Schema di calcolo per problemi tipici in un moto piano

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Problema 2

Assegnate le equazioni orarie dei moti componenti (secondo gli assi coordinati):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \geq t_0 \tag{1}$$

scrivere la rappresentazione cartesiana dell'accelerazione tangenziale e dell'accelerazione normale.

Soluzione

Anche qui dobbiamo cercare di ottenere qualche informazione sull'ascissa curvilinea a partire dal vettore posizione

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

Precisamente sulla derivata prima e seconda $\dot{s}, \ddot{s}$, giacché

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau}, \ \ \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}$$

rammentando che $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{n}$ sono rispettivamente i versori della retta tangente e della retta normale alla traiettoria γ. In particolare, la normale è orientata verso il centro di curvatura di γ. Il calcolo di $\dot{s}$ è immediato:

$$\dot{s} = \begin{cases} +\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, & \text{moto progressivo} \\ -\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, & \text{moto regressivo} \end{cases},$$

da cui derivando otteniamo $\ddot{s}$. Anche il calcolo di τ è immediato:

$$\tau = \frac{\mathbf{v}}{\dot{s}} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{s}}$$

Ne consegue che l'accelerazione tangenziale si calcola facilmente. Diverso è il caso dell'accelerazione normale. Ricordiamo innanzitutto che R è il raggio di curvatura della traiettoria:

$$\frac{1}{R} = \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3},$$

il cui calcolo è più o meno immediato. Il problema consiste nel determinare $\mathbf{n}$. Ovviamente

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$$

Ma ciò non basta perché in tal modo abbiamo un'indeterminazione sul verso nel senso che risultano due orientazioni possibili (opposte). Il versore $\mathbf{n}$ è orientato, per quanto detto prima, verso il centro di curvatura ossia nel verso in cui la curva volge la concavità. Ed è chiaro che ciò va stabilito caso per caso. In realtà, possiamo determinare la componente normale dell'accelerazione a partire dalla rappresentazione cartesiana del vettore accelerazione $\mathbf{a}$ e di $\mathbf{a}_t$. A tale scopo, riprendiamo l'esempio precedente. Qui era

$$\mathbf{r} = bt\mathbf{i} + ct^2\mathbf{j}$$

per cui velocità e accelerazione sono

$$\mathbf{v} = b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j}, \ \ \mathbf{a} = 2c\mathbf{j} \tag{2}$$

Segue

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & 2ct & 0 \\ 0 & 2c & 0 \end{vmatrix} = 2bc\mathbf{k}$$

ovvero

$$|v| = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{2bc}{\sqrt{(b^2 + 4c^2t^2)^3}}$$

La velocità scalare

$$\dot{s} = +|v| = \sqrt{b^2 + 4c^2t^2} \tag{3}$$

Derivando

$$\ddot{s} = \frac{4c^2t}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}} \tag{4}$$

Il versore tangente

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\dot{s}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}} (b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j})$$

Quindi l'accelerazione tangenziale

$$\mathbf{a}_t = \frac{4c^2t}{b^2 + 4c^2t^2} (b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j}) \tag{5}$$

Per determinare $\mathbf{a}_n$ anziché trovare la rappresentazione cartesiana scriviamo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \Longrightarrow \mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t$$

Dove l'accelerazione $\mathbf{a}$ è data dalla seconda delle (2). Dopo qualche calcolo di algebra vettoriale, si ha

$$\mathbf{a}_n = \frac{2bc}{b^2 + 4c^2t^2} (-2ct\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \tag{6}$$

Per curiosità, calcoliamo i moduli

$$a_t = \frac{4c^2t}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}, \quad a_n = \frac{2bc}{\sqrt{b^2 + 4c^2t^2}}, \quad a = 2c$$

notando che a $t = 0$ l'accelerazione è puramente normale, mentre a $t > 0$ si dispone come in fig. 1.

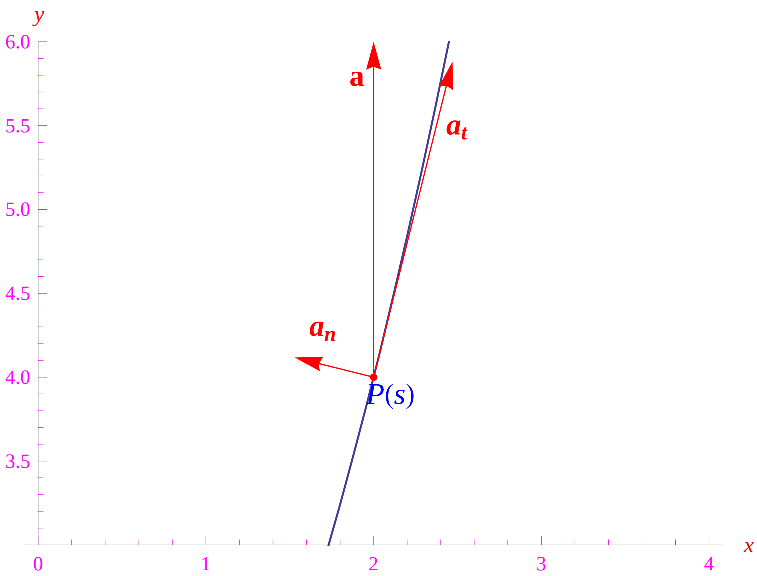

Figura 1: Accelerazione del moto su traiettoria di rappresentazione parametrica $\mathbf{r}\left(t\right)=bt\mathbf{i}+ct^{2}\mathbf{j}$.