Esercizio 39 (Mandò)

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *(Nel testo è il n. 39, pag. 71. Abbiamo modificato leggermente il testo)*

Definizione: *dicesi* **angolo di sito** *di un bersaglio* $P_0(x_0, y_0)$, *l'angolo*

$$\varepsilon_0 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \tag{1}$$

Proposizione: *Gli angoli di lancio con i quali è possibile colpire il bersaglio, sono l'uno il complementare dell'altro se e solo se l'angolo di sito del bersaglio è nullo.*

Soluzione

Innanzitutto bisogna introdurre il concetto di *parabola di sicurezza*. Abbiamo già trattato questo problema, in senso alla dinamica del punto materiale. L'elaborato è disponibile in questa risorsa, dove abbiamo applicato il procedimento standard di ricerca dell'inviluppo di una famiglia di curve piane. Approfittiamo, dunque, per applicare un procedimento alternativo. Ricordiamo che la rappresentazione cartesiana della traiettoria γ di un proiettile che viene sparato con velocità iniziale v_0 e angolo di lancio θ, si scrive:

$$y = x\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\theta\right)x^2$$

Dobbiamo imporre il passaggio di γ per $P_0(x_0, y_0)$:

$$y_0 = x_0\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\theta\right)x_0^2$$

Tale equazione va risolta rispetto a $\tan\theta$. Dopo alcuni passaggi:

$$gx_0^2\tan^2\theta - 2v_0^2x_0\tan\theta + 2v_0^2y_0 + gx_0^2 = 0, \tag{2}$$

da cui

$$\tan\theta = \frac{x_0 \pm \sqrt{\Delta(x_0, y_0)}}{\frac{gx_0^2}{v_0^2}},$$

dove

$$\Delta(x_0, y_0) = x_0^2 - \frac{2gx_0^2}{v_0^2}\left(\frac{g}{2v_0^2}x_0^2 + y_0\right),$$

è il discriminante dell'equazione (2). Con ovvio significato dei simboli:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_0, y_0) > 0 &\Longrightarrow \exists\theta_1, \theta_2 \\
\Delta(x_0, y_0) = 0 &\Longrightarrow \exists!\theta \\
\Delta(x_0, y_0) < 0 &\Longrightarrow \nexists\theta
\end{aligned}$$

La **parabola di sicurezza** corrisponde alla condizione $\Delta(x_0, y_0) = 0$. Infatti, in questo caso il bersaglio è raggiungibile da un'unica traiettoria, mentre bersagli interni alla parabola sono raggiungibili da due traiettorie distinte (fig.). Esplicitando la predetta condizione, e facendo riferimento alle coordinate correnti x, y, otteniamo l'equazione della parabola di sicurezza:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

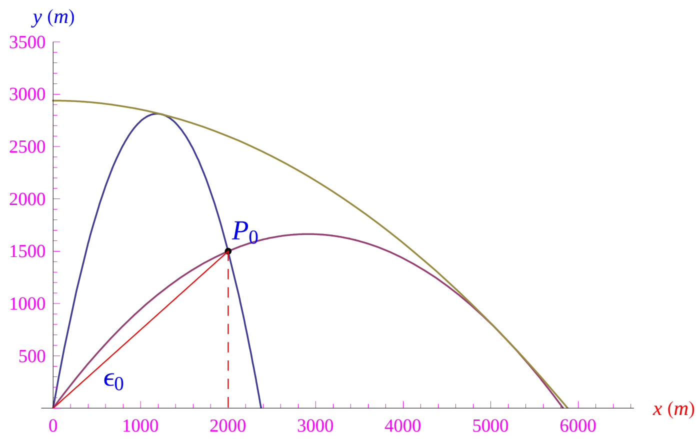

Figura 1: Esercizio **??**. Il punto P_0 è interno alla parabola di sicurezza, per cui è raggiungibile da due traiettorie distinte.

Dopo questa lunga premessa, per dimostrare l'asserto tentiamo l'utilizzo della nota formula di addizione degli archi:

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2} \tag{3}$$

Dobbiamo determinare il numeratore e il denominatore. A tale scopo scriviamo le soluzioni

$$\tan\theta_1=\frac{x_0-\sqrt{\Delta(x_0,y_0)}}{\frac{gx_0^2}{v_0^2}},\quad \tan\theta_1=\frac{x_0+\sqrt{\Delta(x_0,y_0)}}{\frac{gx_0^2}{v_0^2}},$$

onde

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{2v_0}{gx_0},\quad \tan\theta_1\tan\theta_2=1+\frac{2y_0v_0^2}{gx_0^2}$$

che sostituite nella (3):

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=-\frac{x_0}{y_0}$$

Quindi definiamo

$$\varepsilon_0=\arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right),$$

cosicché

$$\tan(\theta_1+\theta_2)\tan\varepsilon_0=-1,$$

da cui

$$\theta_1+\theta_2-\varepsilon_0=\frac{\pi}{2},$$

cioè l'asserto. Ne consegue che se l'angolo di sito è non nullo, si ha

$$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_0 \tag{4}$$