Appunti di Geometria differenziale e Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Lemma 1 ***Hp***: ***1)*** *Consideriamo un'applicazione che a uno scalare $t \in (a,b)$ associa un elemento del gruppo ortogonale $O(n)$:*

$$
\begin{aligned}
&A : (a,b) \to O(n) \\
&A : t \in (a,b) \to A(t) \in O(n)
\end{aligned}
$$

Assumiamo $A(t) \in C^1$. ***2)*** $\exists t_0 \in (a,b) \mid A(t_0) = \bar{I}$

Th: *$\dot{A}(t_0)$ è antisimmetrica.*

Dimostrazione.

$$
A(t) \in O(n) \Longrightarrow A^T(t)\,A(t) = \bar{I},
$$

per cui

$$
\frac{d}{dt}\left[A^T(t)\,A(t)\right] = 0 \Longrightarrow \frac{dA^T}{dt}A(t) + A^T(t)\frac{dA}{dt} = 0
$$

Segue

$$
\left(\frac{dA^T}{dt}\right)_{t_0} A(t_0) + A^T(t_0)\left(\frac{dA}{dt}\right)_{t_0} = 0 \tag{1}
$$

Per ipotesi

$$
A(t_0) = \bar{I} \Longrightarrow A^T(t_0) = \bar{I}
$$

Quindi la (1) diviene

$$
\left(\frac{dA^T}{dt}\right)_{t=t_0} = -\left(\frac{dA}{dt}\right)_{t=t_0} \tag{2}
$$

La derivata della trasposta coincide ovviamente con la trasposta della derivata:

$$
\left(\frac{dA^T}{dt}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{dA}{dt}\right)^T_{t=t_0} \tag{3}
$$

cosicchè la (1) si riscrive:

$$
\left(\frac{dA}{dt}\right)^T_{t=t_0} = -\left(\frac{dA}{dt}\right)_{t=t_0} \tag{4}
$$

■

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri