# Appunti di Geometria differenziale

**Marcello Colozzo** - (file scaricato da http://www.extrabyte.info)

## 1 Complementi. Curva regolare quale classe di equivalenza

Approfondiamo le argomentazioni di una precedente lezione . Sia data la seguente funzione vettoriale della variabile reale $t$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad t \in [t_1, t_2] \tag{1}$$

Tale funzione è una *rappresentazione parametrica regolare* di un luogo geometrico $\gamma$ se:

1. $\mathbf{x}(t)$ è di classe $C^{p\geq 1}$ su $[t_1, t_2]$.
2. $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.

In tal modo $\gamma$ è l'immagine dell'intervallo $[t_1, t_2]$ attraverso l'applicazione $\mathbf{x}(t)$:

$$\gamma = \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_1, t_2]\} \tag{2}$$

D'altra parte, la (1) è definita a meno di una sostituzione di parametro. Tuttavia, non è possibile eseguire una sostituzione arbitraria. Dobbiamo riferirci a una particolare classe di sostituzioni. Invero, sussiste la seguente definizione:

**Definizione 1** *Dicesi* **sostituzione di parametro ammissibile** *relativa alla rappresentazione parametrica (1), una funzione reale*

$$t = t(\theta), \quad \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

*tale che*

1. $t(\theta)$ *è di classe* $C^{p\geq 1}$ *su* $[\theta_1, \theta_2]$.
2. $\frac{dt}{d\theta} \neq 0, \quad \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

Ne segue l'invertibilità della funzione $t(\theta)$, ed è facile convincersi che la funzione inversa $\theta(t)$ è a sua volta una sostituzione di parametro ammissibile.

La sostituzione $t(\theta)$ determina la funzione vettoriale composta:

$$\mathbf{x}(t(\theta)) = \boldsymbol{\xi}(\theta), \quad \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2] \tag{3}$$

ed è una nuova rappresentazione parametrica del medesimo luogo geometrico:

$$\gamma = \{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_1, t_2]\} = \{\boldsymbol{\xi}(\theta) \mid \theta \in [\theta_1, \theta_2]\} \tag{4}$$

Abbiamo, dunque, la seguente definizione:

**Definizione 2** *Due rappresentazioni regolari distinte*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(t), \quad t \in [t_1, t_2] \\ \mathbf{x} &= \boldsymbol{\xi}(\theta), \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2] \end{aligned} \tag{5}$$

*si dicono* **equivalenti** *se esiste una sostituzione di parametro ammissibile* $t = t(\theta)$ *tale che*

1. $t\left([\theta_1,\theta_2]\right)=[t_1,t_2]$
2. $\mathbf{x}\left(t\left(\theta\right)\right)=\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right), \quad \forall\theta\in[\theta_1,\theta_2]$

Sia $\Xi$ l'insieme delle rappresentazioni parametriche regolari di $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$. La predetta definizione introduce una relazione di equivalenza in $\Xi$. Infatti, se $\mathcal{R}$ è la predetta relazione si ha:

$$\mathbf{x}\left(t\right)\mathcal{R}\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\exists t\left(\theta\right)\mid\begin{cases} t\left([\theta_1,\theta_2]\right)=[t_1,t_2] \\ \mathbf{x}\left(t\left(\theta\right)\right)=\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right), \quad \forall\theta\in[\theta_1,\theta_2]\end{cases}$$

**Teorema 3** *e verifica le seguenti proprietà*

1. **Proprietà riflessiva**
$$\mathbf{x}\left(t\right)\mathcal{R}\mathbf{x}\left(t\right), \quad \forall\mathbf{x}\left(t\right)\in\Xi \tag{6}$$
2. **Proprietà simmetrica**
$$\mathbf{x}\left(t\right)\mathcal{R}\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right)\Longrightarrow\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right)\mathcal{R}\mathbf{x}\left(t\right), \quad \forall\mathbf{x}\left(t\right),\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right)\in\Xi \tag{7}$$
3. **Proprietà transitiva**
$$\mathbf{x}\left(t\right)\mathcal{R}\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right), \ \boldsymbol{\xi}\left(\theta\right)\mathcal{R}\boldsymbol{\eta}\left(\phi\right)\Longrightarrow\mathbf{x}\left(t\right)\mathcal{R}\boldsymbol{\eta}\left(\phi\right), \quad \forall\mathbf{x}\left(t\right),\boldsymbol{\xi}\left(\theta\right),\boldsymbol{\eta}\left(\phi\right)\in\Xi \tag{8}$$

**Dimostrazione.** La (6) è univocamente determinata dalla sostituzione identica $t=t$ che è manifestamente una sostituzione di parametro ammissibile. La (7) è una conseguenza dell'esistenza dell'inversa $t\left(\theta\right)$ quale sostituzione di parametro ammissibile. La terza si dimostra osservando che assegnando le sostituzioni di parametro ammissibile $t\left(\theta\right)$ e $\theta\left(\varphi\right)$ si ha una nuova sostituzione $t\left(\theta\left(\phi\right)\right)$ data dalla composizione delle precedenti e tale che

$$\frac{dt}{d\phi}=\frac{dt}{d\theta}\frac{d\theta}{d\phi}\neq 0$$

onde l'asserto. ■

Dal teorema appena dimostrato segue che $R$ è una relazione di equivalenza in $\Theta$, e tale insieme risulta così partizionato in relazione di equivalenza, ciascuna delle quali è una *curva regolare*. Quindi

**Definizione 4** *Dicesi* **curva regolare** *una classe di equivalenza dell'insieme delle rappresentazioni regolari.*