Schema di calcolo per problemi tipici in un moto piano

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Problema 3

Determinare l'accelerazione di un punto materiale vincolato a muoversi lungo una curva $y = f(x)$, con equazione oraria $s = s(t)$, dove s denota l'ascissa curvilinea sulla predetta curva.

Soluzione

Per risolvere questo problema è necessaria una premessa. Nei problemi precedenti viene assegnata una rappresentazione parametrica della traiettoria γ data da $x = x(t)\,,\ y = y(t)$ il cui parametro è il tempo t. Tale rappresentazione contiene "informazioni" sull'equazione oraria $s = s(t)$ giacché

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Longrightarrow s(t) = \pm \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2}dt'$$

Nel caso in esame, invece, la traiettoria è data in forma cartesiana: nello specifico, è il grafico di una funzione $f(x)$. Per inciso, tale funzione ha sempre la "giusta regolarità" in modo che il suo grafico sia una **curva regolare** nel senso della geometria differenziale. Un errore comune consiste nel porre $x = t$ (stiamo argomentando in unità adimensionali) in modo da ottenere una rappresentazione parametrica della traiettoria. Ma questa è solo una delle infinite rappresentazioni parametriche regolari della traiettoria medesima. Infatti, dalla geometria differenziale sappiamo che una curva regolare è una classe di equivalenza nell'insieme i cui elementi sono le rappresentazioni parametriche regolari di una curva assegnata (si passa da una rappresentazione all'altra, per sostituzione di parametro). Da un punto di vista fisico, significa che un'assegnata traiettoria γ può essere percorsa in infinite modalità distinte. Viceversa, se viene assegnata la legge oraria $s = s(t)$, esiste ed unico il moto su γ. In simboli

$$s = s(t) \not\Longrightarrow x = t,\ y = y(t)$$

mentre

$$s = s(t) \Longrightarrow x = x(t)\,,\ y = y(t)$$

con $x(t)$ e $y(t)$ funzioni ignote. Nota la funzione $s(t)$, possiamo calcolare la derivata prima $\dot{s}$ e la derivata seconda $\ddot{s}$, e quindi i modulo delle accelerazioni tangenziale e normale:

$$a_t = |\ddot{s}|\,,\ \ a_n = \frac{\dot{s}}{R},$$

ove – ricordiamolo – R è il raggio di curvatura di γ. Dalla geometria differenziale, sappiamo che quando la curva è data in forma cartesiana $y = f(x)$, tale grandezza si calcola attraverso

$$\frac{1}{R} = \frac{|f''(x)|}{\sqrt{\left[1 + f'(x)^2\right]^3}} \tag{1}$$

Possiamo così calcolare solo il modulo delle predette accelerazioni, e quindi il modulo dell'accelerazione vettoriale

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{2}$$

Per determinare le corrispondenti grandezze vettoriali, è necessario conoscere i versori $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{n}$ ossia i versori della tangente (orientata nel verso delle s crescenti) e della normale (orientata verso il centro di curvatura di γ). Vediamo come calcolare il versore tangente. Se $(x_0, y_0) \in \gamma$, l'equazione della retta tangente a γ in tale punto, è:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

D'altra parte dalla geometria analitica sappiamo che una coppia di numeri direttori di tale retta è:

$$\lambda = 1, \ \ \mu = f'(x_0)$$

Si ricordi che i numeri direttori sono le componenti cartesiane di un vettore parallelo alla retta. Ne consegue

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{i} + f'(x_0)\,\mathbf{j}$$

per cui il versore della tangente è

$$\tau_0 = \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|} = \frac{\mathbf{i} + f'(x_0)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} \tag{3}$$

Per un punto qualunque $(x, y) \in \gamma$

$$\tau = \frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{4}$$

Si noti che non possiamo determinare la funzione vettoriale $\boldsymbol{\tau}(t)$ che ci permetterebbe il calcolo della velocità vettoriale, giacché non conosciamo $x(t)$. L'unica cosa che possiamo fare è calcolare la predetta velocità in funzione dell'ascissa x

$$\mathbf{v} = \dot{s}\tau = \dot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}} \tag{5}$$

E quindi l'accelerazione

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\right] \tag{6}$$

Segue (sempre in funzione di x)

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\tau = \ddot{s}\frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}$$

Qui si apre il problema della determinazione del versore normale. Scriviamo

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j}$$

Deve essere

$$\mathbf{n} \cdot \tau = 0, \ \ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$$

Cioè

$$\begin{cases} n_x + n_y f'(x) = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Tale sistema nelle incognite n_x,n_y ammette due soluzioni. Quella giusta è tale che n è orientato verso il centro di curvatura i.e. nel verso in cui γ volge la concavità. A titolo di esempio, risolviamo un esercizio di [3], in cui un punto materiale percorre la curva $y = 4x^2$ con velocità scalare costante. Quindi

$$\dot{s} = \dot{s}_0 > 0 \text{ (costante)},$$

supponendo (senza perdita di generalità) che il moto sia progressivo sulla parabola assegnata. È chiaro che l'accelerazione tangenziale è nulla, per cui l'accelerazione è puramente normale. Un rapido calcolo porge

$$\frac{1}{R} = \frac{8}{\sqrt{(1+64x^2)^3}} \tag{8}$$

onde

$$a_n = \frac{8\dot{s}_0^2}{\sqrt{(1+64x^2)^3}} \tag{9}$$

Il versore tangente è

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \frac{\mathbf{i}+8x\mathbf{j}}{\sqrt{1+64x^2}} \tag{10}$$

Il sistema (7) è

$$\begin{cases} n_x + 8xn_y = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 = 1 \end{cases}, \tag{11}$$

che ammette le soluzioni

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{\sqrt{1+64x^2}}\left(-8x\mathbf{i}+\mathbf{j}\right), \quad \mathbf{n}'' = \frac{1}{\sqrt{1+64x^2}}\left(8x\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

La soluzione accettabile è

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+64x^2}}\left(-8x\mathbf{i}+\mathbf{j}\right)$$

Ne concludiamo

$$\mathbf{a}_n = \frac{8\dot{s}_0^2}{\sqrt{1+64x^2}}\left(-8x\mathbf{i}+\mathbf{j}\right) \tag{12}$$

La traiettoria è riportata in fig. 1.

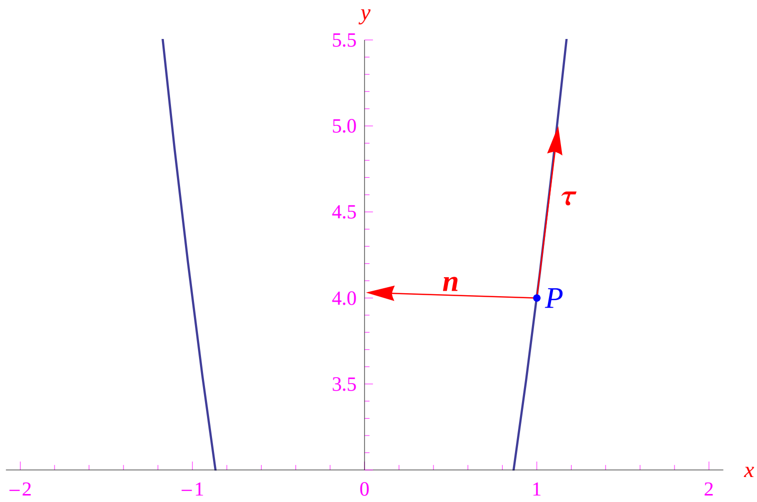

Figura 1: Esercizio sull'accelerazione di un punto materiale che si muove su $y = 4x^2$.

Riferimenti bibliografici

[1] Halliday D. Resnick R., Krane K.S. *Fisica 1.* Ambrosiana, 2011.

[2] Demidovic B.P., *Esercizi e problemi di analisi matematica*, 2010.

[3] Sette D. Wanderlingh F. *Guida alla soluzione di problemi di fisica : meccanica, onde, termodinamica*, 1967