

Densità spettrale e spettro di potenza di un'oscillazione sinusoidale limitata nel tempo

Marcello Colozzo

Sia dato il segnale $V(t)$ di durata τ :

$$V(t) = \begin{cases} V_M \cos \omega_0 t, & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1)$$

Osserviamo banalmente che tale segnale non è periodico in quanto non si ripete all'infinito. Richiedendo la continuità di $V(t)$ segue che ω_0 e τ non sono indipendenti. Infatti, dobbiamo imporre le condizioni di raccordo:

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\tau}{2}^-} V(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\frac{\tau}{2}^+} V(t) = 0 \quad (2)$$

Sfruttando la parità (+1) del coseno, lavoriamo solo sulla prima delle (2):

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\tau}{2}^-} V(t) = 0 \iff \cos\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) = 0 \iff \omega_0 \tau = \pi(2n + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Ne consegue che le condizioni di raccordo (2) sono verificate a meno di un intero naturale n . Ad esempio, possiamo porre $n = 5$:

$$\omega_0 = \frac{11\pi}{\tau}, \quad (4)$$

cosicchè la (1) si scrive:

$$V(t) = \begin{cases} V_M \cos\left(\frac{11\pi t}{\tau}\right), & \text{se } t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5)$$

Avremmo potuto esprimere τ in funzione di ω_0 , ma la (5) ci consente di utilizzare τ come parametro libero, modulando la durata dell'oscillazione. Ad esempio, l'operazione di passaggio al limite per $\tau \rightarrow +\infty$ riproduce il caso periodico, giacchè $V(t)$ diviene un'oscillazione cosinusoidale che si estende da $-\infty$ a $+\infty$. Un tipico andamento per $\tau < +\infty$ è riportato in fig.1.

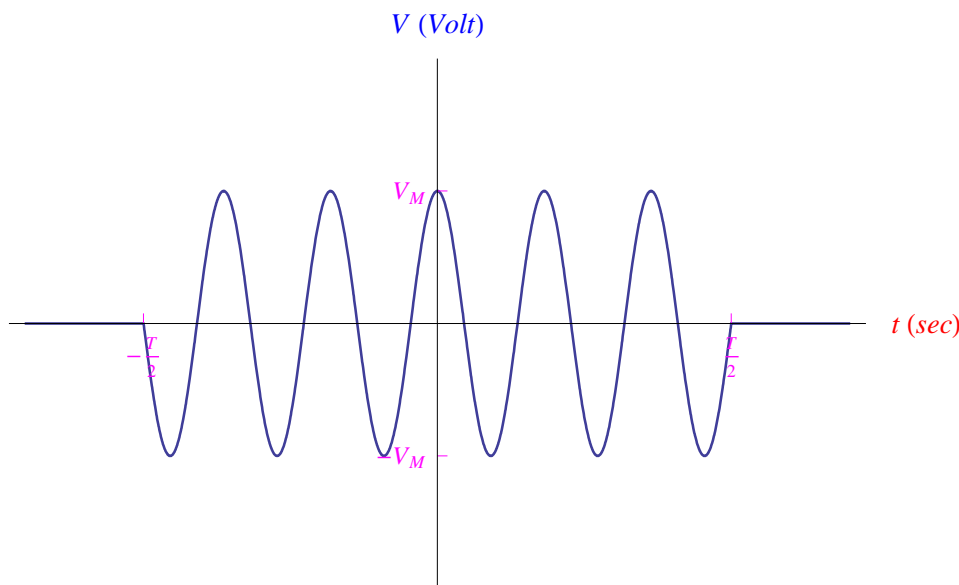


Figura 1: Grafico della funzione (5).

Calcolando la trasformata di Fourier della funzione (5), otteniamo

$$\hat{V}_\tau(\omega) = V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \tau\right)}{\omega - \omega_0}, \quad (\omega_0 = \frac{11\pi}{\tau}), \quad (6)$$

da cui vediamo che è una funzione a valori reali. Perciò la densità spettrale e lo spettro di potenza del segnale (5) sono rispettivamente dati da:

$$\begin{aligned} \rho_\tau(\omega) &= V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \tau\right)}{\omega - \omega_0} \\ w_\tau(\omega) &= \frac{2V_M^2}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \tau\right)}{\omega - \omega_0} \right]^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Per studiare il grafico della funzione $\rho_\tau(\omega)$, eseguiamo il cambio di variabile

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{2} \tau, \quad (8)$$

Quindi

$$\rho_\tau(x) = \frac{\tau V_M}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin x}{x} \quad (9)$$

Eseguendo il limite per $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \rho_\tau(x) = \frac{\tau V_M}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1} = \frac{\tau V_M}{\sqrt{2\pi}} \quad (10)$$

Cioè

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \rho_\tau(\omega) = \frac{\tau V_M}{\sqrt{2\pi}} \quad (11)$$

All'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho_\tau(x) = \frac{\tau V_M}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=0} = 0, \quad (12)$$

onde

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \rho_\tau(\omega) = 0 \quad (13)$$

Dalla (11) vediamo che $\omega = \omega_0$ è un punto di discontinuità eliminabile per $\rho_\tau(\omega)$, e prolungando per continuità

$$\rho_\tau(\omega) = \begin{cases} V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} \tau\right)}{\omega - \omega_0}, & \text{se } \omega \neq \omega_0 \\ \frac{\tau V_M}{\sqrt{2\pi}}, & \text{se } \omega = \omega_0 \end{cases} \quad (14)$$

La (14) ha un massimo assoluto in $\omega = \omega_0$:

$$\rho_{\tau, \max} = \rho_\tau(\omega_0) = \frac{\tau V_M}{\sqrt{2\pi}}, \quad (15)$$

e per $\omega \neq \omega_0$ esibisce una coda di oscillazioni sinusoidali modulate da $(\omega - \omega_0)^{-1}$ che si annullano per $|\omega| \rightarrow +\infty$. Più precisamente, scrivendo

$$\rho_\tau(\omega) = V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}} f_\tau(\omega), \quad (16)$$

dove

$$f_\tau(\omega) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \frac{1}{\omega - \omega_0} \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right), & \text{se } \omega \neq \omega_0 \\ \frac{\tau}{2}, & \text{se } \omega = \omega_0 \end{cases}, \quad (17)$$

si ha

$$|f_\tau(\omega)| = \left| \frac{1}{\omega - \omega_0} \right| \underbrace{\left| \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\tau\right) \right|}_{\leq 1} \leq \left| \frac{1}{\omega - \omega_0} \right|, \quad (18)$$

onde

$$-\frac{1}{\omega - \omega_0} \leq f_\tau(\omega) \leq \frac{1}{\omega - \omega_0}, \quad (19)$$

e quindi

$$-\frac{V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega - \omega_0} \leq \rho_\tau(\omega) \leq \frac{V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega - \omega_0} \quad (20)$$

Da tale doppia disuguaglianza segue che il grafico di $\rho_\tau(\omega)$ oscilla sinusoidalmente tra le due iperboli $\pm \frac{V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega - \omega_0}$. Ad esempio, se il segnale ha una durata $\tau = 0.1$ s ($\implies \omega_0 \simeq 345.56$ rad \cdot s $^{-1}$) si ottiene per $\rho_\tau(\omega)$ l'andamento riportato in fig. 2.

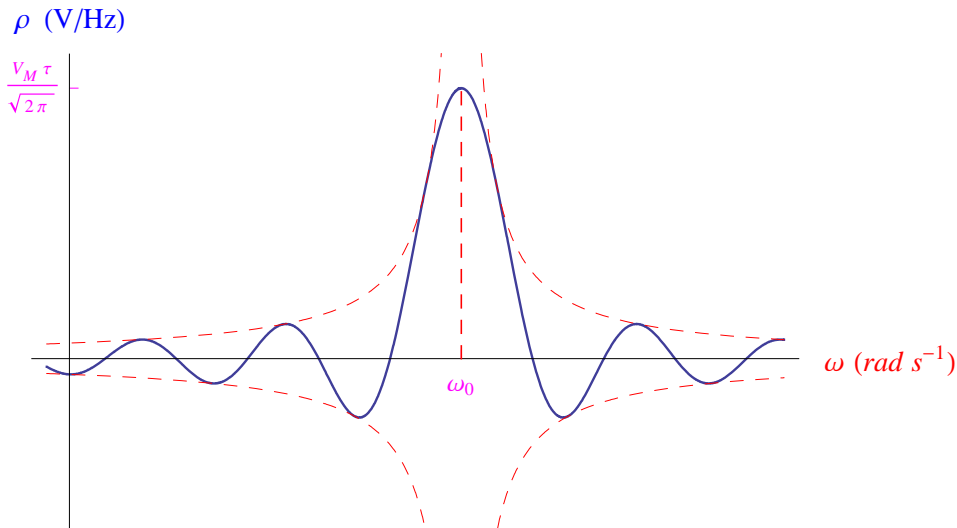


Figura 2: *Densità spettrale del segnale (5) dalla durata $\tau = 0.1$ s. Le curve in tratteggio sono le iperboli $\pm \frac{V_M \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega - \omega_0}$.*

La “larghezza” della $\rho_\tau(\omega)$ è controllata dalla durata τ del segnale. Più precisamente, al crescere di τ , $\rho_\tau(\omega)$ diviene più piccata intorno a ω_0 , per cui il contributo proveniente dalle componenti di Fourier con $\omega \neq \omega_0$ diviene progressivamente più trascurabile, come possiamo vedere dalla fig. 3.

In fig. 4 riportiamo lo spettro di potenza per $\tau = 0.1$ s.

Per $\tau \rightarrow +\infty$ la (1) diventa:

$$V(t) = V_M \cos \omega_0 t, \quad (21)$$

che in notazione complessa si scrive:

$$V(t) = V_M e^{j\omega_0 t} \quad (22)$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{V}(\omega) = \frac{V_M}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt \quad (23)$$

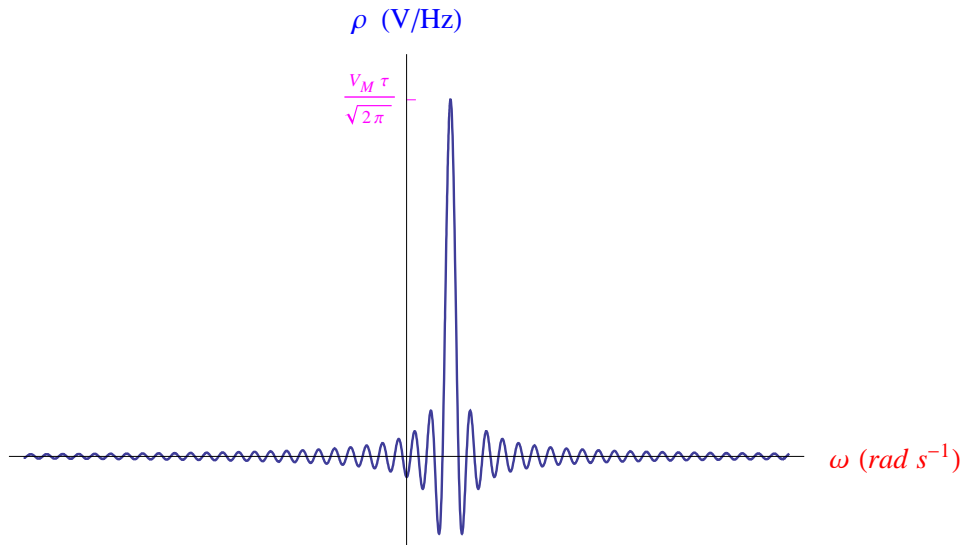


Figura 3: Densità spettrale del segnale (5) la cui durata è $\tau = 10^2$ s. La distribuzione è fortemente piccata intorno a ω_0 (valore non riportato in figura), per cui il contributo dominante proviene proprio da tale pulsazione, mentre le componenti di Fourier di frequenza $\omega \neq \omega_0$ hanno ampiezza trascurabilmente piccola.

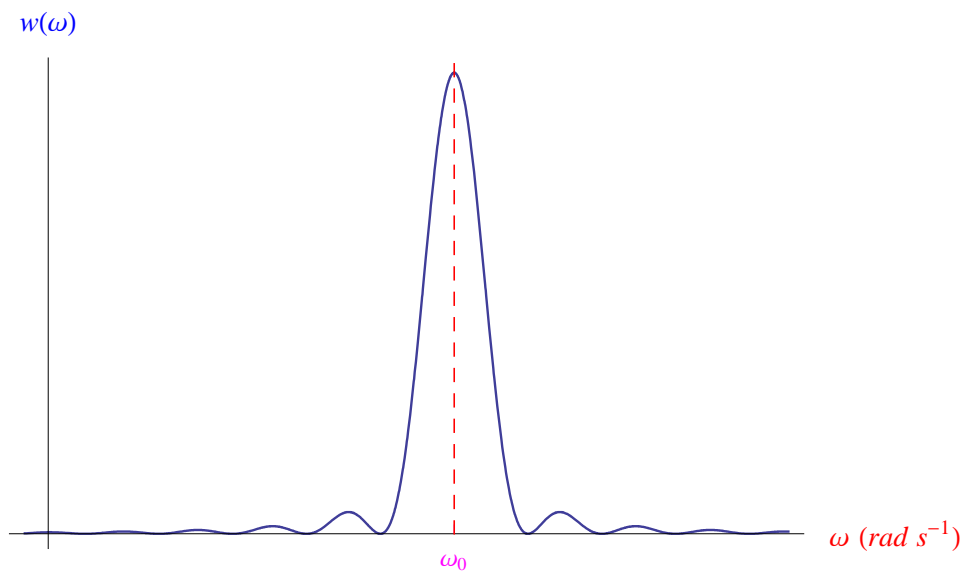


Figura 4: Spettro di potenza del segnale (5) dalla durata $\tau = 0.1$ s.

Ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jkx} dx = 2\pi\delta(k), \quad (24)$$

dove $\delta(k)$ è la funzione delta di Dirac. Quindi:

$$\rho_{\tau \rightarrow +\infty}(\omega) = V_M \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0), \quad (25)$$

Tale risultato è consistente poichè per $\tau \rightarrow +\infty$, abbiamo un segnale puramente sinusoidale (cioè che si estende da $t = -\infty$ a $t = +\infty$) per cui l'unica pulsazione presente è ω_0 .

Al diminuire progressivo di τ , dalla (14) vediamo che $\rho_\tau(\omega)$ tende ad “allargarsi”. Ciò significa che le componenti di Fourier di pulsazione $\omega \neq \omega_0$ assumono un'ampiezza non trascurabile. Per $\tau \rightarrow 0$ abbiamo un segnale di durata infinitesima ovvero un segnale impulsivo, e la sua densità spettrale è:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho_\tau(\omega) = 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty), \quad (26)$$

cioè abbiamo uno spettro piatto e identicamente nullo. Quest'ultima circostanza si traduce nel fatto che il segnale è costituito da infinite componenti di Fourier con frequenza $\omega \in (-\infty, +\infty)$ ciascuna di ampiezza infinitesima. Tuttavia, nelle applicazioni della trasformata di Fourier, si assume come segnale impulsivo un segnale del tipo

$$V(t) = A\delta(t), \quad (27)$$

dove la costante A ha le dimensioni $V \cdot s$, giacché la delta di Dirac ha le dimensioni dell'inverso del suo argomento. La densità spettrale del segnale (27) è:

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (28)$$

In altri termini, un segnale impulsivo ha uno spettro piatto. Il corrispondente spettro di potenza è:

$$w(\omega) = \frac{|A|^2}{2\pi}, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty), \quad (29)$$

ed è a sua volta piatto.