Appunti di Geometria differenziale e Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Un teorema notevole

Comunque assegnamo una curva regolare γ di rappresentazione parametrica di classe $C^{p\geq 2}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad t \in [a, b] \tag{1}$$

il valore assoluto della curvatura è

$$|k| = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} \tag{2}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\mathbf{x}' \tag{3}$$

Ricordiamo che con l'apice denotiamo la derivata rispetto al parametro naturale s: $\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$. Derivando la (3) rispetto a t:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{s}\mathbf{x}' + \dot{s}\frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \ddot{s}\mathbf{x}' + \dot{s}\frac{d\mathbf{x}'}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Cioè

$$\ddot{\mathbf{x}} = = \ddot{s}\mathbf{x}' + \dot{s}^2\mathbf{x}'' \tag{4}$$

Tenendo conto delle (3)-(4) e della proprietà distributiva del prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}} &= (\dot{s}\mathbf{x}') \wedge \left(\ddot{s}\mathbf{x}' + \dot{s}^2\mathbf{x}''\right) \\ &= \dot{s}\ddot{s}\underbrace{\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}'}_{=\mathbf{0}} + \dot{s}^3\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''\end{aligned}$$

Abbiamo dunque l'interessante relazione

$$\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}} = \dot{s}^3\mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}''$$

La (3) può essere espressa in termini del versore tangente $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}'(s)$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{s}\mathbf{x}' = \dot{s}\boldsymbol{\tau} \Longrightarrow |\dot{\mathbf{x}}| = |\dot{s}| \Longrightarrow \dot{s} = \pm|\dot{\mathbf{x}}|,$$

onde

$$\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}} = \pm|\dot{\mathbf{x}}|^3 \boldsymbol{\tau} \wedge \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

Ricordando che $\boldsymbol{\tau} \perp \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$

$$|\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}| = \pm|\dot{\mathbf{x}}|^3 \underbrace{|\boldsymbol{\tau}|}_{=1} \underbrace{\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|}_{=|k|}$$

onde l'asserto. ∎