Schema di calcolo per problemi tipici in un moto piano

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Problema 1

Assegnato un moto piano attraverso i moti componenti lungo gli assi coordinati:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \qquad t \geq t_0,$$

determinare l'equazione oraria $s = s(t)$, avendo istituito un sistema di ascisse curvilinee sulla traiettoria γ, con $s(t_0) = 0$ (cioè con origine nel punto iniziale del moto).

Soluzione

Per quanto precede, la velocità vettoriale è

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau},$$

essendo τ il versore tangente alla traiettoria. Il modulo della velocità è

$$|\mathbf{v}| = |\dot{s}|$$

Cioè

$$\dot{s} = \pm|\mathbf{v}| = \begin{cases} +|\mathbf{v}|, & \text{se il moto è progressivo} \\ -|\mathbf{v}|, & \text{se il moto è regressivo} \end{cases}$$

Ma

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \Longrightarrow |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}}$$

essendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Perciò

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{1}$$

Integrando:

$$s(t) = \pm\int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(t')^2 + \dot{y}(t')^2}\,dt', \tag{2}$$

che risolve il problema posto. Vediamo subito che la difficoltà risiede nel calcolo dell'integrale a secondo membro dell'equazione appena scritta, come possiamo appurare dall'esempio seguente:

$$x = bt, \quad y = ct^2, \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

Qui è $b, c > 0$ con le giuste dimensioni. Il vettore posizione è

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}bt + \mathbf{j}ct^2$$

Quindi la velocità vettoriale

$$\mathbf{v}(t) = b\mathbf{i} + 2ct\mathbf{j} \tag{4}$$

Eliminando il parametro t tra le (3), si perviene all'equazione cartesiana della traiettoria:

$$y = \frac{c}{b^2}x^2$$

Osservando che deve essere $t \geq 0$, si ha $x \geq 0$. Ne consegue che la traiettoria del punto materiale è l'arco di parabola $y = \frac{c}{b^2}x^2$ contenuto nel sempiano $x \geq 0$, come illustrato in fig. 1.

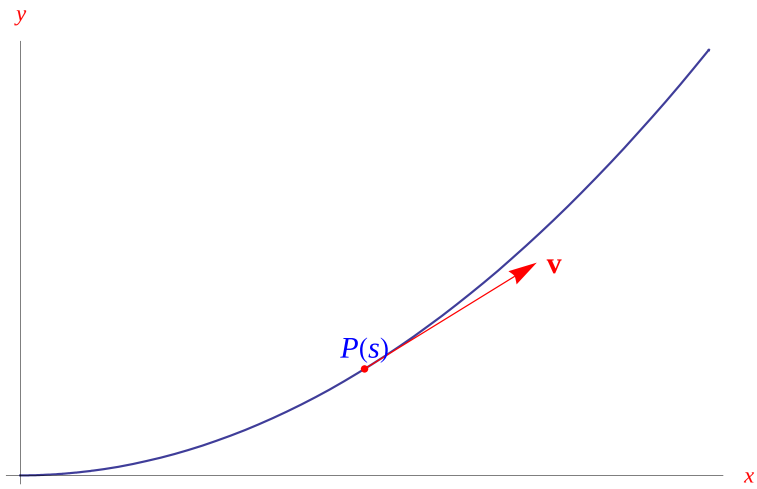

Figura 1: Moto di un punto sulla traiettoria di rappresentazione parametrica (3).

Nell'istante $t = 0$ il punto materiale occupa l'origine del riferimento cartesiano (fig. 1). Dalla (4)

$$\mathbf{v}\left(0\right) = b\mathbf{i}$$

Cioè il punto parte con velocità orientata lungo l'asse x, osservando poi che conserva tale valore (pertanto il moto componente nella direzione dell'asse x è uniforme). A questo punto fissiamo sulla traiettoria γ un sistema di ascisse curvilinee con verso positiva di γ coincidente con il verso delle t crescenti (quindi delle x crescenti), e con origine in $(0,0)$. Ciò implica che il moto è progressivo, ovvero $s\left(t\right)$ è monotonamente crescente. Abbiamo dunque

$$s\left(t\right) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}\left(t'\right)^2 + \dot{y}\left(t'\right)^2} dt' = \int_0^t \sqrt{b^2 + 4c^2 t'^2} dt'$$

Calcoliamo a parte l'integrale indefinito

$$I\left(t\right) = \int \sqrt{b^2 + 4c^2 t^2} dt,$$

eseguendo la sostituzione $2ct = b \sinh \xi$, per cui

$$I\left(\xi\right) = \frac{b^2}{2c} \int \sqrt{1 + \sinh^2 \xi} d\xi \underset{\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1}{=} \frac{b^2}{2c} \int \cosh^2 \xi d\xi$$

Da una integrazione per parti

$$I\left(\xi\right) = \frac{b^2}{4c}\left(\sinh \xi \cosh \xi + \xi\right) + C,$$

essendo C una costante di integrazione. Ripristinando la variabile t e calcolando l'integrale definito, si perviene

$$s\left(t\right) = \frac{t}{2}\sqrt{b^2 + 4c^2 t^2} + \frac{b^2}{4c} \operatorname{arcsin h}\left(\frac{2c}{b} t\right) \tag{5}$$