Appunti di Geometria differenziale e Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Curve in $\mathbb{R}^3$. Curva regolare. Terna intrinseca

Le nozioni esposte nei numeri precedenti si gneralizzano facilmente alle curve in $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, una rappresentazione parametrica di una curva γ è una funzione vettoriale $\mathbf{x}(t)$ della variabile reale t (parametro della rappresentazione) definita in un intervallo (a, b):

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} : (a, b) \to \mathbb{R}^3 \\ &\mathbf{x} : t \in (a, b) \to \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

Pertanto $x(t)$ altro non è che una terna ordinata di funzioni scalari:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

o ciò che è lo stesso, in rappresentazione cartesiana:

$$\mathbf{x}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

γ è una curva regolare se $x(t) \in C^{p\geq 3}$ ed è priva di punti singolari i.e. $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$.

Anche nel caso tridimensionale il numero reale positivo

$$l = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)|\, dt \tag{2}$$

definisce la lunghezza dell'arco γ. Introducendo un sistema di ascisse curvilinee di origine $\Omega(t_0)$:

$$s(t) = \pm \int_{t_0}^{t} |\dot{\mathbf{x}}(t')|\, dt' \Longrightarrow \dot{s}(t) = \pm |\dot{\mathbf{x}}(t)| \neq \mathbf{0} \Longleftarrow \gamma \text{ è regolare} \tag{3}$$

Ne consegue che la funzione $s(t)$ è invertibile e come tale determina una sostituzione di parametro ammissibile (o riparametrizzazione) e la nuova rappresentazione è detta rappresentaziona naturale:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)\,, \quad s \in [s_1, s_2] \tag{4}$$

Ne segue il versore tangente:

$$\tau(s) = \mathbf{x}'(s) \tag{5}$$

per cui il vettore tangente è il derivato del vettore posizione in funzione di s, esattamente come in Analisi 1 il coefficiente angolare della retta tangente a $y = f(x)$ è la derivata $f'(x)$. Ecco perché il formalismo vettoriale è estremamente efficace in geometria differenziale.

Riprendiamo l'equazione che definisce il versore normale principale a una curva piana:

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{k(s)}\mathbf{x}''(s) \tag{6}$$

che si estende al caso tridimensionale. Tuttavia qui la funzione $k(s)$ (curvatura) non è sufficiente a determinare la curva γ. Nel caso di una curva piana, possiamo considerare il prodotto vettoriale $\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{n}$, definendo il versore:

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{n} \tag{7}$$

ortogonale al piano della curva e tale che la terna ortonormale $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ èlevogira. Per una curva piana è manifestamente

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{0} \tag{8}$$

Al contrario, per una curva in $\mathbb{R}^3$ ci aspettiamo

$$\mathbf{b}'(s) \neq \mathbf{0} \tag{9}$$

Chiamiamo $\mathbf{b}(s)$ **versore binormale** di γ nel punto di ascissa curvilinea s; la terna $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ si dice **terna intrinseca**.

2 Piano osculatore

Consideriamo il fascio $\mathcal{F}$ di piani avente per asse la retta tangente a γ in $P(s_0)$. Tale retta è orientata concordemente al verso positivo di γ, per cui il suo versore è $\boldsymbol{\tau}(s_0) = \mathbf{x}'(s_0)$. Se α è un qualunque piano di $\mathcal{F}$, denotiamo con $\mathbf{N}$ il versore perpendicolare a α (fig. ??v). Ne segue l'equazione di α:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s_0)) \cdot \mathbf{N} = 0 \tag{10}$$

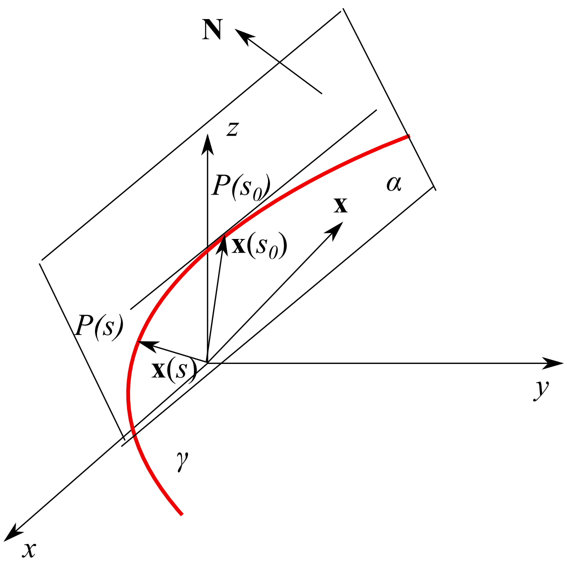

Figura 1: Il piano α appartiene al fascio di piani avente per asse la retta tangente a γ in $P(s_0)$.

Al variare di $\mathbf{N}$ la (??) restituisce l'equazione di tutti e soli i piani di $\mathcal{F}$, e quindi del fascio medesimo. Se $d(P(s), \alpha)$ è la distanza non orientata tra $P(s) \in \gamma$ e α, definiamo

$$f(s) = \pm d(P(s), \alpha) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0)) \cdot \mathbf{N} \tag{11}$$

La derivata prima di tale funzione ci dà la rapidità con cui varia la predetta distanza:

$$f'(s) = \mathbf{x}'(s) \cdot \mathbf{N} = \boldsymbol{\tau}(s) \cdot \mathbf{N} \tag{12}$$

Ovviamente s_0 è uno zero per $f(s)$ e $f'(s)$. Passiamo alla derivata seconda

$$f''(s) = \mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{N} = k(s)\, \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{N} \tag{13}$$

e non è detto che sia $f''(s_0) = 0$ (per un assegnato piano α). Possiamo far variare α in F, fino a selezionare il piano α_0 tale che

$$\mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{N} = 0 \Longrightarrow \mathbf{N} = \mathbf{b}(s_0)$$

Cioè esiste ed è unico il piano α_0 il cui versore perpendicolare è la binormale di γ in s_0. Questo piano si chiama **piano osculatore** a γ in $P(s_0)$, ed è dunque individuato da $\tau(s_0), \mathbf{n}(s_0)$. Ne segue che al variare di x su α, il vettore $x - x(s_0)$ si esprime in tutti i modi possibili come combinazione lineare dei predetti versori. Abbiamo quindi la rappresentazione parametrica del piano osculatore:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s_0) + \lambda_1 \boldsymbol{\tau}(s_0) + \lambda_2 \mathbf{n}(s_0) \tag{14}$$

ove $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, +\infty)$ sono i parametri della rappresentazione.

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri