Rango e nucleo di un omomorfismo

Marcello Colozzo - http://www.extrabyte.info

I vettori in Mathematica

In *Mathematica* un vettore è una lista i cui elementi sono le componenti del vettore in una base assegnata. Ad esempio, supponiamo di avere il vettore $\xi = \left\{1, \sqrt{2}, -2\right\}$. Scriviamo :

In[1]:=
```
ξ = {1, √2, -2}
```

Out[1]=
```
{1, √2, -2}
```

Omomorfismi

Un omomorfismo è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali, per cui può essere definito in *Mathematica* come una funzione. Ad esempio, supponiamo di avere l'omomorfismo $\Omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\Omega(x, y, z) = (x + y, y + z)$. Scriviamo:

In[2]:=
```
Ω[{x_, y_, z_}] := {x + y, y + z}
```

Per determinare la matrice rappresentativa di Ω nelle basi canoniche degli spazi vettoriali di cui sopra, dobbiamo determinare il risultato di tale applicazione sui rispettivi vettori di base. La base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $\{e_1, e_2, e_3\}$ dove

In[3]:=
```
e1 = {1, 0, 0}; e2 = {0, 1, 0}; e3 = {0, 0, 1};
```

Quindi

In[4]:=
```
Ω[e1]
```

Out[4]=
```
{1, 0}
```

In[5]:=
```
Ω[e2]
```

Out[5]=
```
{1, 1}
```

In[6]:=
```
Ω[e3]
```

Out[6]=
```
{0, 1}
```

Segue la matrice rappresentativa:

In[7]:=
```
A = {Ω[e1], Ω[e2], Ω[e3]} // Transpose
```

Out[7]=
```
{{1, 1, 0}, {0, 1, 1}}
```

Il rango di Ω è il rango della matrice A :

In[8]:=
```
R = A // MatrixRank
```

Out[8]=
```
2
```

Una base del kernel di Ω si determina con il comando **`NullSpace`**

In[9]:=
```
A // NullSpace
```

Out[9]=
```
{{1, -1, 1}}
```

Ne consegue che una base di $\ker\Omega$ è $\{\epsilon\}$ dove $\epsilon = \{1, -1, 1\}$.