

Esercizio di Analisi 1

Marcello Colozzo - (file scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Esercizio 1 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} \quad (1)$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Eseguendo il cambio di variabile $t = \pi - x$:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \frac{t}{2}}{t} \quad (2)$$

Eseguendo un secondo cambio di variabile $\tau = \frac{t}{2}$:

$$\lambda = \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \tau}{\tau} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \quad (3)$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x} \cdot \frac{1 + \sin \frac{x}{2}}{1 + \sin \frac{x}{2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin^2 \frac{x}{2}}{(\pi - x) (1 + \sin \frac{x}{2})} \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\pi - x}}_{=\lambda_1} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{1 + \sin \frac{x}{2}}}_{=\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \lim_{t=\pi-x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t} = 0 \implies \lambda = 0$$