Appunti di Geometria differenziale e Meccanica analitica

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Teorema 1 *Assegnata una funzione $k(s)$ continua in $[s_1, s_2]$ e ivi positiva, comunque fissiamo $s_0 \in [s_1, s_2]$, esiste ed è unica la curva piana avente in $P_0(s_0)$ versore tangente $\boldsymbol{\tau}_0$ e versore normale n_0.*

Dimostrazione. Dal teorema di Frenet:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k(s)\,\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\,\boldsymbol{\tau}$$

derivando rispetto a s:

$$\frac{d^2\boldsymbol{\tau}}{ds^2} = \frac{k'(s)}{k(s)}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} - k^2(s)\,\boldsymbol{\tau} \tag{1}$$

In notazione apicale:

$$\boldsymbol{\tau}'' = \frac{k'(s)}{k(s)}\boldsymbol{\tau}' - k^2(s)\,\boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

che è un'equazione differenziale vettoriale del secondo ordine in $\boldsymbol{\tau}(s)$. Passando alla rappresentazione cartesiana:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \tau_x(s)\,\mathbf{i} + \tau_y(s)\,\mathbf{j}$$

la (2) equivale al sistema di equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\begin{cases} \tau_x'' = \frac{k'(s)}{k(s)}\tau_x' - k^2(s)\,\tau_x \\ \tau_y'' = \frac{k'(s)}{k(s)}\tau_y' - k^2(s)\,\tau_y \end{cases} \tag{3}$$

nelle funzioni $\tau_x(s)\,, \tau_y(s)$. Più formalmente:

$$\begin{cases} \tau_x'' = f_1(s, \tau_x, \tau_x') \\ \tau_y'' = f_2(s, \tau_y, \tau_y') \end{cases}, \tag{4}$$

avendo posto:

$$f_1(s, \tau_x, \tau_x') = -k^2(s)\,\tau_x + \frac{k'(s)}{k(s)}\tau_x'; \quad f_2(s, \tau_y, \tau_y') = -k^2(s)\,\tau_y + \frac{k'(s)}{k(s)}\tau_y' \tag{5}$$

che sono funzioni reali definite rispettivamente in

$$\begin{aligned} &[s_1, s_2] \times A_x, \ (A_x \subseteq \mathbb{R}^2) \\ &[s_1, s_2] \times A_y, \ (A_y \subseteq \mathbb{R}^2) \end{aligned} \tag{6}$$

Dal momento che per ipotesi la funzione $k(s)$ è continua, le funzioni f_1, f_2 sono continue nei rispettivi insiemi di definizione (6), risultando analitiche rispetto alle rimanenti variabili. Ne segue che sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy– Lipschitz (che tra l'altro, richiede la lipschitzianità e non l'analiticità), per cui assegnata una condizione iniziale del tipo (con s_0 preso ad arbitrio in $[s_1, s_2]$)

$$\tau_x(s_0) = \tau_{0x}, \ \tau_x'(s_0) = \tau_{0x}', \tag{7}$$

esiste ed è unica la soluzione $\tau_x(s)$ della prima delle (3). In maniera anolaga, una condizione iniziale

$$\tau_x(s_0) = \tau_{0x}, \ \tau'_x(s_0) = \tau'_{0x}, \tag{8}$$

determina univocamente la soluzione $\tau_y(s)$ della seconda delle (3). Dalla relazione $\boldsymbol{\tau}'(s) = k(s)\,\mathbf{n}(s)$ segue

$$\tau'_x(s_0) = k(s_0)\,n_x(s_0)\,, \quad \tau'_y(s_0) = k(s_0)\,n_y(s_0)$$

per cui assegnare $\tau'_x(s_0)\,, \tau'_y(s_0)$ equivale ad assegnare il versore normale in s_0: $\boldsymbol{\tau}'(s_0) = k(s_0)\,\mathbf{n}_0$. Ciò implica che una condizione iniziale per la (2) è

$$\boldsymbol{\tau}(s_0) = \boldsymbol{\tau}_0, \quad \boldsymbol{\tau}'(s_0) = k(s_0)\,\mathbf{n}_0 \tag{9}$$

Per quanto precede, la (9) determina univocamente la soluzione $\boldsymbol{\tau}(s)$. Ricordando che

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\boldsymbol{x}(s)}{ds}$$

si ha:

$$\mathbf{x}(s) = \int_{s_0}^{s} \tau(\sigma)\,d\sigma$$

onde l'asserto. ■

Riferimenti bibliografici

[1] Fasano A., Marmi S. 1994. *Meccanica analitica*. Boringhieri