0,0) \in \gamma$. Quindi $(0,0)$ è punto singolare per γ. Per classificarlo, calcoliamo

$$F_{xx}(x, y) = 2a + 6x, \;\; F_{xy}(x, y) = 0, \;\; F_{yy}(x, y) = -2 \tag{5}$$

I coefficienti che ci interessano sono

$$A = F_{xx}(0, 0) = 2a, \;\; B = F_{xy}(0, 0) = 0, \;\; F_{yy}(0, 0) = -2 \tag{6}$$

Dunque

$$\Delta = AC - B^2 = -4a$$

per cui

$$a > 0 \Longrightarrow \Delta < 0$$

Cioè per $a > 0$, il punto singolare $(0,0)$ è un nodo (fig. 1).

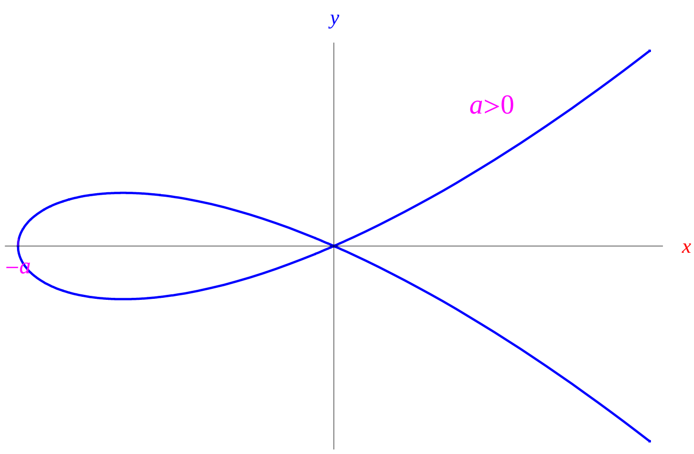

Figura 1: Curva $y^2 = ax^2 + x^3$, per $a > 0$.

Per $a < 0$ è $\Delta > 0$, i.e. $(0,0)$ è un punto isolato (fig. 2).

Per $a = 0$ è $\Delta = 0$ per cui dobbiamo tracciare la curva per stabilire la natura di $(0,0)$. Osserviamo che per $a = 0$ si ha

$$y^2 = x^3$$

onde la curva è l'unione dei rami $y = \pm x^{3/2}$ e l'origine è un evidente punto cuspidale (fig. 3).

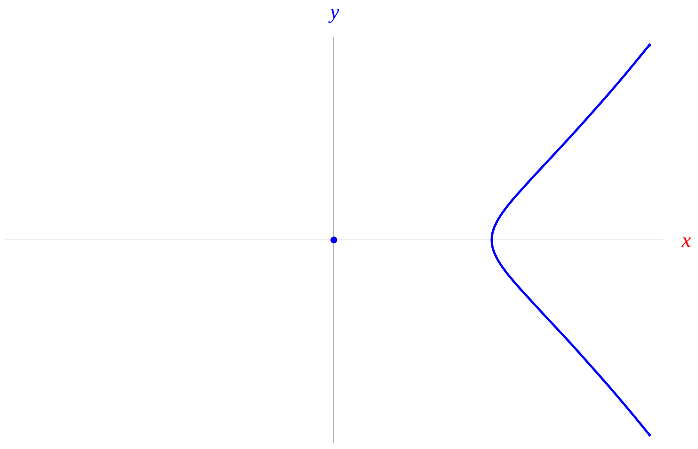

Figura 2: Curva $y^2 = ax^2 + x^3$, per $a < 0$.

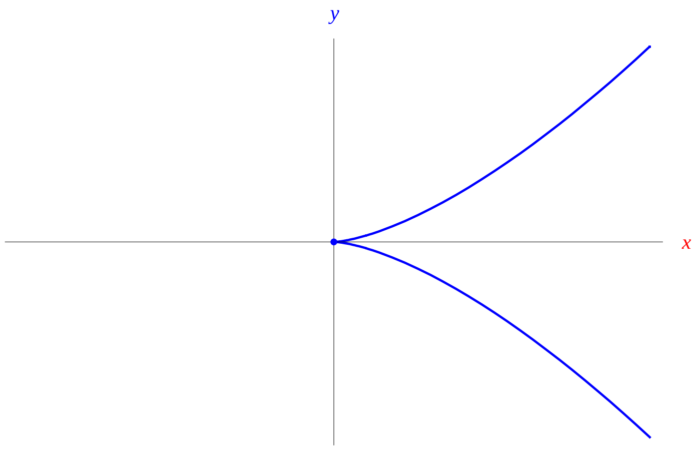

Figura 3: Curva $y^2 = ax^2 + x^3$, per $a = 0$.

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri