Appunti di Geometria differenziale

Marcello Colozzo - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

0.1 Evoluta di una curva piana. Evolvente

Sia γ una curva piana regolare di classe $C^{p\geq 2}$ di rappresentazione naturale

$$\mathbf{x}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j}, \quad s \in [s_1, s_2] \tag{1}$$

per cui le formule di Frenet si scrivono, con ovvio significato dei simboli:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k(s)\,\mathbf{n}(s), \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k(s)\,\boldsymbol{\tau}(s) \tag{2}$$

In un numero precedente abbiamo dimostrato un teorema (v. teorema **??**) secondo cui la migliore approssimazione di γ in un intorno di un punto $P(s)$ è l'arco di circonferenza di raggio pari a $R(s) = k(s)^{-1}$ centrata nel sempiano contenente il versore normale principale $\mathbf{n}$. Abbiamo poi denominato tale luogo geometrico *cerchio osculatore* di γ nel punto $P(s)$.

Definizione 1 *Dicesi* **centro di curvatura** *di γ in $P(s)$, il centro del cerchio osculatore a γ in $P(s)$.*

Dalla fig. 1, vediamo che se (x_C, y_C) sono le coordinate cartesiane del centro di curvatura di γ nel generico punto P, le componenti cartesiane del versore normale principale sono:

$$n_x = \frac{x_C - x}{R}, \quad n_y = \frac{y_C - y}{R} \tag{3}$$

onde

$$x_C = x + Rn_x, \quad y_C = x + Rn_y \tag{4}$$

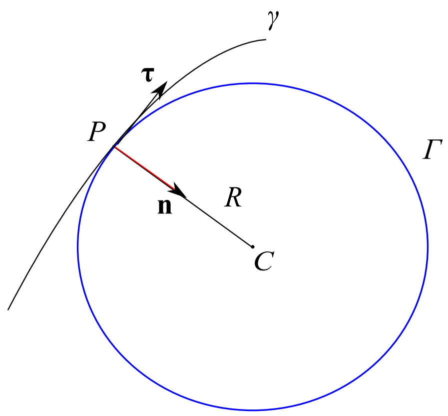

Figura 1: Cerchio osculatore e centro di curvatura.

Al variare di P su γ, otteniamo il luogo geometrico γ^* di cui una rappresentazione parametrica regolare è

$$x = \xi(s), \quad y = \eta(s), \quad s \in [s_1, s_2] \tag{5}$$

essendo

$$\xi(s) = x(s) + R(s)\,n_x(s), \qquad \eta(s) = y(s) + R(s)\,n_y(s) \tag{6}$$

Definizione 2 *Il luogo geometrico γ^* si dice* **evoluta** *della curva γ, e quest'ultima è l'***evolvente** *di γ^*.*

In altri termini, l'voluta di una curva piana γ è il luogo dei centri di curvatura di γ.

Osservazione 3 *Si badi che il parametro s nella rappresentazione parametrica dell'evoluta, non è il parametro naturale di γ^* (lo è solo per γ).*

Teorema 4 *Il versore tangente $\boldsymbol{\tau}^*$ a γ^* nel punto C è parallelo al versore normale $\mathbf{n}$ a γ in P tale che C è il lcentro di curvatura di γ nel predetto punto.*

Dimostrazione. Dall'osservazione 3 s non è il parametro naturale, per cui il versore tangente a γ^* in un generico punto C, è

$$\tau^* = vers\left(\frac{d\xi}{ds}\mathbf{i} + \frac{d\eta}{ds}\mathbf{j}\right)$$

Calcoliamo le singole componenti cartesiane di tale versore. Dalle (6)

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{dR}{ds}n_x(s) + R(s)\frac{dn_x}{ds}$$

Dalle formule di Frenet segue

$$\frac{dn_x}{ds} = -\frac{1}{R(s)}\frac{dx}{ds} \Longrightarrow \frac{d\xi}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{dR}{ds}n_x(s) - R(s)\frac{1}{R(s)}\frac{dx}{ds}$$

Cioè

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{dR}{ds}n_x(s) \tag{7}$$

In maniera analoga

$$\frac{d\eta}{ds} = \frac{dR}{ds}n_y(s) \tag{8}$$

Le (7)-(8) implicano che τ^* è parallelo a $\mathbf{n}$, cioè l'asserto. ■

Teorema 5 *La lunghezza di un arco di evoluta CC_1 è data dalla differenza tra i rispettivi raggi di curvatura.*

Dimostrazione. Abbiamo la disposizione di fig. 2, dove

$$\begin{aligned} &\gamma : x = x(s), \quad y = y(s), \quad s \in [s_1, s_2] \qquad \text{(curva regolare)} \\ &\gamma^* : x = \xi(s), \quad y = \eta(s), \quad s \in [s_1, s_2] \qquad \text{(evoluta di } \gamma^*\text{)} \end{aligned} \tag{9}$$

Sia s^* il parametro naturale su γ^*, onde

$$\frac{ds^*}{ds} = \pm\left|\frac{d\xi}{ds}\mathbf{i} + \frac{d\eta}{ds}\mathbf{j}\right|$$

Tenendo conto delle (7)-(8)

$$\frac{ds^*}{ds} = \pm\sqrt{\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 n_x(s)^2 + \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 n_y(s)^2} = \pm\frac{dR}{ds}$$

Integrando

$$s^*(s) = \pm R(s) + c,$$

dove c è una costante di integrazione. La misura assoluta dell'arco CC_1 è

$$|s^*(s_1) - s^*(s)| = |\pm R(s_1) \mp R(s)| = |R_1 - R|,$$

onde l'asserto. ■

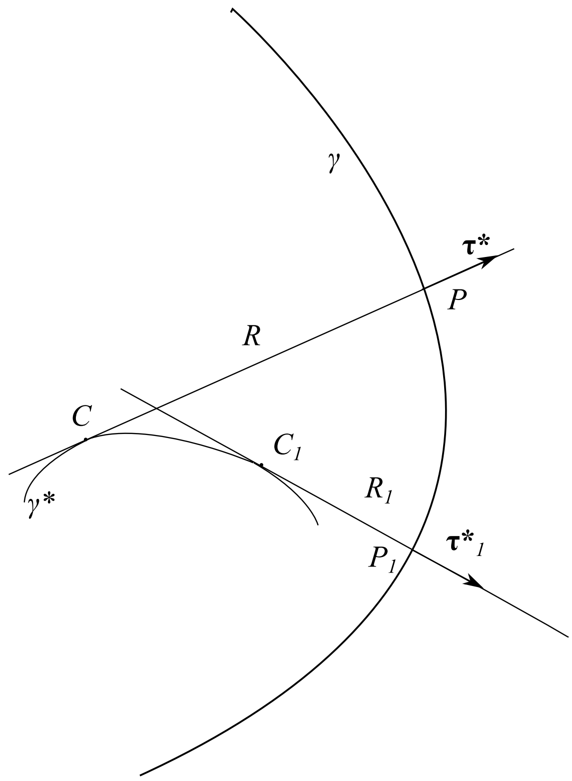

Figura 2: Teorema 5.