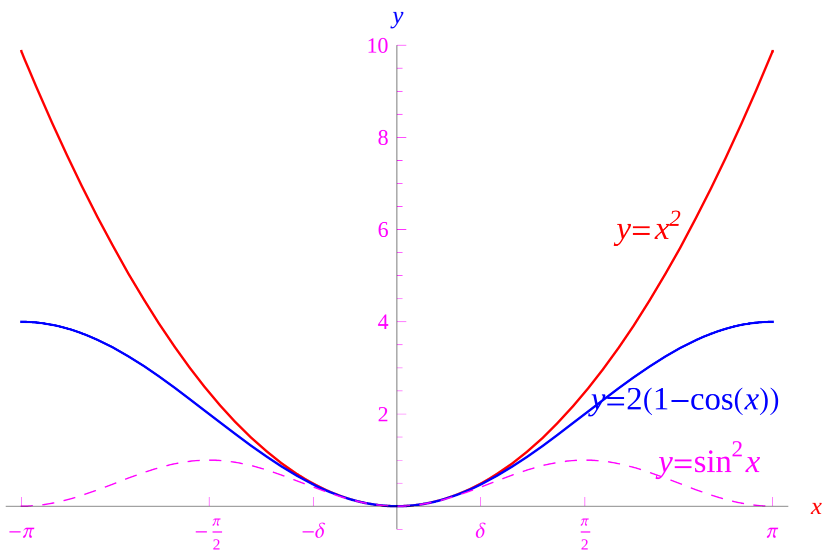
Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right) \quad \sum_{k=0}^{+\infty}a_k \quad \int f\left(x\right)dx \quad \oint_{\Gamma}\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$$

Infinitesimi ed infiniti

Marcello Colozzo



Indice

1 Definizioni **2**

2 Infinitesimi confrontabili. Il concetto di ordine **2**

3 Infiniti confrontabili. Il concetto di ordine **6**

4 Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti] **10**

5 Infinitesimi ed infiniti non dotati di ordine **14**
- 5.1 Ordine indeterminato 19
- 5.2 Scala di infiniti di ordine indeterminato 20
- 5.3 Scala di infinitesimi di ordine indeterminato 22

6 Parte principale di un infinitesimo **23**

7 Parte principale di un infinito **27**

8 Proprietà e teoremi **31**

9 Calcolo di limiti con il Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti] **39**
- 9.1 41

1 Definizioni

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$:

$$f : X \to \mathbb{R} \tag{1}$$

Se x_0 è un punto di accumulazione per X, sussistono le seguenti definizioni:

Definizione 1 *f è un **infinitesimo** in x_0 (o per $x \to x_0$) se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \tag{2}$$

Definizione 2 *f è un **infinito** in x_0 (o per $x \to x_0$) se*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \tag{3}$$

Alcuni esempi di infinitesimi:

Esempio 3 *La funzione $f(x) = \sin x$ è un infinitesimo negli infiniti punti*

$$x_k = k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{4}$$

Esempio 4 *La funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ non è definita in $x = 0$, tuttavia:*

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \tag{5}$$

per cui $x \sin \frac{1}{x}$ è un infinitesimo nel predetto punto.

Esempio 5 *La funzione $f(x) = 1/x$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, giacché:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \tag{6}$$

Alcuni esempi di infiniti:

Esempio 6 *La funzione $f(x) = \csc x$ è un infinito negli infiniti punti (4).*

Esempio 7 *La funzione $f(x) = 1/x$ è un infinito in $x = 0$.*

2 Infinitesimi confrontabili. Il concetto di ordine

Se x_0 è un qualunque punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$, resta definito l'insieme

$$\mathcal{I}(x_0) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \\ \nexists I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid x \in X \cap I_\delta(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) = 0 \end{array} \right\}, \tag{7}$$

che si identifica con la **classe degli infinitesimi** in x_0 non definitivamente nulli intorno a tale punto.

Ciò premesso, comunque prendiamo $f, g \in \mathcal{I}(x_0)$ il confronto tra f e g si realizza calcolando il limite del rapporto f/g:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \tag{8}$$

Si presentano i seguenti casi:

1. Il rapporto è un infinitesimo:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{9}$$
Significa che $f(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$.

2. Il rapporto è un infinito:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \tag{10}$$
Significa che $g(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$.

3. Il rapporto converge a un limite non nullo:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{11}$$
Significa che $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero con la medesima rapidità. Diremo allora che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine**. Se $\ell = 1$ gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:
$$f \sim g, \quad (x \to x_0) \tag{12}$$

4. Il rapporto è non regolare
$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{13}$$

Esempio 8 *Siano*
$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}, \quad g(x) = x,$$
elementi di $\mathcal{I}(0)$. *Abbiamo:*
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$$
e tale limite non esiste.

In casi come questi spostiamo la nostra attenzione sul rapporto $|f(x)| / |g(x)|$, calcolando:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{14}$$
per cui si presenta uno dei seguenti sottocasi:

4a.
$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lambda > 0 \tag{15}$$
Qui $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

4b.
$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty \tag{16}$$
e diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$.

4c. Il rapporto$\left|f\left(x\right)\right|/\left|g\left(x\right)\right|$ è non regolare

$$\nexists \lim_{x\to x_0}\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|}, \tag{17}$$

ma è definitivamente limitato tra $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ intorno a x_0. Cioè

$$\begin{aligned}&\exists\varepsilon_1,\varepsilon_2>0 \mid \exists\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}>0 \mid x\in X\cap\left(x_0-\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2},x_0+\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)-\{x_0\} \\ &\Longrightarrow \varepsilon_1\leq\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|}\leq\varepsilon_2\end{aligned} \tag{18}$$

In tale circostanza diremo che $f\left(x\right)$ e $g\left(x\right)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

In tutti i casi esaminati gli infinitesimi assegnati si dicono **confrontabili.** Viceversa, si dicono **non confrontabili** se si verifica la negazione della (18) i.e. il rapporto $\left|f\left(x\right)\right|/\left|g\left(x\right)\right|$ non è definitivamente limitato intorno a x_0:

$$\begin{aligned}&\nexists\varepsilon_1,\varepsilon_2>0 \mid \exists\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}>0 \mid x\in X\cap\left(x_0-\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2},x_0+\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)-\{x_0\} \\ &\Longrightarrow \varepsilon_1\leq\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|}\leq\varepsilon_2\end{aligned} \tag{19}$$

Fa eccezione il seguente caso:

$$\exists\varepsilon>0 \mid \exists\delta_\varepsilon>0 \mid x\in X\cap\left(x_0-\delta_\varepsilon,x_0+\delta_\varepsilon\right)-\{x_0\}\Longrightarrow 0\leq\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|}\leq\varepsilon \tag{20}$$

Cioè se il rapporto $\left|f\left(x\right)\right|/\left|g\left(x\right)\right|$ ha, intorno a x_0, per estremo inferiore lo zero ed è limitato superiormente. In tale circostanza si dice che $f\left(x\right)$ è un infinitesimo di **ordine non inferiore** a $g\left(x\right)$. In maniera simile:

$$\exists\varepsilon>0 \mid \exists\delta_\varepsilon>0 \mid x\in X\cap\left(x_0-\delta_\varepsilon,x_0+\delta_\varepsilon\right)-\{x_0\}\Longrightarrow \varepsilon\leq\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|}<+\infty, \tag{21}$$

ovvero il rapporto $\left|f\left(x\right)\right|/\left|g\left(x\right)\right|$ è definitivamente limitato inferiormente ma non superiormente. Ne consegue che $f\left(x\right)$ è un infinitesimo di **ordine non superiore** a $g\left(x\right)$.

***

Esempio 9 *Riprendiamo l'esempio 8:*

$$f\left(x\right)=x\sin\frac{1}{x},\ \ g\left(x\right)=x \tag{22}$$

Il rapporto è non regolare

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\sin\frac{1}{x} \tag{23}$$

Passando ai valori assoluti di singolo infinitesimo, constatiamo che nemmeno ora il rapporto è regolare, giacché:

$$\frac{\left|f\left(x\right)\right|}{\left|g\left(x\right)\right|}=\left|\sin\frac{1}{x}\right| \tag{24}$$

Tuttavia:

$$0\leq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1,\quad \forall x\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{25}$$

Ne consegue che $f\left(x\right)=x\sin\frac{1}{x}$ è (in $x=0$) un infinitesimo di ordine non inferiore a $g\left(x\right)=x$. In fig. 1 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x=0$.

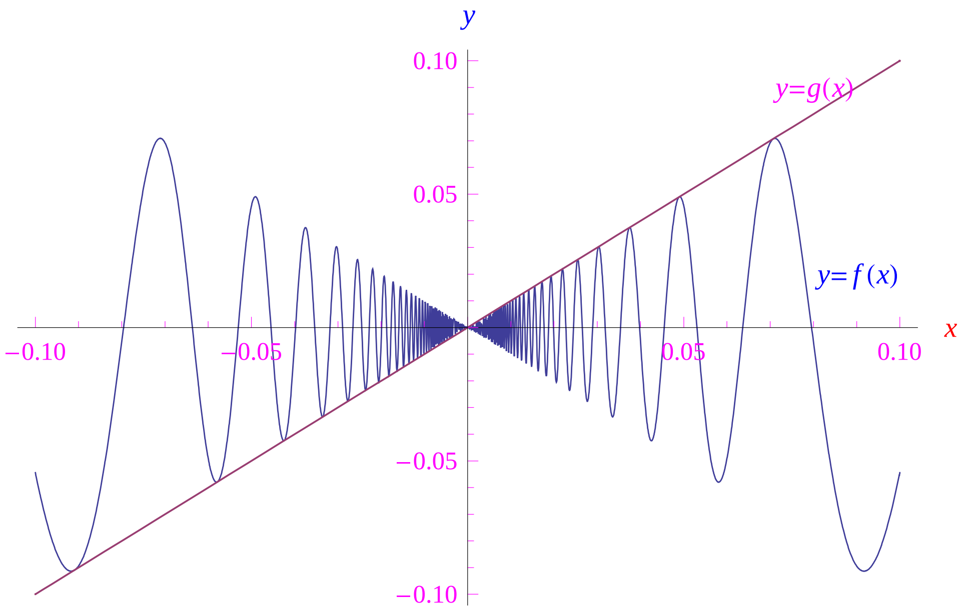


Figura 1: Grafico delle funzioni $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$ entrambe infinitesime per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato tra 0 e 1, per cui $f(x)$ è di ordine non inferiore a $g(x)$.

Esempio 10 *Siano*

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x} \tag{26}$$

Si tratta di infinitesimi in $x = 0$. Il primo limite è ben noto:

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \tag{27}$$

Il secondo è meno immediato, ma facilmente dimostrabile applicando il teorema **??***:*

$$\lim_{x \to 0} x \sin^2 \frac{1}{x} = 0 \tag{28}$$

Confrontiamo i due infinitesimi eseguendo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}, \tag{29}$$

che è manifestamente non regolare in $x = 0$. Altrettanto non regolare è il rapporto dei valori assoluti di singolo infinitesimo:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} \tag{30}$$

Ma

$$1 \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{31}$$

Ne consegue che $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ è (in $x = 0$) un infinitesimo di ordine non superiore a $g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$. In fig. 2 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

Un esempio immediato per ciò che riguarda la confrontabilità di infinitesimi è offerto dalla coppia di limiti fondamentali:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

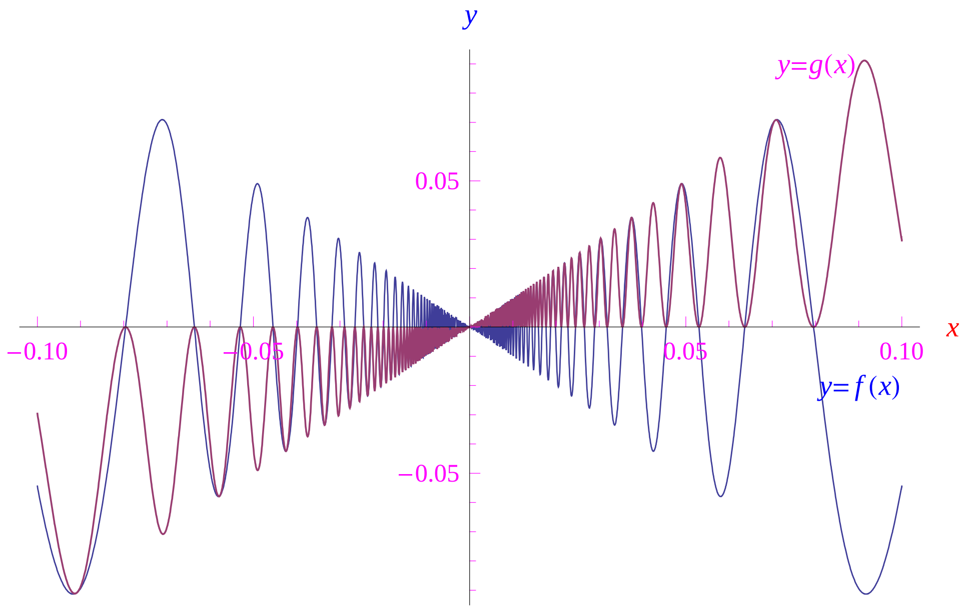


Figura 2: Grafico delle funzioni $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ entrambe infinitesime per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato inferiormente ma non superiormente, per cui $f(x)$ è di ordine non superiore a $g(x)$.

Ne consegue che $\sin x$ e x sono (per $x \to 0$) infinitesimi dello stesso ordine. Per quanto precede $\sin x$ e x sono infinitesimi equivalenti:

$$\sin x \sim x \qquad (x \to 0), \tag{32}$$

mentre $1 - \cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore a x. Tali risultati hanno una notevole interpretazione geometrica che può essere dedotta dall'esame della fig. 3. Dal momento che $2 \sin x$ è la lunghezza della corda PP' sottesa dall'arco di estremi P e P' (la cui lunghezza è $2x$), si ha che per $x \to 0$ la lunghezza della corda è un infinitesimo dello stesso ordine della lunghezza dell'arco. Diversamente, $1 - \cos x$ è la lunghezza della "freccia" $\overline{QA}$ dell'arco di estremi P e P' e per quanto precede, è un infinitesimo di ordine superiore a x (per $x \to 0$). In parole povere, mentre la lunghezza della corda tende a zero con la stessa rapidità con cui si annulla la lunghezza dell'arco, la lunghezza della freccia va a zero più rapidamente.

3 Infiniti confrontabili. Il concetto di ordine

Se x_0 è un qualunque punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$, resta definito l'insieme

$$\mathcal{J}(x_0) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \right\}, \tag{33}$$

che si identifica con la **classe degli infiniti** in x_0.

Ciò premesso, comunque prendiamo $f, g \in \mathcal{J}(x_0)$ il confronto tra f e g si realizza calcolando il limite del rapporto f/g:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \tag{34}$$

Si presentano i seguenti casi:

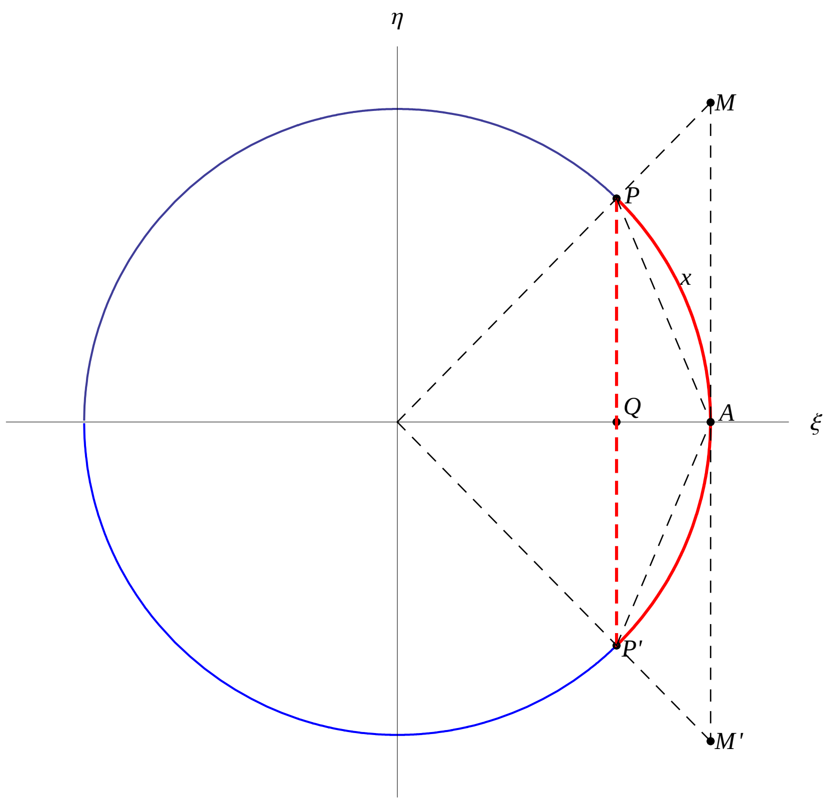


Figura 3: Circonferenza trigonometrica.

1. Il rapporto è un infinitesimo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{35}$$

Significa che $|g(x)|$ tende a $+\infty$ più rapidamente di $|f(x)|$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$.

2. Il rapporto è un infinito:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \tag{36}$$

Significa che $|f(x)|$ tende $+\infty$ più rapidamente di $|g(x)|$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$.

3. Il rapporto converge a un limite non nullo:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{37}$$

Significa che $|f(x)|$ e $|g(x)|$ tendono a $+\infty$ con la medesima rapidità. Diremo allora che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine**.

4. Il rapporto è non regolare

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{38}$$

Esempio 11 *Siano*

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

elementi di $\mathcal{J}(0)$*. Abbiamo:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$$

e tale limite non esiste.

In casi come questi spostiamo la nostra attenzione sul rapporto $|f(x)| / |g(x)|$, calcolando:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{39}$$

per cui si presenta uno dei seguenti sottocasi:

4a.
$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lambda > 0 \tag{40}$$

Qui $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine.

4b.
$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty \tag{41}$$

e diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore a $g(x)$.

4c. Il rapporto$|f(x)| / |g(x)|$ è non regolare

$$\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{42}$$

ma è definitivamente limitato intorno a x_0. Più precisamente

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ &\quad \Longrightarrow \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{43}$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine.

In tutti i casi esaminati gli infiniti assegnati si dicono **confrontabili.** Viceversa, si dicono **non confrontabili** se si verifica la negazione della (18) i.e. il rapporto $|f(x)| / |g(x)|$ non è definitivamente limitato intorno a x_0:

$$\begin{aligned} &\nexists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ &\quad \Longrightarrow \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{44}$$

Fa eccezione il seguente caso:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \Longrightarrow 0 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon \tag{45}$$

Cioè se il rapporto $|f(x)| / |g(x)|$ ha, intorno a x_0, per estremo inferiore lo zero ed è limitato superiormente. In tale circostanza si dice che $f(x)$ è un infinito di **ordine non superiore** a $g(x)$. In maniera simile:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \Longrightarrow \varepsilon \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty, \tag{46}$$

ovvero il rapporto $|f(x)| / |g(x)|$ è definitivamente limitato inferiormente ma non superiormente. Ne consegue che $f(x)$ è un infinito di **ordine non inferiore** a $g(x)$.

Esempio 12 *Riprendiamo l'esempio 11:*

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \tag{47}$$

Il rapporto è non regolare

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} \tag{48}$$

Passando ai valori assoluti di singolo infinitesimo, constatiamo che nemmeno ora il rapporto è regolare, giacché:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} \tag{49}$$

Tuttavia:

$$0 < \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} \leq +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{50}$$

Ne consegue che $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{-1}$ è (in $x = 0$) un infinito di ordine non inferiore a $g(x) = x^{-1}$. In fig. 4 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

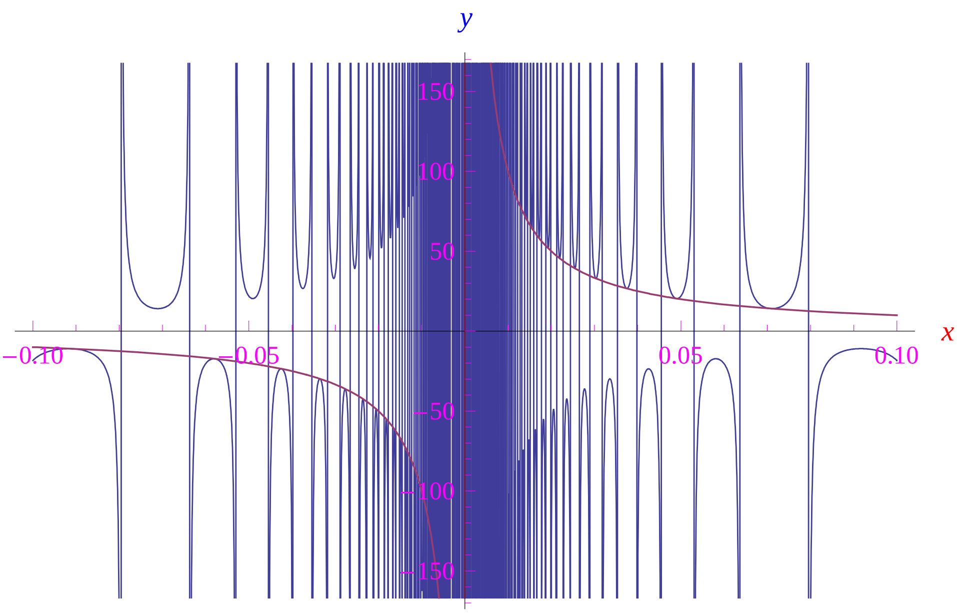


Figura 4: Grafico delle funzioni $f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ entrambe infinite per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ non è limitato superiormente, per cui $f(x)$ è di ordine non inferiore a $g(x)$.

Esempio 13 *Siano dati gli infiniti (per $x \to 0$):*

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x \sin^2 \frac{1}{x}} \tag{51}$$

Eseguiamo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin \frac{1}{x}, \tag{52}$$

che è manifestamente non regolare in $x = 0$. Altrettanto non regolare è il rapporto dei valori assoluti di singolo infinitesimo:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \sin \frac{1}{x} \right| \tag{53}$$

Ma

$$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{54}$$

Ne consegue che $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{-1}$ è (in $x = 0$) un infinitesimo di ordine non superiore a $g(x) = \left(x \sin^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$. In fig. 5 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

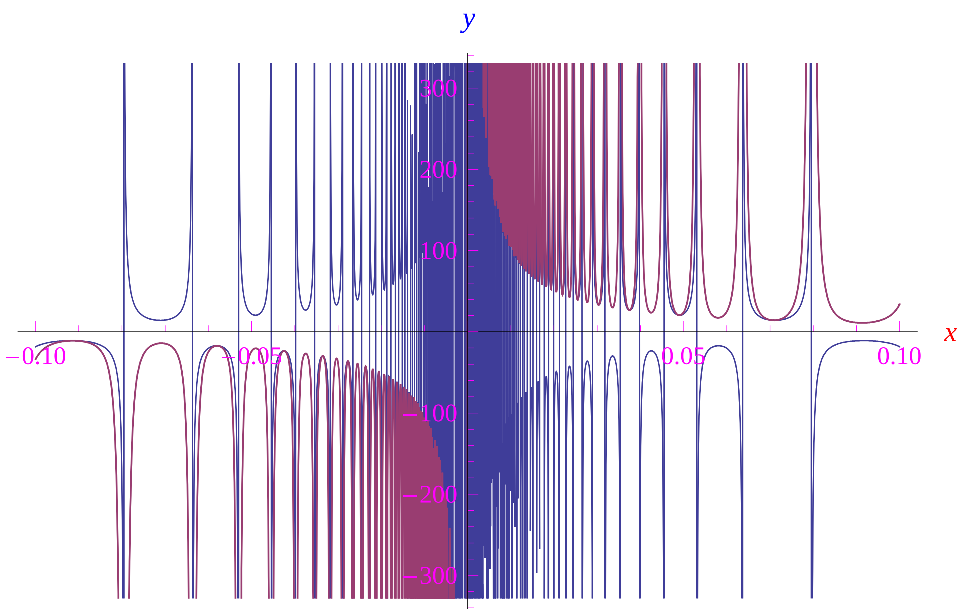


Figura 5: Grafico delle funzioni $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{-1}$ e $g(x) = \left(x \sin^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$ entrambe infinite per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato tra 0 e 1, per cui $f(x)$ è di ordine non superiore a $g(x)$.

4 Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]

Dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 14 ***(Principio di sostituzione degli infinitesimi)***

Ipotesi:

1. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi (per $x \to x_0$) che ammettono una decomposizione del tipo*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x), \tag{55}$$

   con $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ tali che $f_2(x)$ è di ordine superiore a $f_1(x)$, e $g_2(x)$ è di ordine superiore a $g_1(x)$.

2. *Il rapporto $f(x)/g(x)$ è regolare in x_0.*

Tesi:
Il rapporto $f_1(x)/g_1(x)$ è regolare in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{56}$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite (finito o infinito):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{57}$$

Segue

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1+\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1+\frac{g_2(x)}{g_1(x)}}\right] \tag{58}$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{1+\frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1+\frac{g_2(x)}{g_1(x)}}$$

Per ipotesi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)},$$

onde l'asserto. ■

Da tale teorema segue che nel calcolo del limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}$$

è lecito trascurare a numeratore e a denominatore gli infinitesimi di ordine superiore.

Per quanto riguarda gli infiniti si dimostra immediatamente il seguente teorema:

Teorema 15 ***(Principio di sostituzione degli infiniti)***
Ipotesi:

1. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti (per $x \to x_0$) che ammettono una decomposizione del tipo*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x), \tag{59}$$

   con $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ tali che $f_2(x)$ è di ordine inferiore a $f_1(x)$, e $g_2(x)$ è di ordine inferiore a $g_1(x)$.

2. *Il rapporto $f(x)/g(x)$ è regolare in x_0.*

Tesi:
Il rapporto $f_1(x)/g_1(x)$ è regolare in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{60}$$

Da tale teorema segue che nel calcolo del limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}$$

è lecito trascurare a numeratore e a denominatore gli infiniti di ordine inferiore.

***

Per poter quantificare il concetto di ordine di un infinitesimo (o di un infinito) è necessario definire un infinitesimo (o un infinito) di riferimento. Per fissare le idee, iniziamo con gli infinitesimi. Nella classe $\mathcal{I}(x_0)$ di tutti e soli gli infinitesimi in x_0, scegliamo ad arbitrio un *infinitesimo di riferimento* (o *infinitesimo campione*) $u(x)$. La scelta più semplice è

$$u(x)=\begin{cases}|x-x_0|, & \text{se } |x_0|<+\infty\\ \frac{1}{|x|}, & \text{se } |x_0|=+\infty\end{cases} \tag{61}$$

Osserviamo che comunque prendiamo $\alpha>0$, riesce:

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^\alpha=\lim_{x\to x_0}|x-x_0|^\alpha=0 \tag{62}$$

Cioè

$$[u(x)]^\alpha\in\mathcal{I}(x_0),\quad \forall\alpha>0 \tag{63}$$

Inoltre, per ogni $\beta>0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[u(x)]^\alpha}{[u(x)]^\beta}=\lim_{x\to x_0}|x-x_0|^{\alpha-\beta}=\begin{cases}0, & \text{se } \alpha>\beta\\ 1, & \text{se } \alpha=\beta\\ +\infty, & \text{se } \alpha<\beta\end{cases} \tag{64}$$

In altri termini, se $\alpha>\beta$ l'infinitesimo $[u(x)]^\alpha$ è di ordine superiore a $[u(x)]^\beta$, e viceversa se $\alpha<\beta$. Se $\alpha=\beta$ gli infinitesimi $[u(x)]^\alpha$ e $[u(x)]^\beta$ sono equivalenti. Ne consegue:

Definizione 16 *Il numero reale $\alpha>0$ si dice* ***ordine*** *dell'infinitesimo $[u(x)]^\alpha$.*

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 17

$$\left.\begin{array}{c}f(x)\ \textit{è un infinitesimo}\\ \textbf{\textit{dotato di ordine}}\end{array}\right)\overset{def}{\Longleftrightarrow}\exists\alpha>0\mid\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{65}$$

Il numero reale $\alpha>0$ si dice ordine di $f(x)$ rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x)$.

In maniera del tutto analoga si definisce l'ordine di un infinito $f\in\mathcal{J}(x_0)$. Più precisamente, se $u(x)$ è l'infinitesimo di riferimento nella classe $\mathcal{I}(x_0)$, si assume come infinito di riferimento nella classe $\mathcal{J}(x_0)$, l'infinito:

$$v(x)=\frac{1}{u(x)}=\begin{cases}\frac{1}{|x-x_0|}, & \text{se } |x_0|<+\infty\\ |x|, & \text{se } |x_0|=+\infty\end{cases} \tag{66}$$

Naturalmente:

Definizione 18

$$\left.\begin{array}{r} f\left(x\right)\ \text{è un infinito} \\ \textbf{dotato di ordine} \end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\alpha>0 \mid \lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{\left[v\left(x\right)\right]^{\alpha}}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{67}$$

Il numero reale $\alpha>0$ si dice ordine di $f\left(x\right)$ rispetto all'infinito di riferimento $v\left(x\right)$.

Per quanto visto in precedenza, esempi immediati di infinitesimi confrontabili sono offerti dai limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}, \tag{68}$$

da cui vediamo che per $x\to0$, l'infinitesimo $\sin x$ è del primo ordine rispetto all'infinitesimo di riferimento $u\left(x\right)=x$, mentre l'infinitesimo $1-\cos x$ è del secondo ordine. Graficamente ciò equivale a dire che in un intorno di $x=0$ i diagrammi cartesiani di $\sin x$ e $1-\cos x$ possono essere approssimati rispettivamente dalla retta $y=x$ e dall'arco di parabola $y=x^2$, come illustrato nelle figg. 6

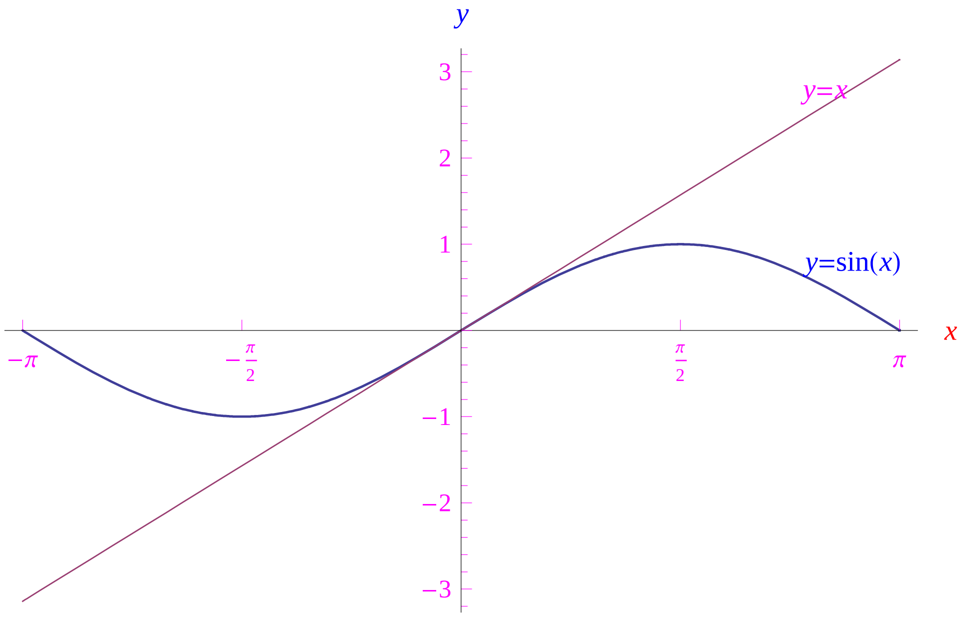


Figura 6: In un intorno di $x=0$ la funzione $f\left(x\right)=\sin x$ può essere approssimata dalla funzione lineare $g\left(x\right)=x$.

Esercizio 19 *Determiniamo i valori del parametro reale λ per i quali la funzione*

$$f\left(x\right)=\frac{\arctan x-x}{\cos x-\lambda} \tag{69}$$

è un infinitesimo (in $x=0$) del primo ordine rispetto all'infinitesimo di riferimento $u\left(x\right)=x$.

Soluzione

Dobbiamo imporre

$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x\left(\cos x-\lambda\right)}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{70}$$

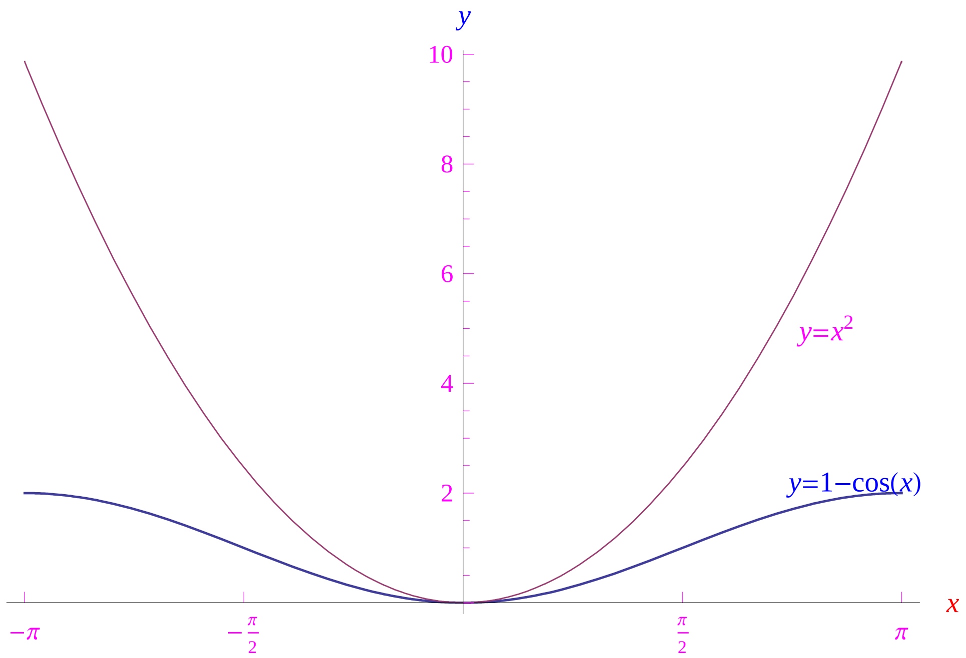


Figura 7: In un intorno di $x = 0$ la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ può essere approssimata dalla funzione potenza di esponente reale 2 $g(x) = x^2$.

Il limite restitusce la forma indeterminata 0/0 per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{x(\cos x - \lambda)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{\cos x - \lambda - x\sin x}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(1+x^2)(\cos x - \lambda - x\sin x)}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x - \lambda - x\sin x}$$

Il limite interessante è il secondo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x - \lambda - x\sin x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\cos x - 1}{x^2}-\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{2}{3}, & \text{se } \lambda = 1 \\ \frac{0}{1-\lambda} = 0, & \text{se } \lambda \neq 1 \end{cases} \tag{71}$$

Conclusione: deve essere $\lambda = 1$.

5 Infinitesimi ed infiniti non dotati di ordine

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la nozione di infinitesimo [infinito] dotato di ordine. Osserviamo ora che non tutti gli infinitesimi [infiniti] sono dotati di ordine. Ad esempio nel caso degli infinitesimi, assegnata la classe $\mathcal{I}(x_0)$ degli infinitesimi in x_0 e non definitivamente nulli intorno a tale punto, e l'infinitesimo di riferimento:

$$u(x) = \begin{cases} |x - x_0|, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ \frac{1}{|x|}, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases}, \tag{72}$$

può accadere

$$\exists f \in \mathcal{I}(x_0) \mid \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall\alpha > 0 \tag{73}$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine infinitamente grande** (rispetto a $u(x)$). Si badi che $f(x)$ e $u(x)^\alpha$ sono comunque confrontabili. Pertanto, la confrontabilità è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza dell'ordine di infinitesimo. Se invece:

$$\exists f \in \mathcal{I}(x_0) \mid \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \pm\infty, \quad \forall \alpha > 0, \tag{74}$$

diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine infinitamente piccolo** (rispetto a $u(x)$).

Esempio 20 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = e^{-x} \tag{75}$$

si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{I}(+\infty), \tag{76}$$

essendo $\mathcal{I}(+\infty)$ la classe degli infinitesimi per $x \to +\infty$, non identicamente nulli intorno a $x = +\infty$. Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = \frac{1}{x}, \tag{77}$$

per cui calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \tag{78}$$

Applicando ripetutamente la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x} = ... = \alpha! \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{[u(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0,$$

onde e^{-x} è (per $x \to +\infty$) un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

Esempio 21 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = e^{-1/x} \tag{79}$$

riesce

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{I}(0) \tag{80}$$

Assumendo come infinitesimo di riferimento

$$u(x) = |x|, \tag{81}$$

si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \frac{0}{0} \tag{82}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = 1/x$ e tenendo conto del risultato dell'esempio precedente.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata è un infinitesimo (per $x \to 0^+$) di ordine infinitamente grande. La funzione è graficata in fig. 8.

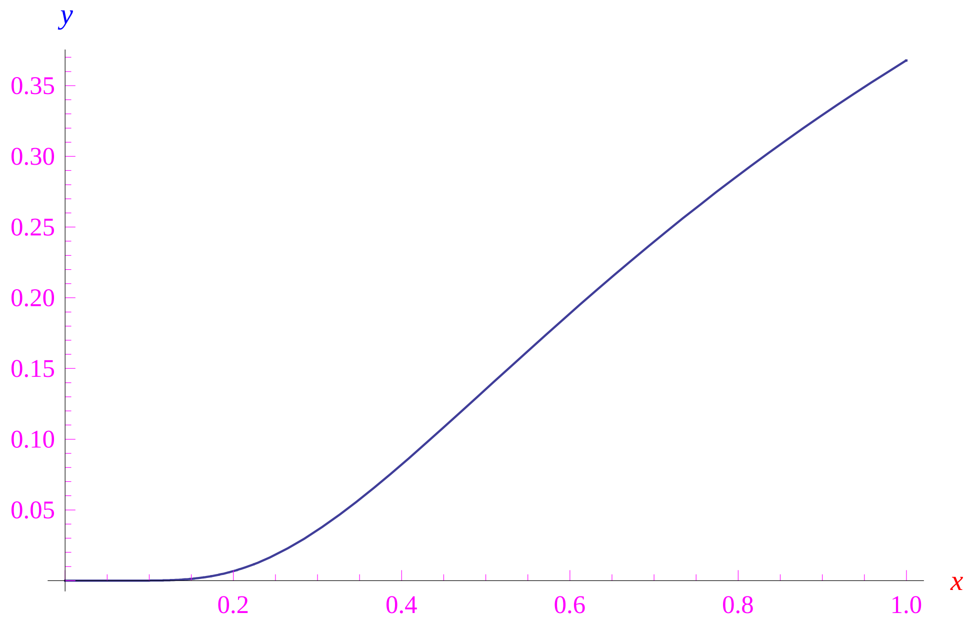


Figura 8: Grafico di $f(x) = e^{-1/x}$ in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \to 0^+$ la funzione si annulla più rapidamente di qualsiasi potenza x^α.

Esempio 22 *Sia data la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \tag{83}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln|x|} = \frac{1}{\ln(0^+)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-, \tag{84}$$

cosicché f è un infinitesimo in $x = 0$. Per determinare l'eventuale ordine assumiamo come infinitesimo di riferimento la seguente funzione:

$$u(x) = |x| \tag{85}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|^\alpha \ln|x|} \tag{86}$$

Dal momento che la funzione è pari, limitiamoci a calcolare il limite destro:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|^\alpha \ln|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha \ln x} = \frac{1}{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \tag{87}$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(-\alpha)\, x^{-\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = -\alpha \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \underset{\alpha>0}{=} -\infty \tag{88}$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = -\infty, \quad \forall \alpha > 0$$

Abbiamo così stabilito che la funzione assegnata è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine infinitamente piccolo. Ciò implica che detta funzione si annulla (per $x \to 0$) meno rapidamente di ogni potenza $|x|^\alpha$. In fig. 9 riportiamo il grafico della funzione in un intorno di $x = 0$.

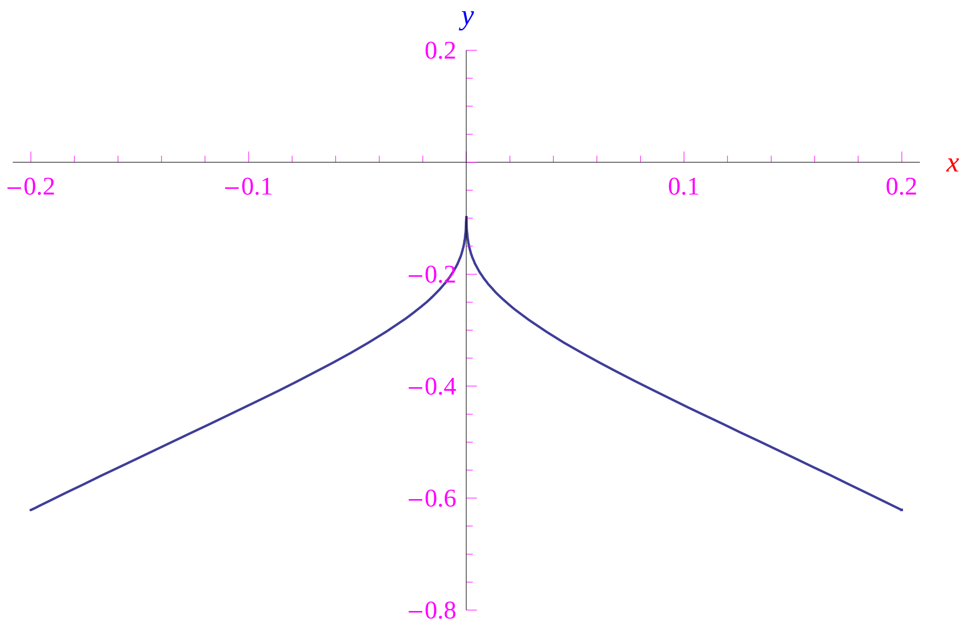


Figura 9: Grafico di $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \to 0$ la funzione si annulla meno rapidamente di qualsiasi potenza x^α.

Definizioni analoghe per quanto riguarda gli infiniti. Precisamente, assegnata la classe $\mathcal{J}(x_0)$ degli infiniti in x_0 e l'infinito di riferimento:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-x_0|}, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ |x|, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases}, \tag{89}$$

può accadere

$$\exists f \in \mathcal{J}(x_0) \mid \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \pm\infty, \quad \forall \alpha > 0 \tag{90}$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ è un infinito di **ordine infinitamente grande** (rispetto a $v(x)$). Si badi che $f(x)$ e $v(x)^\alpha$ sono comunque confrontabili. Pertanto, la confrontabilità è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza dell'ordine di infinito. Se invece:

$$\exists f \in \mathcal{J}(x_0) \mid \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0, \tag{91}$$

diremo che $f(x)$ è un infinito di **ordine infinitamente piccolo** (rispetto a $v(x)$).

Esempio 23 *Consideriamo la funzione esponenziale:*

$$f(x) = e^x \tag{92}$$

Segue:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow f \in \mathcal{J}(+\infty), \tag{93}$$

essendo $\mathcal{J}(+\infty)$ la classe degli infiniti per $x \to +\infty$. Assumiamo come infinito di riferimento la funzione:

$$v(x) = x \tag{94}$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^{\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \tag{95}$$

Applicando ripetutamente la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = \ldots = \frac{1}{\alpha!} \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \tag{96}$$

Cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{[v(x)]^{\alpha}} = 0, \quad \forall \alpha > 0, \tag{97}$$

onde e^x è (per $x \to +\infty$) un infinito di ordine infinitamente grande.

Esempio 24 *Consideriamo la funzione logaritmo:*

$$f(x) = \ln x \tag{98}$$

Segue

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Longrightarrow f \in \mathcal{J}(0) \cap \mathcal{J}(+\infty) \tag{99}$$

Determiniamo l'eventuale ordine di infinito. Per $x \to 0^+$ assumiamo come infinito di riferimento la funzione

$$v(x) = \frac{1}{x} \tag{100}$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{[v(x)]^{\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0 \tag{101}$$

Ne consegue che la funzione logaritmo è per $x \to 0^+$ un infinito di ordine infinitamente piccolo. Per $x \to +\infty$ assumiamo come infinito di riferimento la seguente funzione:

$$w(x) = x \tag{102}$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{[w(x)]^{\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0, \quad \forall \alpha > 0 \tag{103}$$

Da ciò segue che la funzione logaritmo è per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo. Ciò è simboleggiato in fig. 10.

Osservazione 25 *Gli esempi* **??** *e 23 si generalizzano nel modo seguente: assegnato $\lambda > 0$, le funzioni*

$$e^{\lambda x}, \quad e^{-\lambda x} \tag{104}$$

sono per $x \to +\infty$, rispettivamente un infinito di ordine infinitamente grande e un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

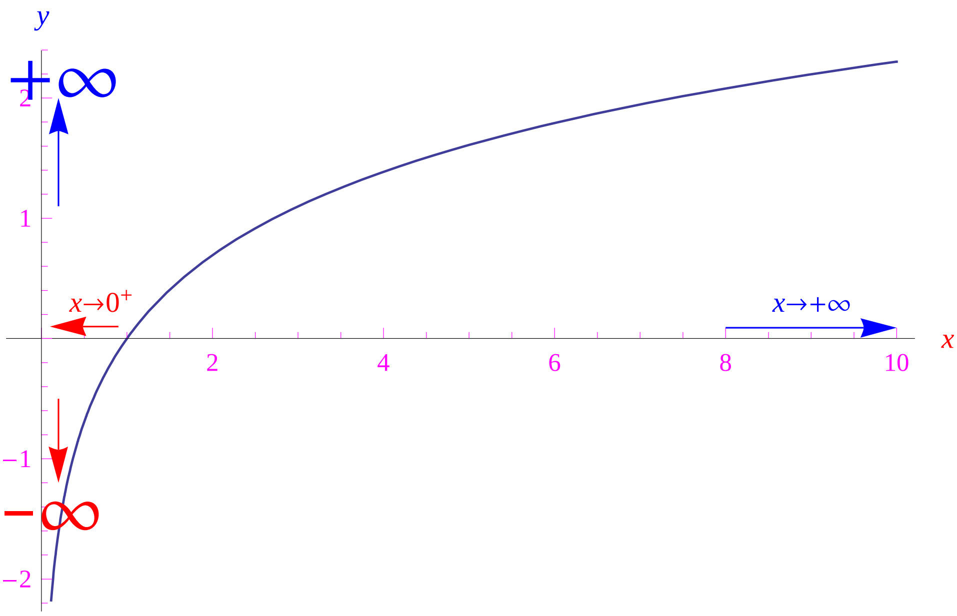


Figura 10: Per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, la funzione $\log x$ è un infinito di ordine infinitamente piccolo.

5.1 Ordine indeterminato

Sussiste la seguente definizione

Definizione 26 *Se $u(x) \in \mathcal{I}(x_0)$ è l'infinitesimo di riferimento, diremo che $f \in \mathcal{I}(x_0)$* ***non ha un ordine determinato****, se il rapporto $\frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha}$ è regolare per ogni $\alpha > 0$, riuscendo convergente per alcuni valori di α, divergente per i rimanenti.*

Esempio 27 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x \ln x \tag{105}$$

Risulta

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \to 0^+} x = 0,$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 0$. Dal momento che $x \to 0^+$, assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = x \tag{106}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha - 1}} \tag{107}$$

Distinguiamo i casi:

1. $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(1-\alpha)\, x^{-2+\alpha}}$$
$$= -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha} = 0,$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad α per ogni $0 < \alpha < 1$.

2. $\alpha \geq 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} \frac{-\infty}{0^+} = -\infty, & se\ \alpha > 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, & se\ \alpha = 1 \end{cases} \tag{108}$$

Cioè $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore a 1.

Ne consegue che $x \ln x$ è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine inferiore a 1, ma maggiore di un qualunque $0 < \alpha < 1$.

Studiamo ora il comportamento per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} x \ln x = +\infty, \tag{109}$$

onde $x \ln x$ è un infinito per $x \to +\infty$. Determiniamone l'ordine, assumendo come infinito di riferimento la funzione

$$v(x) = x \tag{110}$$

Ciò implica il calcolo del limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} \tag{111}$$

Distinguiamo i casi:

1. $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \tag{112}$$

2. $\alpha = 1$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \tag{113}$$

3. $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0 \tag{114}$$

Ne consegue che $x \ln x$ è un infinito (per $x \to +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. In fig. 11 riportiamo il grafico della funzione.

5.2 Scala di infiniti di ordine indeterminato

In questo numero introduciamo la nozione di *scala di infiniti* [**?**].

Per quanto precede, per $x \to +\infty$ la funzione $x \ln x$ è un infinito di ordine indeterminato. Precisamente, è un infinito di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. Consideriamo ora la seguente funzione

$$f(x) = x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \tag{115}$$

Risulta

$$\lim_{x\to +\infty} x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x = +\infty \tag{116}$$

Al solito, determiniamo l'ordine di infinito assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = x$. Pertanto

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} \tag{117}$$

Per calcolare tale limite distinguiamo i casi:

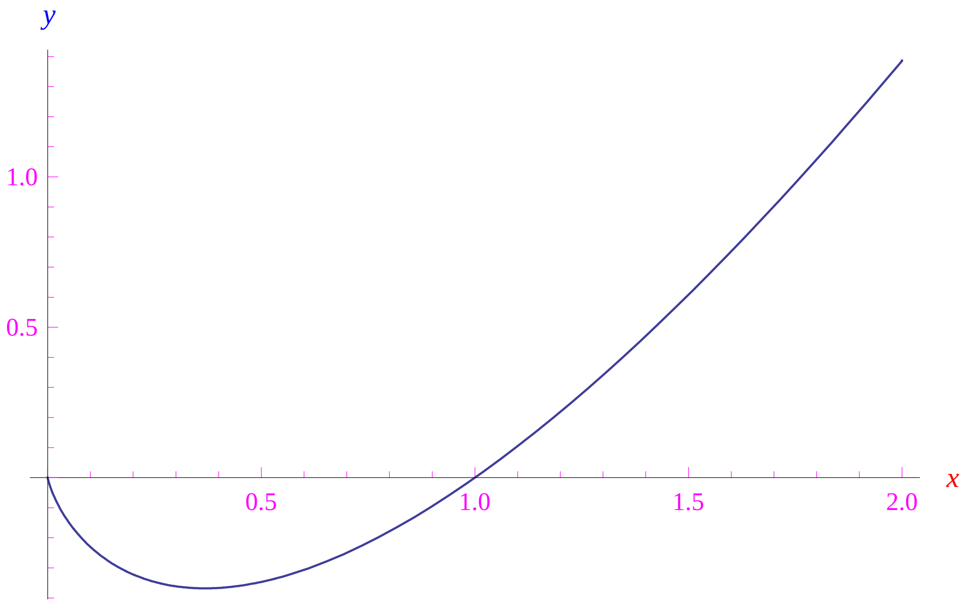


Figura 11: Per $x \to 0^+$ la funzione $x \ln x$ è un infinitesimo di ordine inferiore a 1, ma maggiore di un qualunque $0 < \alpha < 1$. Per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$.

1. $0 < \alpha < 1$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \tag{118}$$

2. $\alpha = 1$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \ln x \cdot \ln \ln x = +\infty \tag{119}$$

3. $\alpha > 1$

   Eseguiamo il cambio di variabile $t = \ln x$, per cui
$$x = e^t \Longrightarrow x^{\alpha - 1} = e^{\lambda t}, \qquad (\lambda = \alpha - 1 > 0) \tag{120}$$
   Segue
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha - 1}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t \ln t}{e^{\lambda t}} = 0, \tag{121}$$
   giacché $e^{\lambda t}$ è un infinito di ordine infinitamente grande.

Ne consegue che $x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x$ è un infinito (per $x \to +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. È istruttivo confrontare gli infiniti
$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x, \quad x \cdot \ln x \tag{122}$$
Risulta
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}{x \cdot \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \ln \ln x = +\infty, \tag{123}$$
cosicché $x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x$ è di ordine superiore a $x \cdot \ln x$.

Lo step successivo consiste nel "costruire" l'infinito:
$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x, \tag{124}$$

giungendo ai medesimi risultati precedente. Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x} = \lim_{x \to +\infty} \ln \ln \ln x = +\infty, \tag{125}$$

onde

$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x \tag{126}$$

è di ordine superiore a

$$x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \tag{127}$$

L'iterazione del procedimento restituisce la seguente *scala di infiniti di ordine indeterminato*:

$$\{x \cdot \ln x, x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x, x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x, ...\} \tag{128}$$

Tale insieme è infinito numerabile e ogni suo elemento è un infinito di ordine superiore al precedente.

5.3 Scala di infinitesimi di ordine indeterminato

In questo numero introduciamo la nozione di *scala di infinitesimi* [**?**]. Premettiamo il teorema:

Teorema 28

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ è un infinitesimo (in } x_0) \\ \text{di ordine } \alpha \text{ rispetto a } u(x) \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{1}{f(x)} \text{ è un infinito di ordine } \alpha \\ \text{rispetto a } \frac{1}{u(x)} \end{array}\right. \tag{129}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{[u(x)]^\alpha}} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha}} = \frac{1}{\ell} \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Consideriamo ora l'insieme i cui elementi sono le funzioni reciproche delle funzioni appartenenti alla scala di infiniti (**??**):

$$\left\{ \frac{1}{x \cdot \ln x}, \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}, \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \cdot \ln \ln \ln x}, ... \right\} \tag{130}$$

Per il teorema appena dimostrato si ha che ogni elemento di (130) è un infinitesimo (per $x \to +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}}{\frac{1}{x \cdot \ln x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln \ln x} = 0,$$

che si generalizza a ogni coppia di elementi successivi di (130). Ne consegue che ogni infinitesimo del predetto insieme è di ordine superiore al precedente. Chiamiamo tale insieme *scala di infinitesimi di ordine indeterminato.*

6 Parte principale di un infinitesimo

Siano dati gli infinitesimi (in x_0) $f(x)$ e $g(x)$ non identicamente nulli intorno a tale punto. Se $f(x)$ è di ordine α rispetto a $g(x)$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{131}$$

In tale ipotesi poniamo

$$\varepsilon(x)\overset{def}{=}\frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha}-\ell \tag{132}$$

Riesce

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha}-\lim_{x\to x_0}\ell=\ell-\ell=0, \tag{133}$$

cosicché $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo (in x_0). Da ciò segue che la funzione

$$r(x)\overset{def}{=}\varepsilon(x)[g(x)]^\alpha \tag{134}$$

è un infinitesimo di ordine maggiore di α rispetto a $g(x)$. Infatti:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{[g(x)]^\alpha}=\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0 \tag{135}$$

Tenendo conto della (132):

$$r(x)=f(x)-\ell[g(x)]^\alpha, \tag{136}$$

da cui

$$f(x)=\ell[g(x)]^\alpha+r(x) \tag{137}$$

Abbiamo così ricavato la *formula di decomposizione* di un infinitesimo. Sussiste la definizione

$$\ell[g(x)]^\alpha\overset{def}{=}\left(\begin{array}{c}\textbf{parte principale dell'infinitesimo } f(x)\\ \text{rispetto a } g(x)\end{array}\right. \tag{138}$$

In particolare se $g(x)$ è l'infinitesimo di riferimento $u(x)$, la formula di decomposizione diventa:

$$f(x)=\ell[u(x)]^\alpha+r(x) \tag{139}$$

Proposizione 29 *La parte principale di un infinitesimo di ordine α è a sua volta un infinitesimo di ordine α.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di parte principale. ■

Ne consegue che un qualunque infinitesimo di ordine α si decompone nella somma di una parte principale (di ordine α) e di un termine di ordine maggiore di α. In un intorno "sufficientemente piccolo" di x_0 è lecito trascurare il termine di ordine superiore $r(x)$. Cioè

$$f(x)\simeq\ell[u(x)]^\alpha,\qquad x\in X\cap(x_0-\delta,x_0+\delta), \tag{140}$$

essendo X l'insieme di definizione della funzione $f(x)$. Se $f(x)$ e $u(x)$ sono equivalenti, ovvero se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{u(x)}=1\Longrightarrow\alpha=1,\ \ell=1, \tag{141}$$

la formula di decomposizione si scrive:

$$f(x) = u(x) + r(x),$$

onde

$$f(x) \simeq u(x), \qquad x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{142}$$

In tal caso è consuetudine (specie nelle applicazioni) asserire che in un intorno di x_0 la funzione $f(x)$ "va come" $u(x)$.

Esempio 30 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + x}{2}\right), \tag{143}$$

il cui insieme di definizione è

$$X = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \tag{144}$$

Riesce

$$\lim_{x \to 1} \ln\left(\frac{x^2 + x}{2}\right) = \ln 1 = 0, \tag{145}$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 1$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x - 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right)}{(x-1)^\alpha} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)(x-1)^{\alpha - 1}}$$

Segue

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)(x-1)^{\alpha - 1}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 1 = 0$$

Cioè $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1. Abbiamo poi:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)(x-1)^{\alpha - 1}} \underset{\alpha=1}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1 + 2x}{(x^2 + x)} = \frac{3}{2},$$

cosicché gli infinitesimi $f(x)$ e $u(x)$ non sono equivalenti. L'infinitesimo assegnato si decompone in

$$\ln\left(\frac{x^2 + x}{2}\right) = \frac{3}{2}(x - 1) + r(x),$$

dove $r(x)$ è un termine di ordine superiore. Inoltre:

$$\ln\left(\frac{x^2 + x}{2}\right) \simeq \frac{3}{2}(x - 1), \qquad x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$$

Geometricamente significa che in un intorno del punto del diagramma cartesiano di $f(x)$, di ascissa

$$x \in (1 - \delta, 1 + \delta),$$

il diagramma medesimo può essere approssimato dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}(x - 1)$, come illustrato in fig. 12.

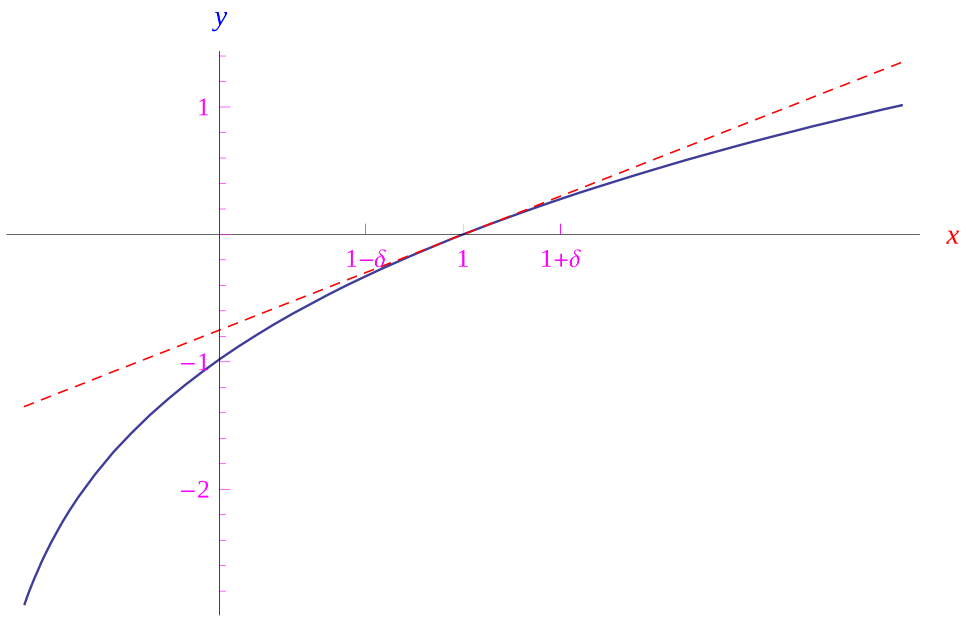


Figura 12: Per $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$ può essere approssimato dalla retta $y = \frac{3}{2}(x-1)$.

Esempio 31 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x \sin x \tag{146}$$

Riesce

$$\lim_{x \to 0} x \sin x = 0, \tag{147}$$

onde $f(x)$ *è un infinitesimo in* $x = 0$. *Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione* $u(x) = x$*:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^{\alpha-1}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 1 = 1 \Longleftrightarrow \alpha = 2 \tag{148}$$

Quindi $f(x)$ *è un infinitesimo del second'ordine. Risulta:*

$$\alpha = 2 \Longrightarrow \ell = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{149}$$

per cui la parte principale è

$$\ell [u(x)]^\alpha = x^2 \tag{150}$$

Pertanto l'infinitesimo assegnato si decompone in

$$x \sin x = x^2 + r(x), \tag{151}$$

ove $r(x)$ *è un infinitesimo di ordine maggiore di 2. La predetta decomposizione ha un'immediata interpretazione geometrica: in un intorno dell'origine il diagramma cartesiano della funzione è approssimato dalla parabola* $y = x^2$*, come illustrato in fig. 13*

Esempio 32 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \cos^2 x + x^2 - 1 \tag{152}$$

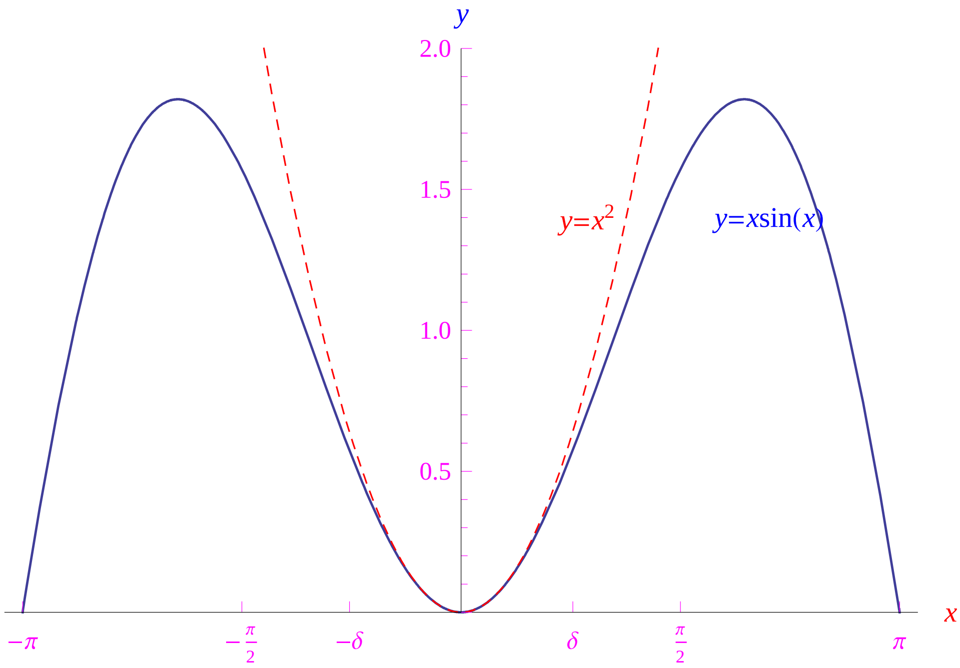


Figura 13: Per $x \in (-\delta, \delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = x \sin x$ può essere approssimato dalla parabola $y = x^2$.

Riesce

$$\lim_{x \to 0} \left(\cos^2 x + x^2 - 1 \right) = 0, \tag{153}$$

onde $f(x)$ *è un infinitesimo in* $x = 0$. *Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione* $u(x) = x$*:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x + x^2 - 1}{x^{\alpha - 1}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin 2x + 2x}{\alpha x^{\alpha - 1}} \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-2\cos 2x + 2}{\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}} \\ &= \frac{2}{\alpha(\alpha - 1)} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^{\alpha - 2}} \end{aligned} \tag{154}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2x$*:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \frac{2^{\alpha - 1}}{\alpha(\alpha - 1)} \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^{\alpha - 2}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 2 = 2 \Longleftrightarrow \alpha = 4$$

Quindi $f(x)$ *è un infinitesimo del quart'ordine. Risulta:*

$$\alpha = 4 \Longrightarrow \ell = \frac{2^3}{4 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \tag{155}$$

per cui la parte principale è

$$\ell [u(x)]^\alpha = \frac{1}{3} x^4 \tag{156}$$

Pertanto l'infinitesimo assegnato si decompone in

$$\cos^2 x + x^2 - 1 = \frac{1}{3} x^4 + r(x), \tag{157}$$

ove $r(x)$ *è un infinitesimo di ordine maggiore di 4. La predetta decomposizione ha un'immediata interpretazione geometrica: in un intorno dell'origine il diagramma cartesiano della funzione è approssimato dalla curva* $y = \frac{1}{3}x^4$*, come illustrato in fig. 14*

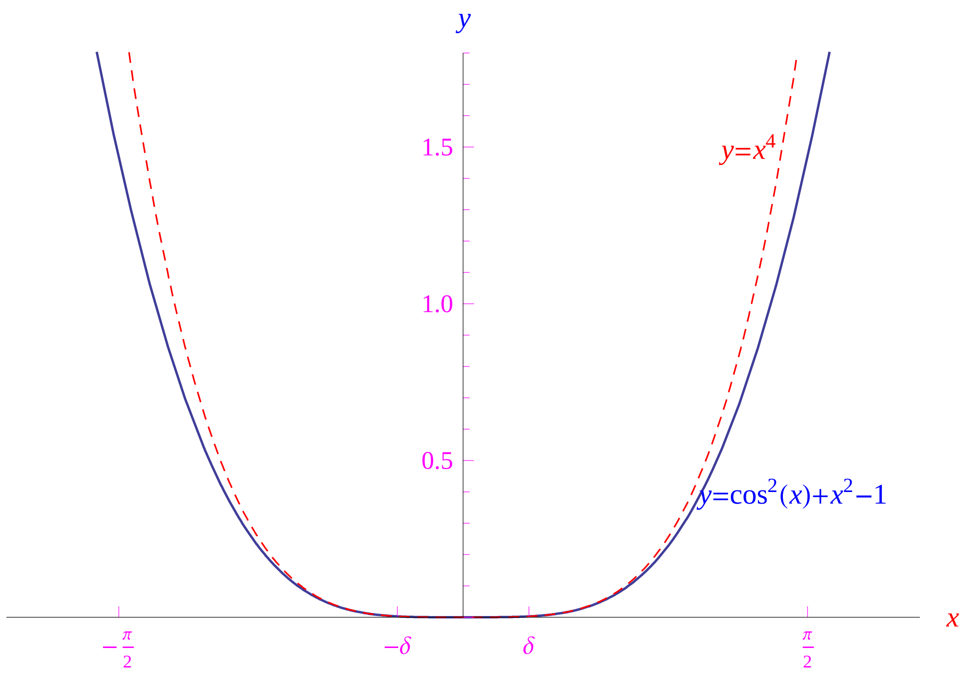


Figura 14: Per $x \in (-\delta, \delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = x \sin x$ può essere approssimato dalla curva $y = x^4$.

7 Parte principale di un infinito

Siano dati gli infiniti (in x_0) $f(x)$ e $g(x)$. Se $f(x)$ è di ordine α rispetto a $g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{158}$$

In tale ipotesi poniamo

$$\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} - \ell \tag{159}$$

Riesce

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0, \tag{160}$$

cosicché $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo (in x_0). Definiamo

$$r(x) \stackrel{def}{=} \varepsilon(x) [g(x)]^\alpha \tag{161}$$

Quindi

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0 \cdot \infty \tag{162}$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = +\infty \tag{163}$$

segue che $r(x)$ è un infinito di ordine minore di α (rispetto a $g(x)$). Infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{[g(x)]^\alpha} = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Tenendo conto della (159):

$$r(x) = f(x) - \ell [g(x)]^\alpha, \tag{164}$$

da cui

$$f(x) = \ell [g(x)]^\alpha + r(x) \tag{165}$$

Abbiamo così ricavato la *formula di decomposizione* di un infinito. Sussiste la definizione

$$\ell [g(x)]^\alpha \stackrel{def}{=} \left(\begin{array}{c} \textbf{parte principale dell'infinito } f(x) \\ \text{rispetto a } g(x) \end{array} \right. \tag{166}$$

In particolare se $g(x)$ è l'infinito di riferimento $v(x)$, la formula di decomposizione diventa:

$$f(x) = \ell [v(x)]^\alpha + r(x) \tag{167}$$

Proposizione 33 *La parte principale di un infinito di ordine α è a sua volta un infinito di ordine α.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ell [v(x)]^\alpha}{[v(x)]^\alpha} = \ell \tag{168}$$

Per la (158):

$$\ell \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Ne consegue che un qualunque infinito di ordine α si decompone nella somma di una parte principale (di ordine α) e di un termine $r(x)$ che se è un infinito, è di ordine maggiore di α. Se $f(x)$ e $v(x)$ sono equivalenti, ovvero se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{v(x)} = 1 \Longrightarrow \alpha = 1, \ \ell = 1, \tag{169}$$

la formula di decomposizione si scrive:

$$f(x) = v(x) + r(x) \tag{170}$$

Esempio 34 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \tag{171}$$

Riesce

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = +\infty, \tag{172}$$

onde $f(x)$ è un infinito in $x = 0$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = 1/|x|$. Sfruttando la parità $(+1)$ di $f(x)$ e $u(x)$ riferiamoci al limite destro:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 2} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 2 \tag{173}$$

Cioé $f(x)$ è un infinito del second'ordine. Risulta:

$$\alpha = 2 \Longrightarrow \ell = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1, \tag{174}$$

per cui la parte principale è

$$\ell [v(x)]^\alpha = \frac{1}{x^2}, \tag{175}$$

cosicchè la parte principale di $f(x)$ è la funzione medesima. Ciò implica che il termine $r(x)$ è la funzione identicamente nulla, come illustrato in fig. 15.

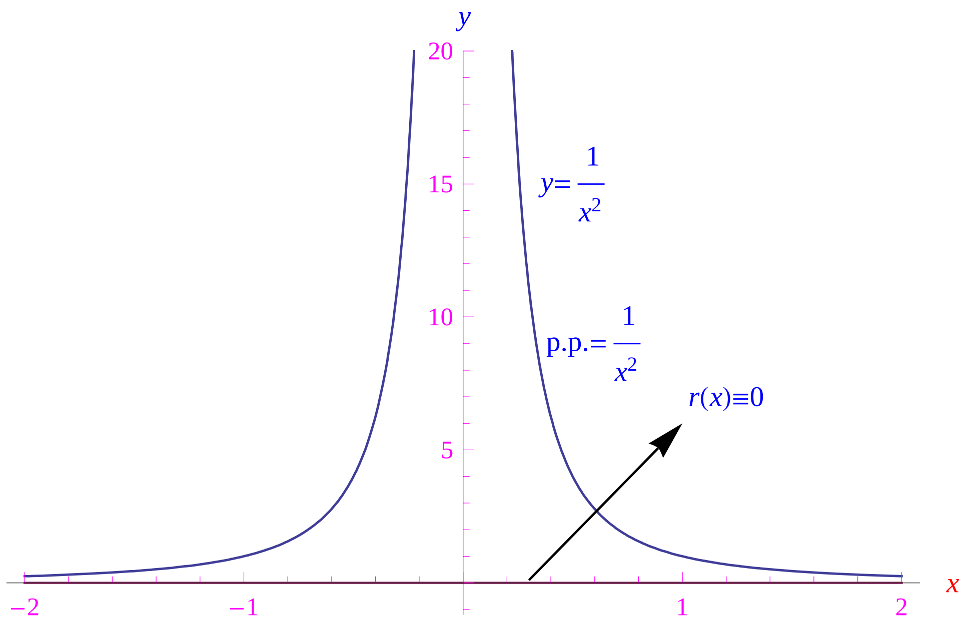


Figura 15: La parte principale dell'infinito $f(x) = 1/x^2$ è la funzione medesima.

Esempio 35 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \tan x \tag{176}$$

Riesce

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \tag{177}$$

onde $f(x)$ *è un infinito per* $x \to \frac{\pi}{2}^-$. *Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione* $v(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$. *Abbiamo*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cot x} \tag{178}$$

Anziché applicare la regola di De L'Hospital, eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} 0^+,$$

cosicché

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cot x} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} \tag{179}$$

Studiamone il comportamento al variare di α:

$$\alpha = 1 \Longrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = 1 \tag{180}$$

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\alpha - 1} \frac{t}{\tan t}\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\alpha - 1} \frac{t}{\tan t}\right) = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} \frac{t}{\tan t}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

Ne consegue che deve essere $\alpha = 1$ i.e. la funzione assegnata è un infinito del primo ordine, riuscendo:

$$\alpha = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = 1, \tag{181}$$

onde $f(x)$ e $u(x)$ sono infiniti equivalenti. La parte principale di $f(x)$ è

$$\ell [v(x)]^\alpha = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}, \tag{182}$$

per cui la decomposizione si scrive

$$\tan x = \underbrace{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}}_{p.p.} + \underbrace{\left(\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \right)}_{=r(x)} \tag{183}$$

Segue

$$\tan x \simeq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} \right) \tag{184}$$

L'andamento dei vari termini della decomposizione è illustrato in fig. 16.

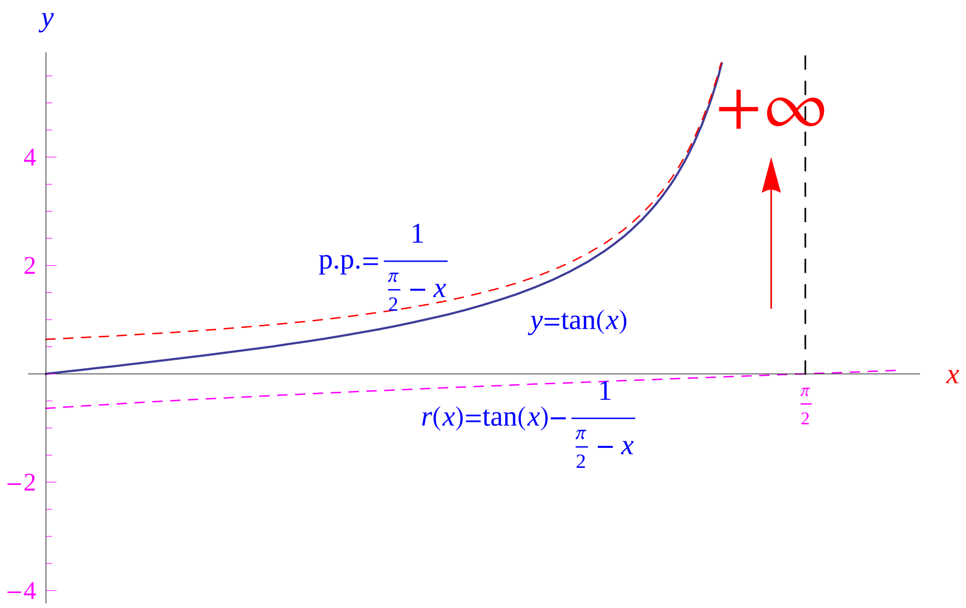


Figura 16: In un intorno sinistro di $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione $f(x) = \tan x$ è approssimata dalla sua parte principale $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$.

Esempio 36 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \tag{185}$$

Riesce

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{186}$$

onde $f(x)$ è un infinito per $x \to +\infty$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = x$. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \frac{1}{0 \cdot \infty} \tag{187}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{\pi}{2} - \arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+, \tag{188}$$

da cui

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t, \tag{189}$$

onde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\tan t)^\alpha}{t^{1/2}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \tag{190}$$

Ciò implica che $f(x)$ è un infinito di ordine $1/2$. Inoltre

$$\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \ell = 1 \tag{191}$$

Quindi la parte principale è

$$\ell [v(x)]^\alpha = \sqrt{x} \tag{192}$$

Segue

$$r(x) = f(x) - \ell [v(x)]^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} - \sqrt{x}, \tag{193}$$

che è un infinito di ordine minore di $1/2$. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}} - 1 \right) = 0 \tag{194}$$

La formula di decomposizione si scrive:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \underbrace{\sqrt{x}}_{p.p.} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} - \sqrt{x} \right)}_{r(x)} \tag{195}$$

Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \simeq \sqrt{x}, \qquad x \in (\delta, +\infty) \tag{196}$$

In altri termini, per $x \gg 1$ la funzione va come $\sqrt{x}$. Ciò è illustrato in fig. 17.

8 Proprietà e teoremi

Proposizione 37 *Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infinitesimi equivalenti (per $x \to x_0$).*

Se $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ è dotato di parte principale rispetto a $g(x)$, si ha che $f_{h\neq k}(x)$ è dotato di parte principale (rispetto a $g(x)$) e le due parti principali coincidono.

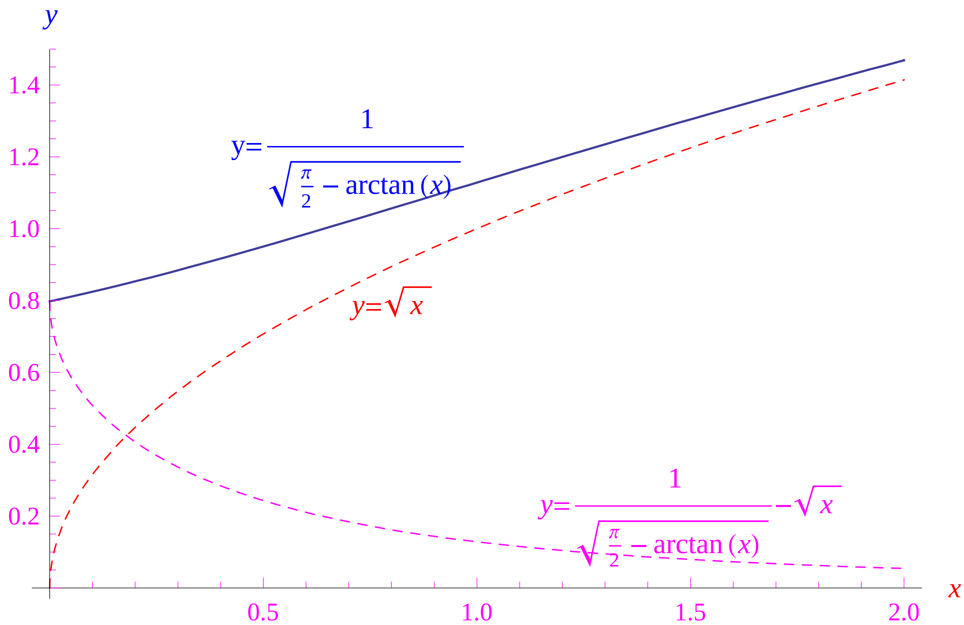


Figura 17: Decomposizione dell'infinito $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}$ per $x \to +\infty$.

Dimostrazione. Sia

$$f_1(x) = \ell_1 [g(x)]^{\alpha_1} + r_1(x), \tag{197}$$

cosicché

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \ell_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{198}$$

Per ipotesi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono equivalenti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 \tag{199}$$

Segue

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} \right\} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \ell_1 \tag{200}$$

Pertanto

$$f_2(x) = \ell_1 [g(x)]^{\alpha_1} + r_2(x), \tag{201}$$

onde l'asserto. ∎

Esempio 38 *Consideriamo gli infinitesimi in $x = 0$:*

$$f_1(x) = 2(1 - \cos x), \quad f_2(x) = x^2 \tag{202}$$

Tenendo conto del limite fondamentale

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

segue immediatamente

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1, \tag{203}$$

onde l'equivalenza degli infinitesimi assegnati. Determiniamo la parte principale di $f_1(x)$ rispetto all'infinitesimo $g(x) = \sin x$. Innanzitutto calcoliamone l'ordine:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} &= 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^{\alpha_1}} = 2\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(\sin x)^{\alpha_1}}\right] \\ &= \underbrace{2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{=1/2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{2/\alpha_1}}{\sin x}\right)^{\alpha_1} \\ &= \ell_1 \in \mathbb{R}-\{0\} \iff \alpha_1 = 2,\end{aligned}$$

cosicché $f_1(x)$ è del second'ordine rispetto a $g(x)$, ed ammette la seguente decomposizione:

$$2(1-\cos x) = \sin^2 x + r_1(x), \tag{204}$$

per cui

$$2(1-\cos x) \simeq \sin^2 x, \qquad x \in (-\delta, \delta) \tag{205}$$

Per la proposizione precedente:

$$x^2 = \sin^2 x + r_2(x) \tag{206}$$

Cioè

$$x^2 \simeq \sin^2 x \iff \sin^2 x \simeq x^2, \qquad x \in (-\delta, \delta) \tag{207}$$

I vari andamenti sono illustrati in fig. 18.

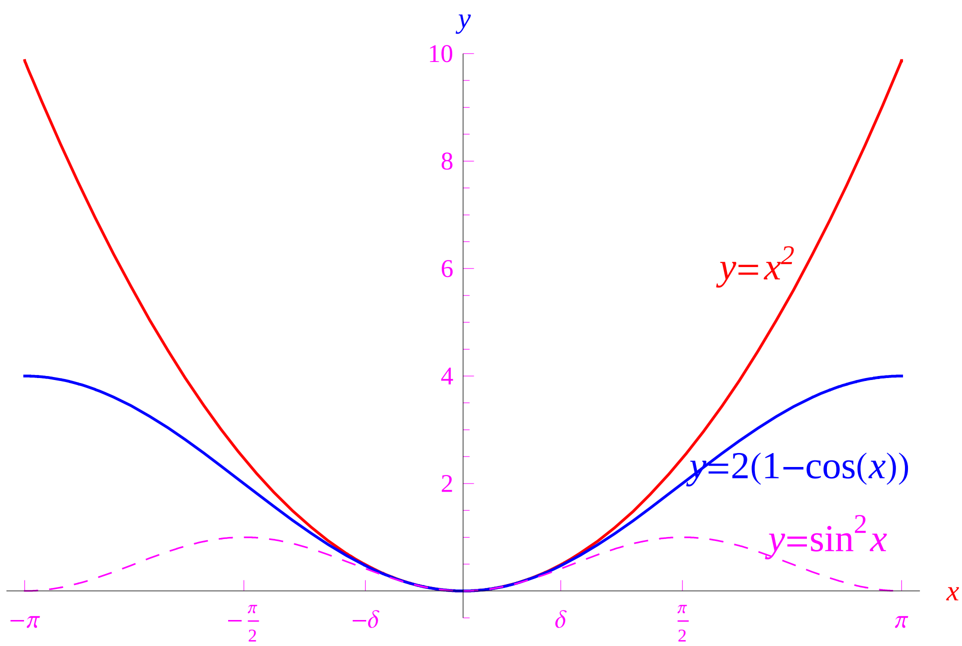


Figura 18: Le funzioni $f_1(x) = 2(1-\cos x)$ e $f_2(x) = x^2$ sono infinitesimi equivalenti per $x \to 0$. Pertanto hanno la stessa parte principale rispetto all'infinitesimo $g(x) = \sin x$. Geometricamente significa che i rispettivi grafici tendono a sovrapporsi in un intorno di $x = 0$.

***

Per gli infiniti si dimostra una proposizione analoga:

Proposizione 39 *Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti equivalenti (per $x \to x_0$).*

Se $f_k(x)$ $(k=1,2)$ è dotato di parte principale rispetto a $g(x)$, si ha che $f_{h\neq k}(x)$ è dotato di parte principale (rispetto a $g(x)$) e le due parti principali coincidono.

Esempio 40 *Consideriamo gli infiniti per $x \to +\infty$*

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{x} \tag{208}$$

Per quanto visto nell'esempio 36:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1,$$

onde l'equivalenza degli infiniti assegnati. Determiniamo la parte principale di $f_1(x)$ rispetto all'infinito

$$g(x) = x + \sin\frac{1}{x}$$

Innanzitutto calcoliamone l'ordine:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(x + \sin\frac{1}{x}\right)^{\alpha_1}\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \ell_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2},$$

cosicché $f_1(x)$ è di ordine $1/2$ rispetto a $g(x)$, riuscendo

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \ell_1 = 1 \tag{209}$$

Abbiamo pertanto la decomposizione:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}} + r_1(x), \tag{210}$$

con

$$\lim_{x \to +\infty} r_1(x) = 0 \tag{211}$$

Ciò implica

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \simeq \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}}, \qquad x \in (\delta, +\infty) \tag{212}$$

Per la proposizione precedente:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}} + r_2(x), \tag{213}$$

con

$$\lim_{x \to +\infty} r_2(x) = 0 \tag{214}$$

Cioè

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}}, \qquad x \in (\delta, +\infty) \tag{215}$$

I vari andamenti sono illustrati in fig. 19.

***

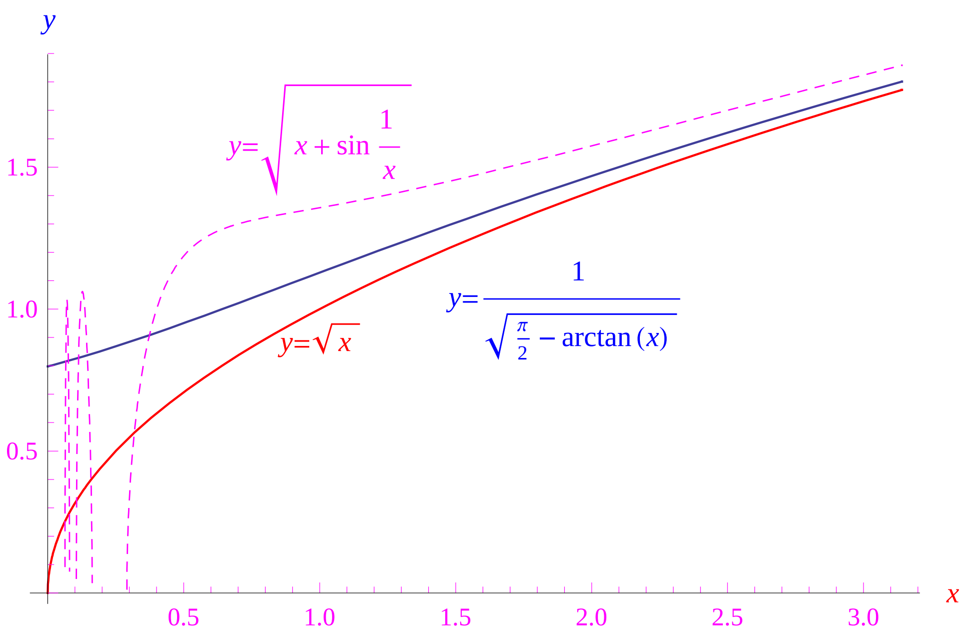


Figura 19: Le funzioni $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}$ e $f_2(x)=\sqrt{x}$ sono infiniti equivalenti per $x\to+\infty$. Pertanto hanno la stessa parte principale rispetto all'infinito $g(x)=\sqrt{x+\sin\frac{1}{x}}$. Geometricamente significa che i rispettivi grafici tendono a sovrapporsi in un intorno di $+\infty$.

Proposizione 41 *Siano dati $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ infinitesimi (in x_0) di ordine differente $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ rispetto a un infinitesimo di riferimento $u(x)$. La funzione*

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \tag{216}$$

è un infinitesimo (in x_0) di ordine

$$\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\} \tag{217}$$

Dimostrazione. La prima parte della proposizione è una conseguenza del teorema sul limite della somma di funzioni:

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x)=0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\lim_{x\to x_0} f_k(x)}_{=0}=0, \tag{218}$$

per cui $f(x)$ è un infinitesimo in x_0. Per dimostrare la seconda parte poniamo

$$\min\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}=\alpha_h, \quad h\in\{1,2,...,n\}$$

Segue

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to x_0}\frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} \tag{219}$$

Ma

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}}=\begin{cases}\ell_h\in\mathbb{R}-\{0\}, & \text{se } k=h\\ 0, & \text{se } k\neq h\end{cases}, \tag{220}$$

giacché $f_{k\neq h}(x)$ è di ordine maggiore di α_h. L'equazione precedente può essere inglobata nella delta di Kronecker:

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = h \\ 0, & \text{se } k \neq h \end{cases}, \tag{221}$$

ottenendo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \ell_k \delta_{hk} \tag{222}$$

Quindi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \sum_{k=1}^{n} \ell_k \delta_{hk} = l_h \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Siano

$$f_1(x) = \sin x, \ f_2(x) = \tan^2 x$$

Come è noto, si tratta di infinitesimi di ordine $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$ rispettivamente. Per la proposizione appena dimostrata si ha che

$$f(x) = \sin x + \tan^2 x$$

è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$. La fig. 20 riporta i vari andamenti.

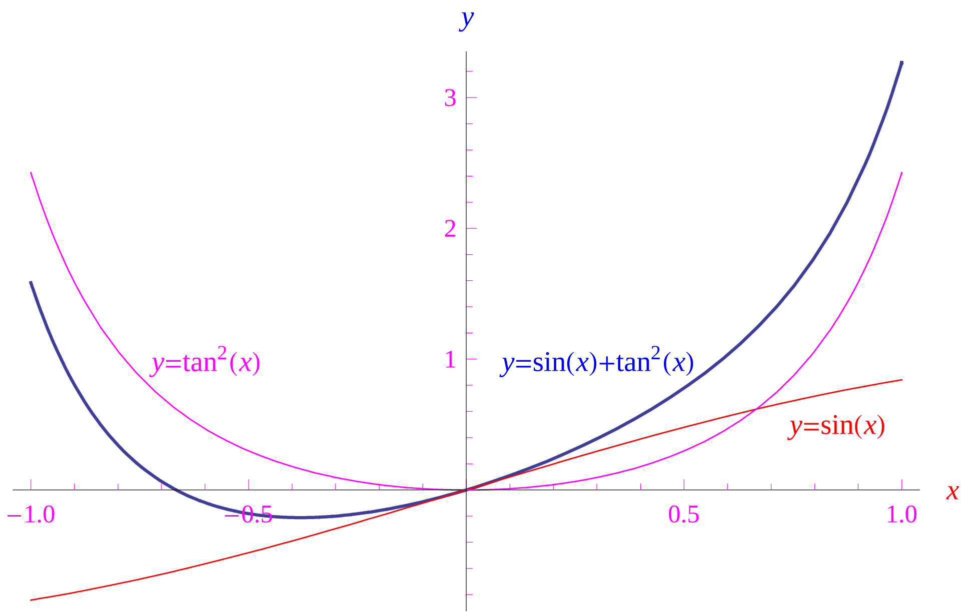


Figura 20: Le funzioni $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \tan^2 x$ sono iinfinitesimi in $x = 0$, di ordine rispettivamente 1 e 2. Pertanto la somma $f_1(x) + f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine 1.

Si badi che l'ipotesi del teorema precedente richiede

$$\alpha_k = \alpha_{k'}, \quad \forall k, k' \in \{1, 2, ..., n\}, \ k \neq k' \tag{223}$$

In altri termini gli infinitesimi $f_1(x), ..., f_n(x)$ hanno tutti ordine diverso. Ciò implica il seguente corollario:

Corollario 42 *La somma di n infinitesimi dello stesso ordine α è un infinitesimo di ordine non minore di α.*

Dimostrazione. Siano $f_1(x), ..., f_n(x)$ infinitesimi in x_0, per cui:

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = 0, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \ell_k \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (k = 1, ..., n), \tag{224}$$

dove $u(x)$ è l'infinitesimo di riferimento. Posto

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \tag{225}$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x \to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \ell_k$$

Ne consegue

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_k \neq 0 \Longrightarrow f(x) \text{ è di ordine } \alpha$$
$$\sum_{k=1}^{n} \ell_k = 0 \Longrightarrow f(x) \text{ è di ordine } \beta > \alpha,$$

onde l'asserto. ■

Esempio 43 *Siano dati gli infinitesimi (in $x = 0$)*

$$f_1(x) = 2(1 - \cos x), \; f_2(x) = x \sin x, \tag{226}$$

entrambi di ordine $\alpha = 2$. Consideriamo la loro somma

$$f(x) = 2(1 - \cos x) + x \sin x \tag{227}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x) + x \sin x}{x^2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2, \end{aligned} \tag{228}$$

onde $f(x)$ è dello stesso ordine di $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Se invece eseguiamo la differenza

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x), \tag{229}$$

si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} - \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

per cui $f_1(x) - f_2(x)$ è di ordine maggiore di 2. Per esplicitare l'ordine calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x^\beta} &= \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x) - x \sin x}{x^\beta} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\beta x^{\beta - 1}} \\ &= \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\beta(\beta - 1) x^{\beta - 2}} \\ &= \frac{1}{\beta(\beta - 1)} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^{\beta - 3}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \beta - 3 = 1, \end{aligned} \tag{230}$$

onde $g(x)$ è di ordine $\beta = 4$. Tali risultati sono graficati in fig. 21.

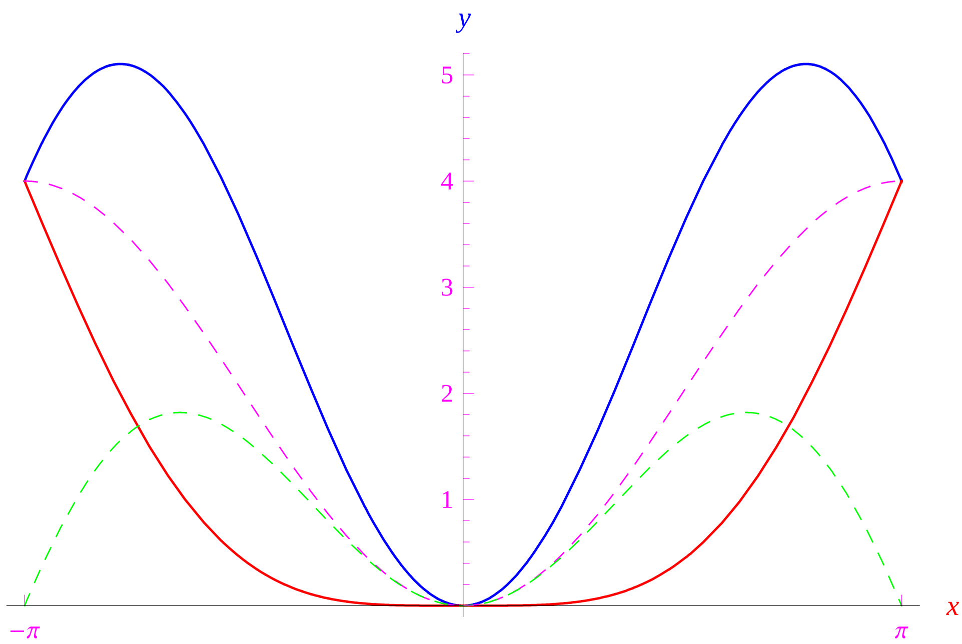


Figura 21: Le curve in tratteggio sono i grafici di $f_1(x) = 2(1 - \cos x)$ e $f_2(x) = x \sin x$. La curva in blue è il grafico della somma $f_1(x) + f_2(x)$, da cui vediamo che tale funzione è un infinitesimo dello stesso ordine di f_1 e f_2. La curva in rosso, invece, è il grafico della differenza, e vediamo che si tratta di un infinitesimo di ordine superiore a f_1 e f_2.

Proposizione 44 *Assegnate le funzioni $f_1(x), ..., f_n(x)$ tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = 0, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_k}} = \ell_k \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (k = 1, ..., n), \tag{231}$$

si ha

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x) \Longrightarrow \alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \tag{232}$$

essendo α l'ordine di infinitesimo di $f(x)$. In altri termini, l'ordine del prodotto di n infinitesimi è pari alla somma degli ordini dei singoli fattori.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_k(x)}{[u(x)]^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_k(x)}{\prod_{k=1}^{n} [u(x)]^{\alpha_k}} \tag{233}$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \lim_{x \to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_k}} = \prod_{k=1}^{n} \ell_k \neq 0,$$

onde l'asserto. ■

Esempio 45 *Siano*

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = 1 - \cos x, \tag{234}$$

per cui rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$, $f_1(x)$ è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine $\alpha_1 = 3$, mentre $f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha_2 = 2$. Per la proposizione precedente, l'infinitesimo

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) = x^3 (1 - \cos x) \tag{235}$$

è di ordine $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 5$.

9 Calcolo di limiti con il Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]

Il Principio di sostituzione degli infinitesimi può essere utilizzato nel calcolo di limiti di funzioni che presentano indeterminazione.

Esempio 46 *Calcoliamo*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} + (1 - \cos^3 x)^2}{\tan^3 (\arcsin x) + \left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1 + 3x)} \tag{236}$$

Numeratore e denominatore sono manifestamente infinitesimi in $x = 0$, onde il loro rapporto da luogo alla forma indeterminata $0/0$. Determiniamo l'ordine dei singoli addendi. A tale scopo osserviamo che tenendo conto del limite fondamentale

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \tag{237}$$

si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^{2x} - 1}{x} \underset{t = 2x}{=} 2 \lim_{t \to 0} \frac{5^t - 1}{t} = 2 \ln 5, \tag{238}$$

per cui $5^{2x} - 1$ è del primo ordine rispetto a x. Più specificatamente, sussiste l'equivalenza tra infinitesimi:

$$5^{2x} - 1 \sim 2x \ln 5 \tag{239}$$

Per quanto riguarda la funzione arctan *sappiamo che*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \Longrightarrow \arctan x \sim x \tag{240}$$

Perciò

$$\arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} \underset{t = \sqrt{5^{2x} - 1}}{=} (\arctan t)^2 \sim t^2 = 5^{2x} - 1 \sim 2x \ln 5 \tag{241}$$

Segue

$$x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} \sim 2x^2 \ln 5 \tag{242}$$

In altri termini il primo addendo a numeratore è un infinitesimo del secondo ordine. Passiamo al secondo addendo

$$\left(1 - \cos^3 x\right)^2 = (1 - \cos x)^2 \left(1 + \cos x + \cos^2 x\right)^2 \tag{243}$$

È chiaro che dobbiamo calcolare l'ordine di $1 - \cos^3 x$ per poi applicare il teorema del prodotto di infinitesimi. Quindi scriviamo

$$1 - \cos^3 x = (1 - \cos x) \left(1 + \cos x + \cos^2 x\right) \tag{244}$$

Ossia $1-\cos^3 x$ *si fattorizza nel prodotto dell'infinitesimo* $1-\cos x$ *(del second'ordine) per un termine che converge a* 3. *Perciò* $1-\cos^3 x$ *è del second'ordine e il suo quadrato è del quart'ordine. Tutto ciò implica che a numeratore possiamo trascurare* $(1-\cos^3 x)^2$. *Passiamo ora al denominatore, il cui primo addendo è*

$$\tan^3(\arcsin x) \tag{245}$$

Cambiamo la variabile in $t = \arcsin x$:

$$\tan^3(\arcsin x) = (\tan t)^3$$

Ma $\tan t$ *è del primo ordine* $\Longrightarrow \tan^3(\arcsin x)$ *è del terzo ordine. Il secondo addendo è apparentemente più complicato*

$$\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x) \tag{246}$$

Dal limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\lambda-1}{x} = \lambda \tag{247}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[5]{(1+x)^4}}{x} = -\frac{4}{5},$$

onde $1-\sqrt[5]{(1+x)^4}$ *è del primo ordine. L'altro termine*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} \underset{t=3x}{=} 3\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \tag{248}$$

Quindi $\ln(1+3x)$ *è del primo ordine. Per il teorema del prodotto*

$$\underbrace{\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]}_{\textit{ordine } 1}\underbrace{\ln(1+3x)}_{\textit{ordine } 1} \Longrightarrow \textit{ è di ordine } 2 \tag{249}$$

Questo significa che a denominatore possiamo trascurare $\tan^3(\arcsin x)$. *Allora per il Principio di sostituzione degli infinitesimi si ha:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}}{\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x)} \tag{250}$$

Si tratta ora di sostituire i singoli infinitesimi con le rispettive parti principali. Abbiamo visto che

$$x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1} \sim 2x^2\ln 5$$

Inoltre

$$\left.\begin{array}{c} 1-\sqrt[5]{(1+x)^4} \sim -\frac{4}{5}x \\ \ln(1+3x)\sim 3x \end{array}\right) \Longrightarrow \left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x) \sim -\frac{12}{5}x^2$$

Finalmente

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\arctan^2\sqrt{5^{2x}-1}}{\left[1-\sqrt[5]{(1+x)^4}\right]\ln(1+3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2\ln 5}{-\frac{12}{5}x^2} = -\frac{5}{6}\ln 5 \tag{251}$$

Esempio 47 *Calcoliamo*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x\arctan x+\sin x}{x\sqrt{x^2+5x+6}+x^2-3x} \tag{252}$$

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. *A numeratore abbiamo* x^2 *che è un infinito del secondo ordine rispetto all'infinito di riferimento* $u(x)=x$. *Determiniamo l'ordine di infinito* $x\arctan x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\arctan x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

per cui $x\arctan x$ *è del primo ordine e come tale trascurabile rispetto a* x^2. *L'altro addendo* $\sin x$ *è non regolare per* $x\to+\infty$, *ma è limitato, cosicché possiamo trascurararlo. Passiamo a denominatore. Qui vediamo che*

$$\sqrt{x^2+5x+6},\ x^2 \tag{253}$$

sono manifestamente infiniti del secondo ordine, per cui possiamo trascurare l'addendo $-3x$. *Possiamo poi svincolarci dalla radice osservando che*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x^2+5x+6}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}}{x^2}=1 \tag{254}$$

Cioè

$$x\sqrt{x^2+5x+6}\sim x^2 \tag{255}$$

In definitiva il limite proposto diventa:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2} \tag{256}$$

9.1