Appunti di Geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

Teorema 1 *L'evoluta di un asteroide è un asteroide di ampiezza doppia, ruotato di $\pi/4$.*

Dimostrazione. Una rappresentazione parametrica di un asteroide di ampiezza a, è data da

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Dobbiamo determinare le coordinate del centro di curvatura nel punto corrente $(x(t), y(t))$:

$$x_C = x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \quad y_C = y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \tag{1}$$

A tale scopo, calcoliamo le derivate rispetto al parametro t:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3a\left(\sin^3 t - \sin t\right), \quad \dot{y} = 3a\left(\cos t - \cos^3 t\right) \\ \ddot{x} &= 3a\left(3\sin^3 t\cos t - \cos t\right), \quad \ddot{y} = 3a\left(3\cos^2 t\sin t - \sin t\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Sostituendo le (2) nelle (1) ed eseguendo i dovuti passaggi, si perviene:

$$x_C = a\cos t\,(2 - \cos 2t), \quad y_C = a\sin t\,(2 + \cos 2t)$$

Quindi una rappresentazione parametrica dell'evoluta è

$$x = a\cos t\,(2 - \cos 2t), \quad y = a\sin t\,(2 + \cos 2t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Per stabilire l'andamento di questa curva, eseguiamo dapprima la sostituzione di parametro ammissibile, definita dalla funzione:

$$t = \theta + \frac{\pi}{4},$$

ottenendo

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos\theta - \sin\theta)(2 + \sin 2\theta), \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos\theta - \sin\theta)(2 + \sin 2\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \tag{3}$$

Quindi eseguiamo una rotazione di $\pi/4$ (in senso anti-orario) degli assi coordinati. In generale, il passaggio dal riferimento cartesiano ortogonale Oxy al riferimento cartesiano ortogonale $O\xi\eta$, ruotato di un angolo φ, è rappresenato dalla matrice ortogonale:

$$\mathcal{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} \\ \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} & \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} \end{pmatrix} \tag{4}$$

dove $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ e $\{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ sono i versori degli assi x, y e ξ, η, rispettivamente, i.e. sono due basi ortonormali distinte di $\mathbb{R}^2$. Risulta:

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} = \cos\varphi, \quad \mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} = \sin\varphi, \quad \mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} = -\sin\varphi, \quad \mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} = \cos\varphi,$$

onde

$$\mathcal{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{5}$$

Il vettore colonna delle nuove coordinate (ξ, η) è

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nel caso in esame è

$$\mathcal{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

da cui

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \tag{7}$$

Tenendo conto delle (3), ed eseguendo le dovute semplificazioni, si ottiene:

$$\xi = 2a\cos^3\theta, \quad \eta = 2a\sin^3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

onde l'asserto (1). ■

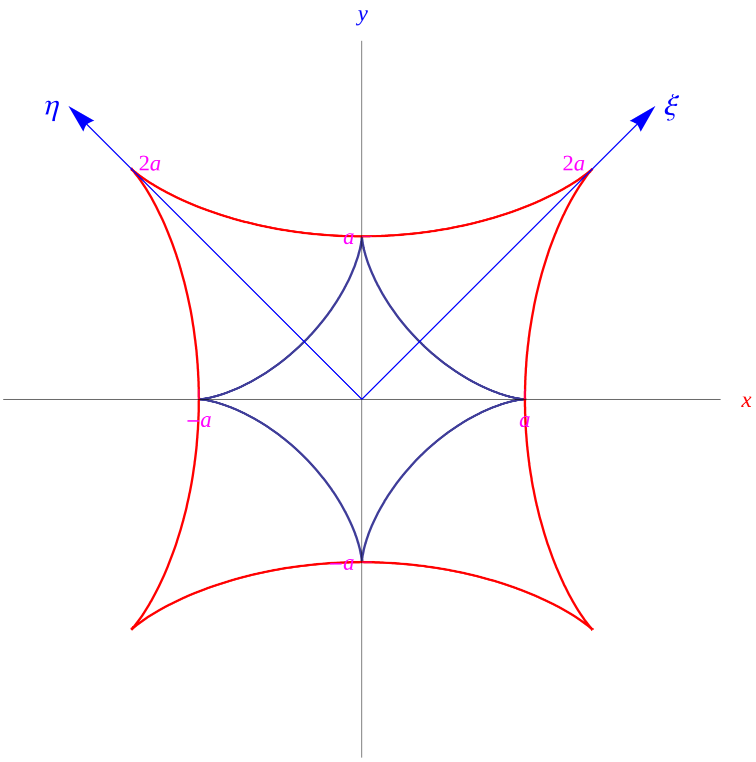

Figura 1: Teorema 1.