Schema di calcolo per gli integrali curvilinei di funzione

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Se dobbiamo integrare una data funzione $f(x,y,z)$ da $(x(a), y(a), z(a))$ a $(x(b), y(b), z(b))$ con $b > a$, lungo un assegnato arco regolare (cfr. fig. 1)

$$\gamma : x = x(t), \ y = y(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

significa che γ è orientato nel verso delle t crescenti, i.e. l'ascissa curvilinea $s(t)$ è strettamente crescente, per cui

$$ds = +H(t)\,dt, \tag{2}$$

dove al solito, $H(t)$ è la funzione:

$$H(t) = +\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \tag{3}$$

e

$$s \in [\alpha, \beta] \text{ con } \alpha = s(a), \ \beta = s(b) \tag{4}$$

Ciò implica

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z)\,ds &= \int_\alpha^\beta f[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)]\,ds \\ &= \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\,H(t)\,dt, \end{aligned} \tag{5}$$

avendo posto

$$P(x(a), y(a), z(a)), \ Q(x(b), y(b), z(b)) \tag{6}$$

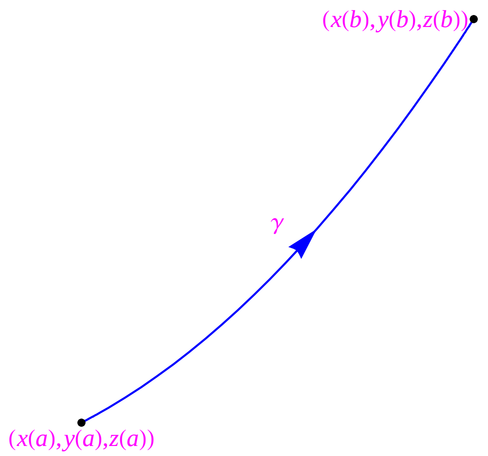

Figura 1: Il cammino di integrazione γ è orientato nel verso delle t crescenti.

Se invece dobbiamo integrare da $(x(b), y(b), z(b))$ a $(x(a), y(a), z(a))$ (cfr. fig. 2), il cammino γ risulta orientato nel verso delle t decrescenti, onde la funzione $s(t)$ è strettamente decrescente:

$$ds = -H(t)\,dt, \tag{7}$$

onde

$$s \in [\alpha, \beta] \text{ con } \alpha = s(b), \quad \beta = s(a) \tag{8}$$

Ciò implica

$$\begin{aligned}\int_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z)\, ds &= \int_\alpha^\beta f[\varphi(s), \psi(s), \chi(s)]\, ds \\ &= -\int_b^a f[x(t), y(t), z(t)]\, H(t)\, dt \\ &= \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\, H(t)\, dt,\end{aligned}$$

avendo posto

$$P(x(b), y(b), z(b)), \quad Q(x(a), y(a), z(a)) \tag{9}$$

All'atto pratico, si utilizza sempre la formula:

$$\int_{\gamma(P,Q)} f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\, H(t)\, dt,$$

con $a < b$, mentre il punto iniziale P corrisponde a $t = a$ se il verso $P \to Q$ è quello delle t crescenti. Viceversa, il punto iniziale P corrisponde a $t = b$ se il verso $P \to Q$ è quello delle t crescenti.

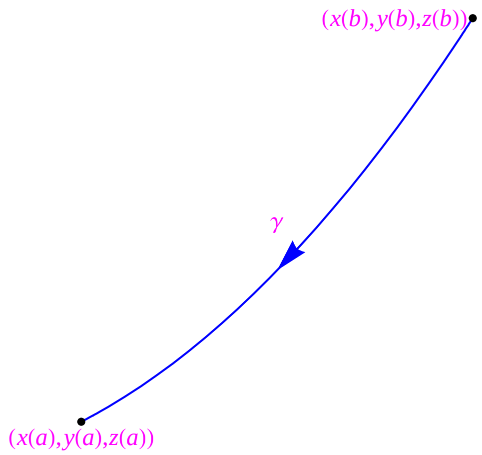

Figura 2: Il cammino di integrazione γ è orientato nel verso delle t decrescenti.