Appunti di Geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

1 Inviluppo di una famiglia di curve piane

Sia data una famiglia Φ di curve piane regolari, di rappresentazione implicita:

$$F(x, y, \lambda) = 0, \tag{1}$$

dove λ è un parametro reale, i.e. $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}$. per un assegnato λ la (1) rappresenta la curva piana regolare

$$\gamma_\lambda : F(x, y, \lambda) = 0 \tag{2}$$

La regolarità implica

$$(F_x(x, y, \lambda), F_y(x, y, \lambda)) \neq (0, 0), \quad \forall (x, y) \in A, \ \forall \lambda \in \Lambda \tag{3}$$

essendo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme di definizione della funzione reale

$$F : (x, y) \in A \longrightarrow F(x, y) \in \mathbb{R}$$

In termini vettoriali

$$\nabla F \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x, y) \in A \tag{4}$$

Esempio 1 *Sia*

$$\Phi : x^2 + y^2 - \lambda = 0, \qquad \lambda \in (0, +\infty)$$

cioè la famiglia di circonferenze con centro in $(0, 0)$ *e raggio* $\lambda^{1/2}$. *Abbiamo* $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda$, *per cui*

$$\nabla F = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 2\mathbf{x}$$

Risulta

$$\nabla F = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Longleftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

che ovviamente non appartiene a nessuna curva della famiglia assegnata:

$$(0, 0) \notin \gamma_\lambda, \quad \forall \lambda \in (0, +\infty)$$

La regolarità di γ_λ implica l'esistenza della retta tangente in ogni punto $P \in \gamma_\lambda$. L'equazione vettoriale della retta tangente a γ_λ in $P_0(x_0, y_0)$ è

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla F(\mathbf{x}_0) = 0 \tag{5}$$

e quindi l'equazione cartesiana

$$(x - x_0) F_x(x_0, y_0, \lambda) + (y - y_0) F_y(x_0, y_0, \lambda) = 0 \tag{6}$$

Ciò premesso, sussiste la definizione:

Definizione 2 *Assegnata una famiglia* Φ *di cuve piane regolari, dicesi* **inviluppo** *di* Φ, *una curva regolare* Γ *tale che per ogni suo punto* P, *passa una ed una sola curva* $\gamma_\lambda \in \Phi$ *che risulta ivi tangente a* Γ.

Osservazione 3 *La locuzione "γ_λ è tangente a Γ in P", equivale a quest'altra: "le tangenti in P rispettivamente a γ_λ e a Γ, sono coincidenti".*

Ciò posto, sia $\Phi : F(x, y, \lambda) = 0$ la famiglia per la quale ci proponiamo di determinare la curva inviluppo. Supponendo che tale curva Γ esista, immaginiamo di prendere ad arbitrio $P \in \Gamma$. Segue che per tale punto P passa una ed una sola curva $\gamma_\lambda \in \Phi$ tangente a Γ nel predetto punto. In simboli:

$$P \in \Gamma \Longrightarrow \exists! \lambda \in \Lambda \mid P \in \gamma_\lambda \cap \Gamma \text{ e } \gamma_\lambda \text{ tangente a } \Gamma \text{ in } P$$

Al variare di λ in Λ, otteniamo tutte le curve di Φ, anche tutti i punti di Γ. Ne segue che una rappresentazione parametrica di Γ è

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda \tag{7}$$

Per quanto precede, il parametro λ determina univocamente sia la curva γ_λ sia il punto $P \in \gamma_\lambda \cap \Gamma$. Inoltre

$$P[x(\lambda), y(\lambda)] \in \gamma_\lambda \Longleftrightarrow F[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0 \tag{8}$$

Dalla osservazione 3 si ha che Γ e γ_γ hanno la stessa tangente in $P[x(\lambda), y(\lambda)]$. L'equazione della tangente a γ_λ nel predetto punto è

$$[x - x(\lambda)] F_x[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] + [y - y(\lambda)] F_y[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0 \tag{9}$$

L'equazione della tangente a Γ nel medesimo punto è invece:

$$\frac{x - x(\lambda)}{x'(\lambda)} = \frac{y - y(\lambda)}{y'(\lambda)} \tag{10}$$

Dalle (9)-(10) segue

$$F_x[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] x'(\lambda) + F_y[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] y'(\lambda) = 0 \tag{11}$$

Derivando rispetto a λ primo e secondo membro della (8):

$$F_x[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] x'(\lambda) + F_y[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] y'(\lambda) + F_\lambda[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0 \tag{12}$$

Tenendo conto della (11):

$$F_\lambda[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0 \tag{13}$$

Ne segue che le funzioni $x(\lambda), y(\lambda)$ che compongono una rappresentazione parametrica di Γ, devono verificare il sistema

$$\begin{cases} F[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0 \\ F_\lambda[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Questa proprietà si traduce nel seguente algoritmo di ricerca di inviluppo: assegnata una famiglia di curve piane $\Phi : F(x, y, \lambda) = 0$, costruiamo il sistema

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

per poi studiarne la compatibilità rispetto alle incognite x, y, λ. Più precisamente, si tratta di stabilire innanzitutto l'esistenza di un *punto soluzione* $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right)$ tale che

$$\begin{cases} F\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) = 0 \\ F_\lambda\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

dopodiché trovare un intorno di tale punto in cui sia possibile esplicitare le variabili x e y in funzione di λ. Dobbiamo cioè applicare il Teorema del Dini per i sistemi di equazione. Nel caso in esame, il sistema è (15), dove F è ora considerata come funzione reale delle tre variabili reali (x, y, λ):

$$F : (x, y, \lambda) \in B \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow F(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}$$

L'enunciato del predetto teorema si particolarizza nel modo che segue

Teorema 4 *Assegnato il sistema (15) nelle incognite x, y, supponiamo che F sia continua in B assieme alle derivate parziali $F_x, F_y, F_{\lambda x}, F_{\lambda y}$. Assumiamo poi non nullo il determinante jacobiano delle funzioni F, F_λ rispetto a (x, y) in un punto soluzione $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right)$:*

$$J\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) = \begin{vmatrix} F_x\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) & F_y\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) \\ F_{\lambda x}\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) & F_{\lambda y}\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{17}$$

Allora il sistema (15) è univocamente risolubile in un intorno I di $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right)$ rispetto a (x, y), risultando

$$J(x, y, \lambda) \neq 0, \quad \forall (x, y, \lambda) \in I \tag{18}$$

Sono quindi univocamente definite le funzioni $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ nell'intorno I_λ (proiezione di I sull'asse λ), risultando ivi di classe C^1, per cui abbiamo il luogo geometrico di rappresentazione parametrica

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad \lambda \in I_\lambda \tag{19}$$

Evidentemente

$$x\left(\bar{\lambda}\right) = \bar{x}, \quad y\left(\bar{\lambda}\right) = \bar{y}$$

e

$$F_\lambda\left[x(\lambda), y(\lambda), \lambda\right] = 0,$$

per cui derivanado rispetto a λ

$$F_\lambda\left[x(\lambda), y(\lambda), \lambda\right] x'(\lambda) + F_{\lambda y}\left[x(\lambda), y(\lambda), \lambda\right] y'(\lambda) + F_{\lambda\lambda}\left[x(\lambda), y(\lambda), \lambda\right] = 0 \tag{20}$$

Affinché Γ sia regolare deve essere $(x'(\lambda), y'(\lambda)) \neq (0, 0)$, e dalla precedente segue che ciò è automaticamente verificato imponendo la continuità di $F_{\lambda\lambda}$ e

$$F_{\lambda\lambda}\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\lambda}\right) \neq 0 \tag{21}$$

Riassumendo, l'algoritmo è il seguente: assegnata la famiglia $\Phi : F(x, y, \lambda) = 0$, mettiamo a sistema

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

che risolto rispetto a (x, y) restituisce una rappresentazione parametrica dell'inviluppo.

Un metodo più pratico:

$$(x,y) \in \Gamma \Longrightarrow \exists \lambda \in \Lambda \mid (x,y) \in \gamma_\lambda$$

con λ tale che

$$F_\lambda (x,y,\lambda) = 0$$

Se riusciamo a ricavare $\lambda = \lambda(x,y)$, deve essere

$$F[x,y,\lambda(x,y)] = 0$$

che è l'equazione cartesiana di Γ. Brevemente, l'equazione cartesiana dell'inviluppo si ottiene eliminando λ dal sistema

$$\begin{cases} F(x,y,\lambda) = 0 \\ F_\lambda (x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Osserviamo che nella maggior parte dei casi non sono verificate le condizioni di regolarità richieste dal teorema del Dini. Ad esempio, rilassando tali condizioni richiedendo solo $F \in C^1$, consideriamo il sistema (23). In tal caso è frequente la comparsa dei cosiddetti *punti base*, ovvero soluzioni indipendenti da λ. Più precisamente, un punto $P_0(x_0,y_0)$ è un punto base di Φ se

$$F(x_0,y_0,\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Derivando rispetto a λ:

$$F_\lambda (x_0,y_0,\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Ne segue che un punto base risolve il sistema (23 per tutti i valori di λ. Geometricamente, le curve della famiglia si intersecano in P_0:

$$(x_0,y_0,\lambda) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \gamma_\lambda$$

Scartate queste soluzioni improprie, fissiamo la nostra soluzione su altre soluzioni $x(\lambda), y(\lambda)$ di classe C^1 e con derivate non simultaneamente nulle. Non è però detto che tali soluzioni siano rappresentazioni parametriche di curve regolari. Infatti

$$\begin{gathered} F[x(\lambda), y(\lambda), \lambda] = 0 \\ \Longrightarrow F_x[x(\lambda), y(\lambda), \lambda]\, x'(\lambda) + F_y[x(\lambda), y(\lambda), \lambda]\, y'(\lambda) + \underbrace{F_\lambda[x(\lambda), y(\lambda), \lambda]}_{=0} = 0 \\ \Longrightarrow F_x[x(\lambda), y(\lambda), \lambda]\, x'(\lambda) + F_y[x(\lambda), y(\lambda), \lambda]\, y'(\lambda) = 0 \end{gathered}$$

Tale condizione non esclude $(F_x, F_y) = (0,0)$. In altri termini, non tutte le famiglie di curve piane ammettono una curva inviluppo. Ciò si verifica quando il sistema

$$\begin{cases} F(x,y,\lambda) = 0 \\ F_\lambda (x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

non ammette soluzioni, oppure la soluzione è il luogo dei punti singolari di tutte le curve della famiglia assegnata. Più precisamente, per un assegnato valore del parametro λ, il punto $(x(\lambda), y(\lambda))$ è un punto singolare per la curva γ_λ. Tale luogo geometrico si dice **curva discriminante** della famiglia Φ.