Accelerazione vettoriale in un moto piano

Marcello Colozzo http://www.extrabyte.info

Passiamo ora all'accelerazione (vettoriale). Evidentemente

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{1}$$

per cui abbiamo la seguente rappresentazione cartesiana dell'accelerazione in un moto piano:

$$\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \tag{2}$$

Il vettore accelerazione esibisce comunque, un'altra decomposizione notevole. Deriviamo

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\tau}) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$$

Il primo termine a secondo membro è un vettore tangente alla traiettoria e di modulo $|\ddot{s}|$, per cui poniamo

$$\mathbf{a}_t = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} \tag{3}$$

Definizione 1 *La grandezza (3) è l'***accelerazione tangenziale***.*

Per esplicitare il secondo termine, scriviamo

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$$

Rammentiamoc he $\boldsymbol{\tau}(s)$ è il versore tangente alla traeittoria γ nel punto $P(s)$. Perciò la derivata di tale funzione vettoriale ci dà un'informazione sulla *curvatura* di γ. Infatti, se γ è un segmento di retta si ha manifestamente

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Inoltre, dobbiamo tener presente la proprietà secondo cui il derivato di un vettore di modulo costante è perpendicolare al vettore medesimo. Quindi $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \perp \boldsymbol{\tau} \Longrightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ è orientato lungo la normale a γ. Attraverso argomentazioni di geometria differenziale, si dimostra che tale vettore è orientato verso il centro di curvatura di γ, mentre il suo modulo fornisce la *curvatura* di γ ovvero il reciproco del raggio di curvatura R:

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| \underset{\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}}{=} \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| \tag{5}$$

Si noti che se è verificata la (4), si ha $R \to +\infty$, giacché tale è il raggio di curvatura di un segmento di retta. Si dimostra ([2])

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3} = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}}{v^3}$$

per cui

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt} \wedge \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3} \tag{6}$$

Esplicitando il prodotto vettoriale

$$\frac{1}{R} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \tag{7}$$

Ora siamo in grado di esplicitare il termine $\dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$. Denotando con $\mathbf{n}$ il versore della normale a γ orientata verso il centro di curvatura, si ha:

$$\dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{s}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dot{s}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dot{s}^2\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|\mathbf{n}$$

Cioè

$$\mathbf{a}_n \stackrel{def}{=} \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n} \tag{8}$$

Definizione 2 *La grandezza (8) è l'***accelerazione normale***.*

Conclusione: in un qualunque moto piano, l'accelerazione vettoriale ammette la seguente decomposizione

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad \left(\mathbf{a}_t = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\mathbf{n}\right) \tag{9}$$

graficata in fig. 1.

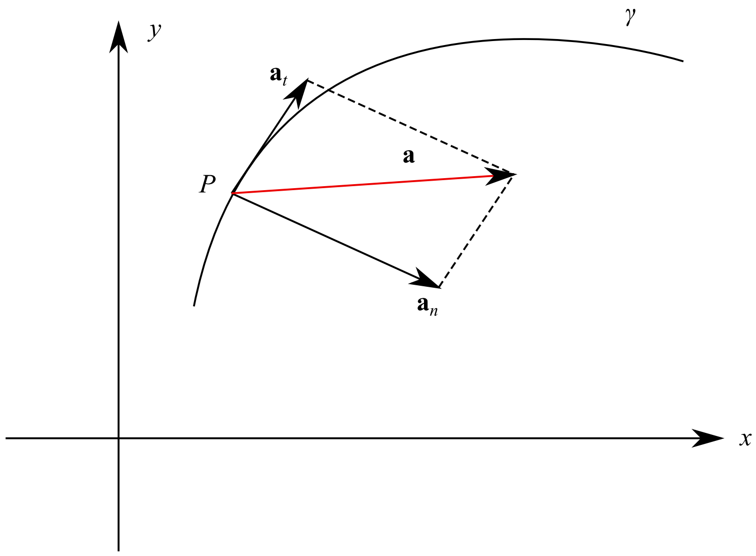

Figura 1: Decomposizione del vettore accelerazione nelle componenti tangenziale e normale rispettivamente.

Riferimenti bibliografici

[1] Halliday D. Resnick R., Krane K.S. *Fisica 1.* Ambrosiana, 2011.

[2] Demidovic B.P., *Esercizi e problemi di analisi matematica*, 2010.