Differential geometry

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Lemma 1 ***Hp**: **1)** Let us consider an application that associates an element of the orthogonal group $O(n)$ to a scalar $t \in (a,b)$:*

$$A : (a,b) \to O(n)$$
$$A : t \in (a,b) \to A(t) \in O(n)$$

*We assume $A(t) \in C^1$. **2)** $\exists t_0 \in (a,b) \mid A(t_0) = \bar{I}$*
***Th**: $\dot{A}(t_0)$ è antisimmetrica.*

Proof.

$$A(t) \in O(n) \Longrightarrow A^T(t)\, A(t) = \bar{I},$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\left[A^T(t)\, A(t)\right] = 0 \Longrightarrow \frac{dA^T}{dt} A(t) + A^T(t) \frac{dA}{dt} = 0$$

Segue

$$\left(\frac{dA^T}{dt}\right)_{t_0} A(t_0) + A^T(t_0) \left(\frac{dA}{dt}\right)_{t_0} = 0 \tag{1}$$

Per ipotesi

$$A(t_0) = \bar{I} \Longrightarrow A^T(t_0) = \bar{I}$$

Quindi la (1) diviene

$$\left(\frac{dA^T}{dt}\right)_{t=t_0} = -\left(\frac{dA}{dt}\right)_{t=t_0} \tag{2}$$

La derivata della trasposta coincide ovviamente con la trasposta della derivata:

$$\left(\frac{dA^T}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{dA}{dt}\right)^T_{t=t_0} \tag{3}$$

cosicchè la (1) si riscrive:

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)^T_{t=t_0} = -\left(\frac{dA}{dt}\right)_{t=t_0} \tag{4}$$

■

References

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri