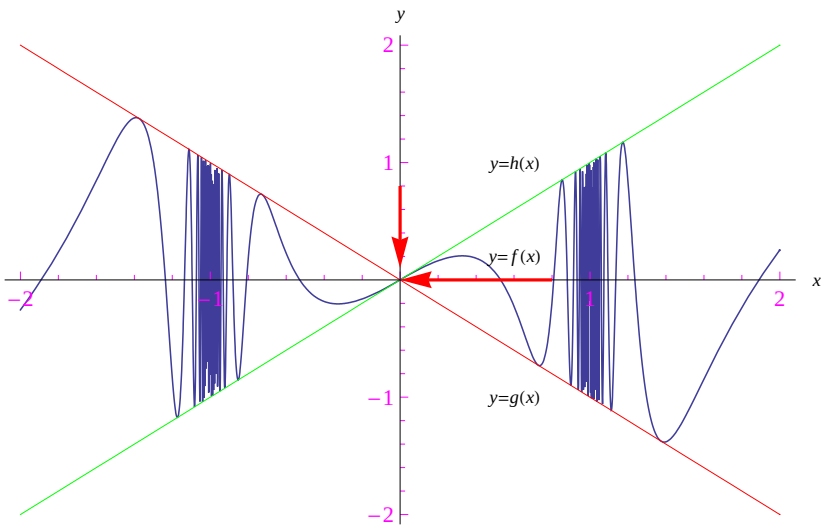
MATEMATICA OPEN SOURCE – HTTP://WWW.EXTRABYTE.INFO
Quaderni di Analisi Matematica – 2021

Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Esercizi svolti sui limiti

Marcello Colozzo



Indice

1 Limite di una funzione reale di una variabile reale **3**
- 1.1 Definizione di limite . . . 3
- 1.2 Limiti di funzioni razionali fratte . . . 8
- 1.3 Limiti di funzioni irrazionali . . . 19
  - 1.3.1 Forma indeterminata $\frac{0}{0}$ . . . 19
  - 1.3.2 Forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $0 \cdot \infty$ . . . 23
  - 1.3.3 Forma indeterminata $\infty - \infty$. Fattore razionalizzante . . . 26
- 1.4 Esercizi di riepilogo (funzioni razionali fratte e irrazionali) . . . 37
- 1.5 Limiti di funzioni trigonometriche . . . 41

2 La regola di De L'Hospital **88**
- 2.1 Introduzione . . . 88
- 2.2 Esercizi svolti . . . 91

3 Limiti delle funzioni trigonometriche inverse **96**
- 3.1 Introduzione . . . 96
- 3.2 Esercizi svolti . . . 96

4 Limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche **109**
- 4.1 Introduzione . . . 109
- 4.2 Le forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0 . . . 118
- 4.3 Esercizi svolti . . . 121
  - 4.3.1 Complementi . . . 124

5 Limiti delle funzioni iperboliche e delle funzioni iperboliche inverse **174**
- 5.1 Introduzione . . . 174
- 5.2 Esercizi svolti . . . 178

6 Infinitesimi ed infiniti **183**
- 6.1 Definizioni . . . 183
- 6.2 Infinitesimi confrontabili. Il concetto di ordine . . . 184
- 6.3 Infiniti confrontabili. Il concetto di ordine . . . 188
- 6.4 Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti] . . . 191
- 6.5 Infinitesimi ed infiniti non dotati di ordine . . . 196
- 6.6 Parte principale di un infinitesimo . . . 204
- 6.7 Parte principale di un infinito . . . 208
- 6.8 Proprietà e teoremi . . . 212
- 6.9 Calcolo di limiti con il Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti] . . . 220
- 6.10 Esercizi svolti . . . 222

7 Esercizi di riepilogo **228**

8 Applicazioni geometriche **321**
8.1 Esercizi svolti 321

A Esercizi particolari **327**
A.1 Specificare la topologia dello spazio in cui si lavora 327

B Formule trigonometriche **328**
B.1 Formule di addizione e sottrazione 328
B.2 Formule di duplicazione 328
B.3 Formule di bisezione 328
B.4 Formule di prostaferesi 328
B.5 Formule parametriche 329

C Funzioni ricorsivamente convergenti **330**
C.1 Definizioni 330
Bibliografia 334

Capitolo 1

Limite di una funzione reale di una variabile reale

1.1 Definizione di limite

Esercizio 1 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \frac{x+2}{x},$$

provare che

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 3 \tag{1.1}$$

Soluzione. La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Applichiamo la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X,\ 0 < |x-1| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{x+2}{x} - 3 \right| < \varepsilon$$

Deve essere:

$$\left| \frac{x+2}{x} - 3 \right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left| \frac{2(1-x)}{x} \right| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < \frac{2(1-x)}{x} < \varepsilon$$

Abbiamo dunque il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{2(1-x)}{x} < \varepsilon \\ \frac{2(1-x)}{x} > -\varepsilon \end{cases} \tag{1.2}$$

Se S è l'insieme delle soluzioni di $\left|\frac{2(1-x)}{x}\right| < \varepsilon$, si ha:

$$S = S_1 \cap S_2,$$

dove S_k è l'insieme delle soluzioni della *k-esima* disequazione ($k = 1, 2$) del sistema (1.2). Risolviamo la prima:

$$\frac{2(1-x)}{x} < \varepsilon \Longleftrightarrow x \in S_1 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{2+\varepsilon}, +\infty \right)$$

La seconda:

$$\frac{2(1-x)}{x} > -\varepsilon \Longleftrightarrow x \in S_2 = \left(0, \frac{2}{2-\varepsilon} \right), \quad \forall \varepsilon \in (0, 2)$$

Quindi

$$S = \left(\frac{2}{2+\varepsilon}, \frac{2}{2-\varepsilon} \right), \quad \forall \varepsilon \in (0,2)$$

Perciò:

$$\frac{2}{2+\varepsilon} < x < \frac{2}{2-\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{2}{2+\varepsilon} - 1 < x - 1 < \frac{2}{2-\varepsilon} - 1$$
$$\Longleftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \in (0,2)$$

$\forall \varepsilon \in (0,2)$:

$$-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < -\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$$
$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ -\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-1| < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ |x-1| < \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \end{array} \right.$$

Assumiamo

$$\delta_\varepsilon = \min_{\varepsilon \in (0,2)} \left\{ \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \right\} = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon},$$

cosicchè:

$$\forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon} \mid x \in X, \, 0 < |x-1| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \frac{x+2}{x} - 3 \right| < \varepsilon \, , \tag{1.3}$$

onde la (1.1). La (1.3) è rappresentata graficamente nel diagramma di fig. 1.1.

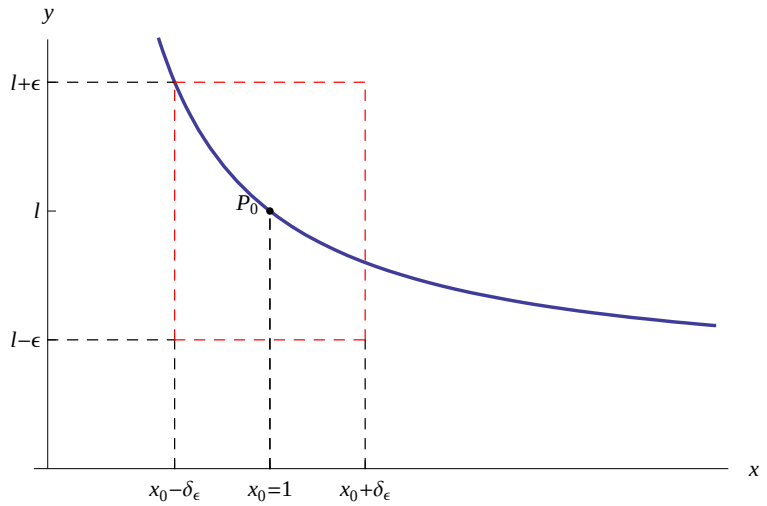


Figura 1.1: Risulta: $\forall J_\varepsilon (3) = (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, $\exists I_{\delta_\varepsilon} (1) = (1-\delta_\varepsilon, 1+\delta_\varepsilon) \mid x \in I_{\delta_\varepsilon} (1) \setminus \{1\} \Longrightarrow (x, f(x)) \in \mathcal{R} = I_{\delta_\varepsilon} (1) \times J_\varepsilon (3)$. La regione $\mathcal{R}$ è il rettangolo centrato in $P_0 (1,3)$. In realtà, il bordo andrebbe tratteggiato in quanto $\mathcal{R}$ è un insieme aperto. Abbiamo utilizzato la linea non tratteggiata per ragioni didattiche.

Esercizio 2 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = x^2,$$

provare che

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \tag{1.4}$$

Soluzione. Applichiamo la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-2| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$$

Dobbiamo quindi risolvere la disequazione:

$$\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon, \tag{1.5}$$

o ciò che è lo stesso, il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 4 < \varepsilon \\ x^2 - 4 > -\varepsilon \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della prima è $S_1 = \left(-\sqrt{4+\varepsilon}, -\sqrt{4+\varepsilon}\right)$, mentre l'insieme delle soluzioni della seconda è $S_2 = \left(-\infty, -\sqrt{4-\varepsilon}\right) \cup \left(\sqrt{4-\varepsilon}, +\infty\right)$ a patto che sia $\varepsilon \in (0,4)$. Quindi le soluzioni della (1.5) sono

$$x \in S = S_1 \cap S_2 = \left(\sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon}\right),\ \ \forall \varepsilon \in (0,4)$$

Quindi:

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon} \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon,$$

come mostrato in fig. 1.2. Dobbiamo, dunque, assegnare $\delta_\varepsilon > 0$ tale che:

$$\begin{cases} 2 + \delta_\varepsilon < \sqrt{4+\varepsilon} \\ 2 - \delta_\varepsilon > \sqrt{4-\varepsilon} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_\varepsilon < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 \\ \delta_\varepsilon < 2 - \sqrt{4-\varepsilon} \end{cases}$$

Cioè:

$$0 < \delta_\varepsilon = \min\left\{\sqrt{4+\varepsilon} - 2, 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\right\} = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$$

Concludiamo che:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon = \sqrt{4+\varepsilon} - 2 \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-2| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left|x^2 - 4\right| < \varepsilon,$$

cioè la (1.4).

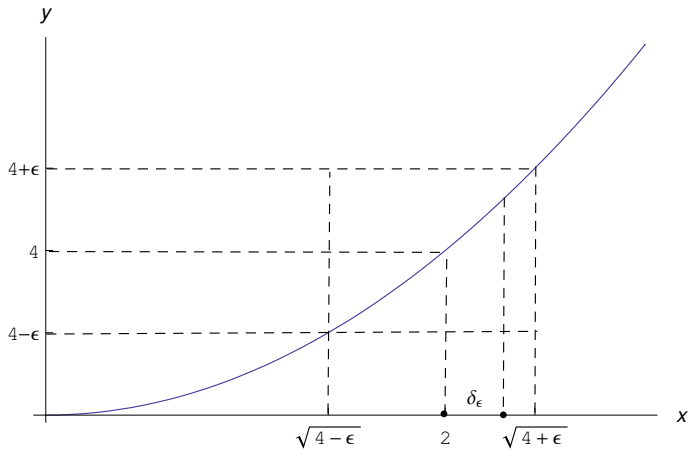


Figura 1.2: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = x^2$.

Esercizio 3 *Verificare*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 15x - 14}{x - 2} = 3 \tag{1.6}$$

Soluzione
Dobbiamo risolvere

$$\left|\frac{x^3-6x^2+15x-14}{x-2}-3\right|<\varepsilon, \quad \forall x\neq 2$$

Sviluppiamo l'argomento del valore assoluto:

$$\frac{x^3-6x^2+15x-14}{x-2}-3=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}=(x-2)^2, \quad \forall x\neq 2$$

per cui

$$\forall x\neq 2,\ \left|(x-2)^2\right|<\varepsilon \Longleftrightarrow (x-2)^2<\varepsilon \Longleftrightarrow \forall x\neq 2,\ -\sqrt{\varepsilon}<x-2<\sqrt{\varepsilon}$$
$$\Longleftrightarrow 0<|x-2|<\sqrt{\varepsilon}$$

Ne consegue

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}\mid 0<|x-2|<\sqrt{\varepsilon},\ \left|\frac{x^3-6x^2+15x-14}{x-2}-3\right|<\varepsilon$$

e quindi la (1.6). In Fig. 1.3 il grafico della funzione in un intorno di $x=2$, dopo aver osservato che

$$f(x)\overset{def}{=}\frac{x^3-6x^2+15x-14}{x-2}=x^2-4x+7,\ \ \forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$$

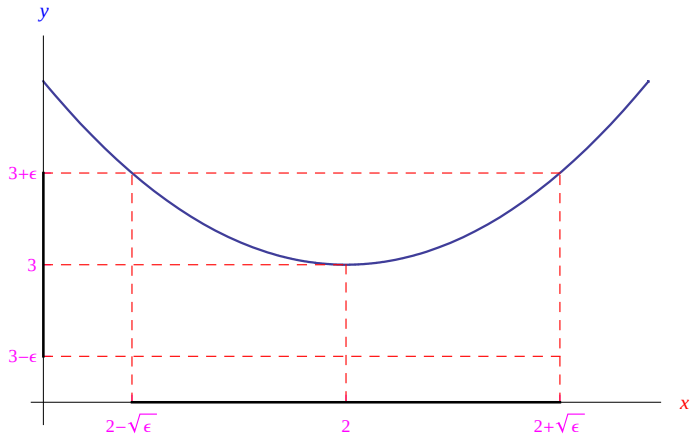


Figura 1.3: Interpretazione geometrica (esercizio 3).

Esercizio 4 *Verificare*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2-x+3}{x-3}=8 \tag{1.7}$$

Soluzione
Dopo aver posto

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2-x+3}{x-3} \tag{1.8}$$

Dobbiamo risolvere

$$\left|\frac{x^3-3x^2-x+3}{x-3}-8\right|<\varepsilon, \quad \forall x\neq 3$$

Sviluppiamo l'argomento del valore assoluto:

$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x-3}-8=\frac{x^3-3x^2-9x+27}{x-3}=x^2-9,\quad \forall x\neq 3$$

per cui

$$\forall x\neq 3,\ \left|x^2-9\right|<\varepsilon \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-9>-\varepsilon \\ x^2-9<\varepsilon \end{cases},\ x\neq 3 \tag{1.9}$$

Risolviamo la prima disequazione:

$$x^2>9-\varepsilon \Longleftrightarrow x\in S_1=\left(-\infty,-\sqrt{9-\varepsilon}\right)\cup\left(\sqrt{9-\varepsilon},+\infty\right)$$

Risolviamo la seconda disequazione:

$$x^2<9+\varepsilon \Longleftrightarrow x\in S_2=\left(-\sqrt{9+\varepsilon},\sqrt{9+\varepsilon}\right)$$

da cui l'insieme delle soluzioni di (1.9):

$$S=S_1\cap S_2=\left(-\sqrt{9+\varepsilon},-\sqrt{9-\varepsilon}\right)\cup\left[\left(\sqrt{9-\varepsilon},\sqrt{9+\varepsilon}\right)-\{3\}\right]$$

In altri termini, affinché sia $|f(x)-8|<\varepsilon$, deve essere $x\in S$. Nel caso in esame, è sufficiente assumere $x\in\left(\sqrt{9-\varepsilon},\sqrt{9+\varepsilon}\right)-\{3\}$. Abbiamo quindi, un intorno di $x_0=3$ di ampiezza $\sqrt{9+\varepsilon}-\sqrt{9-\varepsilon}$ e raggio $\delta_\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\sqrt{9+\varepsilon}-\sqrt{9-\varepsilon}\right)$. Quindi

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\sqrt{9+\varepsilon}-\sqrt{9-\varepsilon}\right)>0\mid 0<|x-3|<\varepsilon\Longrightarrow\\ &\Longrightarrow\left|\frac{x^3-3x^2-x+3}{x-3}-8\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

Cioè la (1.7). In Fig. 1.4 il grafico della funzione in un intorno di $x=2$, dopo aver osservato che

$$f(x)=x^2-1,\ \ \forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$$

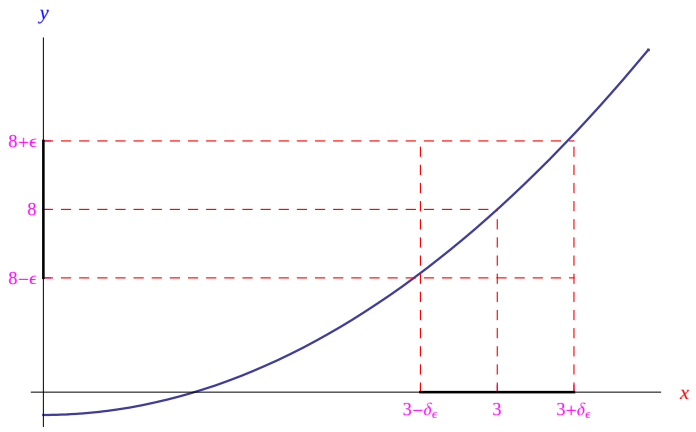


Figura 1.4: Interpretazione geometrica (esercizio 4).

1.2 Limiti di funzioni razionali fratte

Rapporti che non si presentano in forma indeterminata

Esercizio 5 *Calcolare:*

$$\boxed{\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}} \tag{1.10}$$

Soluzione

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25} = \frac{25-25+10}{25-25} = \frac{10}{0}$$

Dobbiamo distinguere i due casi: $x \to 5^-$, $x \to 5^+$, cioè determinare il limite destro e il limite sinistro. È conveniente studiare il segno del denominatore in un intorno di $x_0 = 5$.

$$x^2 - 25 > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)\,,$$

onde:

$$\lim_{x\to 5^-} \left(x^2-25\right) = 0^-, \quad \lim_{x\to 5^+} \left(x^2-25\right) = 0^+,$$

per cui

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

Ne concludiamo che la funzione $\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$ è divergente negativamente a sinistra di $x_0 = 5$, e divergente positivamente a destra. Ciò è illustrato nel grafico di fig. 1.5.

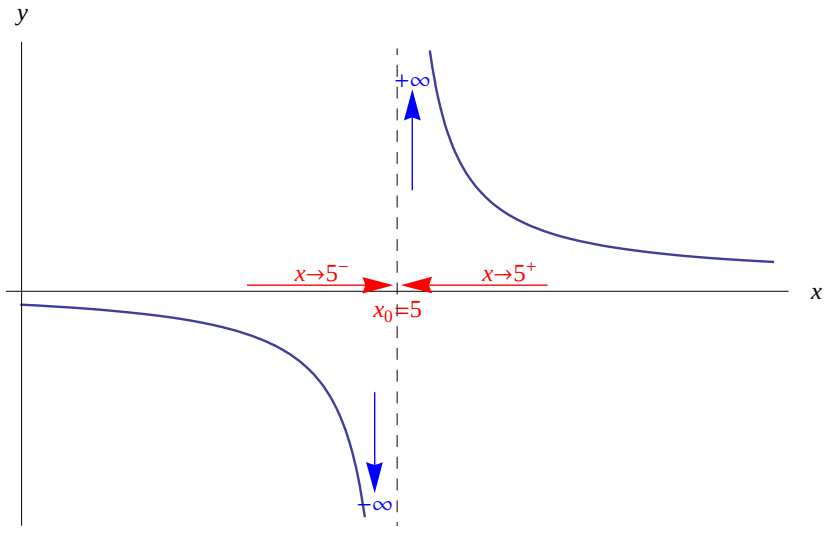


Figura 1.5: La retta verticale $x = 5$ è asintoto verticale per il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

Esercizio 6 *Calcolare:*

$$\boxed{\lim_{x\to -2} \frac{x^2+20x-7}{4-x^2}} \tag{1.11}$$

Soluzione

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+20x-7}{4-x^2}=\frac{4-40-7}{4-4}=-\frac{43}{0}$$

Dobbiamo procedere come nell'esercizio precedente, ossia distinguere i due casi: $x\to -2^-,\ x\to -2^+$. Studiamo perciò il segno del denominatore in un intorno di $x_0=-2$.

$$4-x^2>0\Longleftrightarrow x^2-4<0\Longleftrightarrow x\in(-2,2)\,,$$

onde:

$$\lim_{x\to -2^-}\left(4-x^2\right)=0^-,\quad \lim_{x\to -2^+}\left(4-x^2\right)=0^+,$$

per cui

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2+20x-7}{4-x^2}=-\frac{43}{0^-}=-\left(-\infty\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^2+20x-7}{4-x^2}=-\frac{43}{0^+}=-\left(+\infty\right)=-\infty$$

Ne concludiamo che la funzione $\frac{x^2+20x-7}{4-x^2}$ è divergente positivamente a sinistra di $x_0=-2$, e divergente negativamente a destra.

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Esercizio 7 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}} \tag{1.12}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione osserviamo che:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$
$$x^2+x-6=(x+3)(x-2)\,,$$

onde:

$$\lambda=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{5}$$

Esercizio 8 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3+5x^2+8x+4}} \tag{1.13}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione osserviamo che:

$$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$$
$$x^3+5x^2+8x+4=(x+2)^2(x+1)\,,$$

cosicchè:

$$\lambda=\lim_{x\to -2}\frac{x-3}{(x+1)(x+2)}=\frac{-5}{(-1)\cdot 0}=\frac{5}{0}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-3}{(x+1)(x+2)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata è divergente negativamente a sinistra di $x_0 = -2$, e divergente positivamente a destra di $x_0 = 2$.

Esercizio 9 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 8}} \tag{1.14}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:

$$x^4 - 8x^2 + 16 = \left(x^2 - 4\right)^2 = (x-2)^2 (x+2)^2$$
$$x^3 - 8 = (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right),$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)^2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{0 \cdot 16}{4+4+4} = 0$$

Esercizio 10 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}} \tag{1.15}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:

$$x^2 - 2x = x(x-2)$$
$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2,$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0}$$

Occorre dunque stabilire il segno del rapporto $f(x) = \frac{x}{x-2}$. Risulta:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Esercizio 11 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}} \tag{1.16}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 (x+2)$$
$$x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2 \left(x^2 + 2x + 3\right),$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 12 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}} \tag{1.17}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere tale indeterminazione procediamo come segue:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1),$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

Esercizio 13 *Sia data una funzione $f(y)$ la cui espressione analitica è il risultato della seguente operazione di passaggio al limite:*

$$\boxed{f(y) = \lim_{x\to y} \frac{x^2 - (y+1)x + y}{x^3 - y^3}} \tag{1.18}$$

Dopo aver determinato $f(y)$, calcolare:

$$\lim_{y\to 0} f(y)$$

Soluzione

Il limite a secondo membro della (1.18) si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che può essere rimossa con il solito procedimento, ovvero riducendo in fattori numeratore e denominatore, per poi semplificare. Abbiamo:

$$x^2 - (y+1)x + y = (x-1)(x-y), \quad x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$$

Sostituendo nella (1.18):

$$\begin{aligned} f(y) &= \lim_{x\to y} \frac{x-1}{x^2+xy+y^2} \\ &= \frac{y-1}{y^2+y^2+y^2} \\ &= \frac{y-1}{3y^2} \end{aligned}$$

Ne consegue

$$\lim_{y\to 0} f(y) = -\frac{1}{3} \lim_{y\to 0} \frac{1-y}{y^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{0^+}\right) = -(+\infty) = -\infty$$

Cioè $f(y)$ diverge negativamente per $y \to 0$. Come possiamo risolvere tale problema con Mathematica? Per rispondere a questa domanda, cerchiamo di elaborare una routine che accetta una generica funzione di due variabili $f_1(x, y)$ tale che $f_1(y, y)$ dà luogo alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui:

$$f(y) = \lim_{x \to y} f(x, y)$$

La routine può essere prelevata al seguente link.

Esercizio 14 *Calcolare:*

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}} \tag{1.19}$$

Soluzione. Risulta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{0}{0}$$

Sviluppando il numeratore e semplificando:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

Esercizio 15 *Calcolare:*

$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}} \tag{1.20}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Riesce:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 4 &= (x+1)(x-2)^2 \\ x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= (x-2)^2 (x+1), \end{aligned}$$

per cui:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$$

Esercizio 16 *Calcolare*

$$\boxed{\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}} \tag{1.21}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Riesce:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\ x^2 + 3x + 2 &= (x+1)(x+2), \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x+2} = -2$$

Esercizio 17 *Calcolare*

$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}} \tag{1.22}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 2^-}(x-2)=0^-,\quad \lim_{x\to 2^+}(x-2)=0^+,$$

per cui

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Esercizio 18 *Calcolare*

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}} \tag{1.23}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\frac{1-3+2}{1-4+3}=\frac{0}{0}$$

Riesce:

$$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$$
$$x^4-4x+3=(x-1)^2\left(x^2+2x+3\right)$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}$$

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Esercizio 19 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$\boxed{f(x)=\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}} \tag{1.24}$$

per poi elaborare una routine in ambiente Mathematica.

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x),\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{x}=\frac{3+0}{+\infty}=0^+$$

Similmente:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+4x^2+x-1}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{x}=\frac{3+0}{-\infty}=0^-$$

La routine in ambiente Mathematica per il calcolo di limiti di questo tipo, può essere prelevata al seguente link.

Esercizio 20 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$\boxed{f(x) = \frac{10^9 x}{x^2 - 1}} \tag{1.25}$$

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{10^9 x}{x^2-1} &= 10^9 \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 10^9 \frac{1}{(+\infty)(1-0)} \\ &= \frac{10^9}{+\infty} = 0^+\end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{10^9 x}{x^2-1} &= 10^9 \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 10^9 \frac{1}{(-\infty)(1-0)} \\ &= \frac{10^9}{-\infty} = 0^-\end{aligned}$$

Esercizio 21 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}} \tag{1.26}$$

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{3+\frac{7}{x}} \\ &= \frac{(+\infty)(1-0+0)}{3+0} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{3+\frac{7}{x}} \\ &= \frac{(-\infty)(1-0+0)}{3+0} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Esercizio 22 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$\boxed{f_n(x) = \frac{(x+1)^n}{x^2+1}, \qquad n = 0, 1, 2, ...} \tag{1.27}$$

Soluzione
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f_n(x)$$

Esplicitiamo i primi valori di n:

$$f_0(x) = \frac{1}{x^2+1} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+, \ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Per $n = 1$

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

In generale

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^n}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^n}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^{n-2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}{1+\frac{1}{x^2}} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}{1+\frac{1}{x^2}} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{n-2} = \begin{cases} 0^+, & n \in \{0,1\} \\ 1, & n = 2 \\ +\infty, & n > 2 \end{cases} \tag{1.29}$$

Passiamo al comportamento per $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^{n-2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^n}{1+\frac{1}{x^2}}}_{=1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^{n-2} = \begin{cases} 0^-, & n \in \{0,1\} \\ 1, & n = 2 \\ \begin{cases} -\infty, & \text{se } n-2 > 0 \text{ ed è dispari} \\ +\infty, & \text{se } n-2 > 0 \text{ ed è pari} \end{cases} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Osservazione 1 *Il procedimento di fattorizzazione espresso dalla (1.28) non va applicato "alla cieca", nel senso che il predetto procedimento è lecito se il prodotto delle funzioni è regolare (cioè se il limte del prodotto esiste).*

Esercizio 23 *Studiare il comportamento all'infinito della seguente funzione*

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$$

Soluzione.
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Iniziamo a calcolare il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{x\left(1 - \frac{8}{x^2+\frac{5}{x^3}}\right)} \\ &= \frac{2 - 0^+ + 0^+}{(+\infty)(1 - 0^+ + 0^+)} \\ &= \frac{2}{+\infty} = 0^+\end{aligned}$$

Similmente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{x\left(1 - \frac{8}{x^2+\frac{5}{x^3}}\right)} \\ &= \frac{2}{-\infty} = 0^-\end{aligned}$$

Esercizio 24 *Studiare il comportamento all'infinito della funzione:*

$$f(x) = \frac{(2x+3)^3 (3x-2)^2}{x^5 + 5}$$

Soluzione
Si tratta di calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Iniziamo con il primo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2 + \frac{3}{x}\right)^3 x^2 \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2}{x^5\left(1 + \frac{5}{x^5}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x}\right)^3 \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2}{1 + \frac{5}{x^5}} \\ &= \frac{(2 + 0^+)^3 (3 - 0^+)^2}{1 + 0^+} \\ &= \frac{8^+ \cdot 9^-}{1^+} = 72^+\end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}} \\ &= \frac{\left(2+0^-\right)^3\left(3-0^-\right)^2}{1+0^+} \\ &= \frac{8^-\cdot 9^-}{1^-} = 72^-\end{aligned}$$

Esercizio 25 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7}$$

Soluzione*. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^5+7x^4+1}{2x^5+7} = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5\left(4+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2+\frac{7}{x^5}\right)} \\ &= 2\end{aligned}$$

Esercizio 26 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Soluzione*. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty\end{aligned}$$

Esercizio 27 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{x^2-1}$$

Soluzione*. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty\end{aligned}$$

Di seguito un esercizio sulla forma indeterminata $\infty-\infty$:

Esercizio 28 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$$

Soluzione*. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right) = \infty-\infty &= \lim_{x\to1}\frac{1+x-3}{1-x^2} \\ &= -\frac{1}{0},\end{aligned}$$

occorre dunque distinguire i due casi $x \to 1^+$, $x \to 1^-$. Studiando il segno del rapporto $\frac{1+x-3}{1-x^2}$, si trova:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1+x-3}{1-x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x-3}{1-x^2} = -\infty$$

Esercizio 29 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x+1}{x}$$

***Soluzione**. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-x+1}{x} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 30 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x^2+x+2}$$

***Soluzione**. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x^2+x+2} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty, & se\ x \to +\infty \\ -\infty, & se\ x \to -\infty \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 31 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5x+1)^3(2x-1)}{x^5+5}$$

***Soluzione**. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(5x+1)^3(2x-1)}{x^5+5} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(5+\frac{1}{x}\right)^3\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x^5\left(1+\frac{5}{x}\right)} \\ &= 500\end{aligned}$$

Esercizio 32 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{mx+n},\ con\ a,b \neq 0$$

***Soluzione**. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+c}{mx+n} &= \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x\left(m+\frac{n}{x}\right)} \\ &= \frac{a}{m}\cdot\lim_{x\to+\infty} x = \frac{a}{m}\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & se\ \frac{a}{m} > 0 \\ -\infty, & se\ \frac{a}{m} < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 33 *Calcolare*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{x^3-4x+1}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{x^3-4x+1}&=\frac{\infty}{\infty}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\\&=2\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=2\cdot0^-=0^-\end{aligned}$$

1.3 Limiti di funzioni irrazionali

1.3.1 Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Si cerca di razionalizzare il numeratore e/o il denominatore.

Esercizio 34 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}\tag{1.31}$$

Soluzione. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Metodo 1
Razionalizziamo il numeratore:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\frac{1}{1+\sqrt{x}},$$

onde:

$$\lambda=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

Metodo 2
Il denominatore è la differenza di due quadrati: $1-x=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$, per cui:

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

Esercizio 35 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}}\tag{1.32}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$. *Razionalizziamo il numeratore, poichè è proprio questo termine a dar luogo all'indeterminazione:*

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}\\&=-\frac{x-2}{\underbrace{\sqrt{x-2}}_{=\sqrt{x-2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}\\&=-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}},\end{aligned}$$

cosicchè:

$$\lambda = -\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = 0$$

Esercizio 36 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}} \tag{1.33}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$. *Osserviamo che*

$$x+1-2\sqrt{x} = \left(\sqrt{x}-1\right)^2,$$

per cui:

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 37 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}} \tag{1.34}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$. *Il denominatore è la differenza di due cubi:*

$$x-1 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 - 1^3 = \left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right),$$

cosicchè:

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 38 *Sia data la funzione:*

$$\boxed{f_a(x) = \frac{\sqrt{x^2-a^2}+x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{x^2-a^2}},} \tag{1.35}$$

essendo a un parametro reale positivo. Calcolare

$$\lambda(a) = \lim_{x\to a} f_a(x) \tag{1.36}$$

Soluzione. *Determiniamo innanzitutto l'insieme di definizione di* $f_a(x)$. *Si tratta di risolvere:*

$$\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{x^2-a^2} \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x(x-a)\geq 0 \\ x^2-a^2\geq 0 \\ x(x-a)\neq x^2-a^2 \end{cases} \tag{1.37}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} x(x-a)\geq 0 &\Longleftrightarrow x\in X_1 = (-\infty,0]\cup[0,+\infty) \\ x^2-a^2\geq 0 &\Longleftrightarrow x\in X_2 = (-\infty,-a]\cup[a,+\infty) \\ x(x-a)\neq x^2-a^2 &\Longleftrightarrow x\in X_3 = \mathbb{R}-\{a\} \end{aligned}$$

Quindi l'insieme di definizione è:

$$X = X_1\cap X_2\cap X_3 = (-\infty,-a]\cup(a,+\infty)$$

Ciò implica che il limite (1.36) è in realtà un limite destro:

$$\lambda(a) = \lim_{x \to a+} f_a(x)$$

Per rimuovere la forma di indeterminazione sviluppiamo l'espressione analitica della funzione come segue:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{x^2-a^2}} &= \frac{\sqrt{(x-a)(x+a)}+x^2(x-a)}{\sqrt{x(x-a)}+\sqrt{(x-a)(x+a)}} \\ &= \frac{\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x+a}+x^2\sqrt{x-a}\right)}{\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{x+a}+x^2\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}},\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda(a) &= \frac{\sqrt{2a}+a^2\cdot 0}{\sqrt{2a}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \\ &= 2-\sqrt{2},\end{aligned}$$

cioè $\lambda(a)$ è indipendente da a.

Esercizio 39 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x-2} = \frac{0}{0}} \tag{1.38}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= -\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} \\ &= -\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 40 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{0}{0}} \tag{1.39}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}} \\ &= \lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1+x+x^2}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

Esercizio 41 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{5x-1}} = \frac{0}{0}} \tag{1.40}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{9-5x+1} \\
&= \frac{1}{5}\lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(2+x)\left(3+\sqrt{5x-1}\right)}{2-x} \\
&= \frac{1}{5}\lim_{x\to 2} (2+x)\left(3+\sqrt{5x-1}\right) \\
&= \frac{24}{5}
\end{aligned}$$

Esercizio 42 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{0}{0}} \tag{1.41}$$

Soluzione. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}+2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} \right) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \frac{2+2}{2\left(2\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 43 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 8} \frac{2-\sqrt{x-4}}{x^2-64} = \frac{0}{0}} \tag{1.42}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 8} \left(\frac{2-\sqrt{x-4}}{x^2-64} \cdot \frac{2+\sqrt{x-4}}{2+\sqrt{x-4}} \right) \\
&= -\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{(x-8)(x+8)\left(2+\sqrt{x-4}\right)} \\
&= -\lim_{x\to 8} \frac{1}{(x+8)\left(2+\sqrt{x-4}\right)} \\
&= -\frac{1}{64}
\end{aligned}$$

Esercizio 44 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \frac{0}{0}} \tag{1.43}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 4}\left(\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}\right)\\ &= -\lim_{x\to 4}\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}\\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

1.3.2 Forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $0\cdot\infty$

Esercizio 45 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \frac{\infty}{\infty}} \tag{1.44}$$

***Soluzione**. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} = \frac{1+0^+}{0^++1}\\ &= 1\end{aligned}$$

Esercizio 46 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x+1}} = \frac{\infty}{\infty}} \tag{1.45}$$

***Soluzione**. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = +\infty\end{aligned}$$

Esercizio 47 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\div\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+1} = 0\cdot\infty} \tag{1.46}$$

Soluzione. *Separiamo i due casi: $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Abbiamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} \\
&\underset{|x|=x}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= (+\infty)\cdot\left(1+0^+\right) = +\infty
\end{aligned}$$

Per $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} \\
&\underset{|x|=-x}{=} -\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -(+\infty)\left(1+0^+\right) = -\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 48 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt{x^4+x-2}} = \frac{\infty}{\infty}} \tag{1.47}$$

Soluzione. *Per $x \to +\infty$:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5+\sqrt{x^4\left(1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}}{x-1+\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5+x^2\sqrt{1-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}{x-1+x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{5}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}} \\
&= \frac{2-0+\sqrt{1-0+0}}{0-0+\sqrt{1+0-0}} = 3
\end{aligned}$$

Alla stessa maniera:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-5+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-1+\sqrt{x^4+x-2}} = 3$$

Ne concludiamo che la retta $y = 3$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra, per il grafico della funzione assegnata.

Esercizio 49 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-\sqrt{x}}{x+8\sqrt{x}} = \frac{\infty-\infty}{\infty}} \tag{1.48}$$

Soluzione. *Calcoliamo a parte il limite del numeratore:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(5x-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(5-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\\ &= (+\infty)\,(5-0) = +\infty,\end{aligned}$$

per cui il rapporto $\frac{5x-\sqrt{x}}{x+8\sqrt{x}}$ *si presenta nella forma indeterminata* $\frac{\infty}{\infty}$. *Abbiamo:*

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-\sqrt{x}}{x+8\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1+\frac{8}{\sqrt{x}}\right)}\\ &= \frac{5-0}{1+0} = 5\end{aligned}$$

Esercizio 50 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[12]{x^{12}+1}+\sqrt[4]{x^4-1}}{\sqrt[5]{1+x^5}+\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{\infty}{\infty}} \tag{1.49}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\left(\sqrt[12]{1+\frac{1}{x^{12}}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}\right)}{x\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}\right)}\\ &= \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\right)}_{=-1} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[12]{1+\frac{1}{x^{12}}}+\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{x^5}+1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}}\right)}_{=1}\\ &= -1\end{aligned}$$

Esercizio 51 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-1} = \frac{\infty}{\infty}} \tag{1.50}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}\\ &= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)}_{=0} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}_{=1}\\ &= 0\end{aligned}$$

1.3.3 Forma indeterminata $\infty - \infty$. Fattore razionalizzante

Supponiamo di voler calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)=\infty-\infty \tag{1.51}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}}\\
&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}}=\frac{\infty}{\infty}\\
&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\\
&=-\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{2}}\right)\\
&=-\left(+\infty\right)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-\infty
\end{aligned}$$

In questo caso relativamente semplice il fattore razionalizzante $R(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}$ si *calcola a occhio*. Nei casi più complicati, invece, si calcola attraverso una formula. Precisamente, supponiamo di avere la funzione:

$$f(x)=\sqrt[n]{p(x)}\pm\sqrt[n]{q(x)}, \tag{1.52}$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi. Il fattore razionalizzante che ci permette di passare dalla forma indeterminata $\infty-\infty$ alla forma $\frac{\infty}{\infty}$, è [2]:

$$\begin{aligned}
R(x)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\mp1\right)^{k+1}\sqrt[n]{p(x)^{n-k}\,q(x)^{k-1}} \qquad (1.53)\\
&=\sqrt[n]{p(x)^{n-1}}+\left(\mp1\right)^{3}\sqrt[n]{p(x)^{n-2}\,q(x)}+\sqrt[n]{p(x)^{n-3}\,q(x)^{2}}+\\
&+\ldots+\left(\mp1\right)^{n+1}\sqrt[n]{q(x)^{n-1}}
\end{aligned}$$

Esercizio 52 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)} \tag{1.54}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda=\infty-\infty$$

Applichiamo la (1.53):

$$\begin{aligned}
R(x)&=\sum_{k=1}^{3}\sqrt[3]{(x-1)^{3-k}\,(2x)^{k-1}}\\
&=\sqrt[3]{(x-1)^{2}}+\sqrt[3]{2x\,(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^{2}},
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)\left(\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x\,(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^2}\right)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x\,(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^2}} \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x\,(x-1)}+\sqrt[3]{(2x)^2}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[3]{4}\right]} \\
&= -\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt[3]{4}}\right) = -(+\infty)\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{4}} = -\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 53 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)} \tag{1.55}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Qui il fattore razionalizzante si calcola ad occhio. Innanzitutto osserviamo che:

$$x = \begin{cases} |x|\,, & se\ x \geq 0 \\ -|x|\,, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-|x|\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}}_{=2} = 2
\end{aligned}$$

Esercizio 54 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)} \tag{1.56}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Procediamo in maniera simile all'esercizio precedente:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-|x|\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+4x+5}+\sqrt{x^2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+|x|} = \frac{\infty}{\infty}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+|x|}\\
&= \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}}_{=-1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}}_{=2} = -2
\end{aligned}$$

Esercizio 55 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)} \tag{1.57}$$

Soluzione.

$$\lambda = (-\infty)+(+\infty) = \infty - \infty$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\left(-|x|+\sqrt[4]{x^4+1}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{x^4+1}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[4]{x^4}\right)
\end{aligned}$$

Il fattore razionalizzante è:

$$\begin{aligned}
R(x) &= \sum_{k=1}^{4}\sqrt[4]{(x^4+1)^{4-k}(x^4)^{k-1}}\\
&= \sqrt[4]{(x^4+1)^3}+\sqrt[4]{x^4(x^4+1)^2}+\sqrt[4]{x^8(x^4+1)}+\sqrt[4]{x^{12}}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)R(x)}{R(x)}$$

Sviluppiamo il numeratore:

$$\begin{aligned}
&\left(x+\sqrt[4]{x^4+1}\right)\left[\sqrt[4]{(x^4+1)^3}+\sqrt[4]{x^4(x^4+1)^2}+\sqrt[4]{x^8(x^4+1)}+\sqrt[4]{x^{12}}\right]\\
&= \sqrt[4]{(x^4+1)^4}-\sqrt[4]{x^{16}} = x^4+1-x^4 = 1,
\end{aligned}$$

cosicchè:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{R(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

Esercizio 56 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt[12]{x^{12}+1}\right)} \tag{1.58}$$

Soluzione.

$$\lambda = (-\infty) + (+\infty) = \infty - \infty$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to-\infty} \left(-|x| + \sqrt[12]{x^{12}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt[12]{x^{12}} + \sqrt[12]{x^{12}+1}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[12]{x^{12}+1} - \sqrt[12]{x^{12}}\right)\end{aligned}$$

È conveniente calcolare il fattore razionalizzante con Mathematica ottenendo:

$$\lambda = 0$$

Esercizio 57 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+2x+1} - x\right)} \tag{1.59}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Osserviamo che per $x \to +\infty$ è $x = |x| = \sqrt{x^2}$, onde:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+2x+1} - \sqrt{x^2}\right)$$

In questo caso il fattore razionalizzante si calcola a occhio, per cui:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+1} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}+|x|} = \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\ &= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{|x|}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right)\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot\lim_{x\to+\infty} x = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot(+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

Esercizio 58 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+x\right)} \tag{1.60}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = (+\infty)+(-\infty) = \infty-\infty$$

Osserviamo che per $x\to-\infty$ *è* $x = -|x| = -\sqrt{x^2}$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{x^2}\right)$$

In questo caso il fattore razionalizzante si calcola a occhio, per cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+2x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}+|x|}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\left(\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{\infty}{\infty}\\
&= \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|}\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot\lim_{x\to-\infty}(-x) = \frac{2}{\sqrt{3}+1}\cdot(+\infty) = +\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 59 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)} \tag{1.61}$$

Soluzione. *Calcoliamo a parte*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) &= \infty-\infty\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{+\infty} = 0,
\end{aligned}$$

cosicchè il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. *Scriviamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)}_{=\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 60 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Soluzione. *Risulta:*

$$\lambda = \frac{(-\infty) - (+\infty)}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x - |x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&\underset{|x|=-x,\ per\ x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x + x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)}{x^{2/3}\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}} \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x^{1/3}\right)\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^2}}}\right) \\
&= (-\infty)\cdot 2 = -\infty
\end{aligned}$$

Esercizio 61 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[8]{8x^8-3x+1} + 2x^3 + \sqrt[5]{x^4+1}}{2x^3 + \sqrt[5]{x^4+1}}$$

Soluzione. *Scriviamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt[8]{8x^8-3x+1}}{2x^3+\sqrt[5]{x^4+1}} + 1\right) \\
&= \lambda' + 1,
\end{aligned}$$

dove:

$$\lambda' = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[8]{8x^8 - 3x + 1}}{2x^3 + \sqrt[5]{x^4 + 1}}$$

Calcoliamo a parte il limite del denominatore:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2x^3 + \sqrt[5]{x^4 + 1}\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to-\infty} \left(2x^3 + x^{4/5}\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^4}}\right)$$

Cioè:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x^{11/5}}\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^4}}\right) = (-\infty)\left(2 + 0 \cdot \sqrt{1 + 0}\right) = -\infty,$$

cosicchè:

$$\lambda' = \frac{\infty}{\infty}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}
\lambda' &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt[8]{8 - \frac{3}{x^7} + \frac{1}{x^8}}}{x^3\left(2 + \frac{1}{x^{11/5}}\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^4}}\right)} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x^3}\right)}_{=0} \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[8]{8 - \frac{3}{x^7} + \frac{1}{x^8}}}{2 + \frac{1}{x^{11/5}}\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x^4}}}\right)}_{=\frac{\sqrt[8]{8+0}}{2+0}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\lambda = 1 + 0 = 1$$

Esercizio 62 *Dimostrare:*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n} - 3x + 1} + 2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}}{2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}} = 1$$

dove $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Soluzione. *Scriviamo:*

$$\begin{aligned}
\lambda_{2n} &= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n} - 3x + 1}}{2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}} + 1\right) \\
&= \lambda'_{2n} + 1,
\end{aligned}$$

dove:

$$\lambda'_{2n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n} - 3x + 1}}{2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}}$$

Calcoliamo a parte il limite del denominatore:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2x^{2n-1} + \sqrt[2n-1]{x^{2n-2} + 1}\right) = \infty - \infty$$

Rimuoviamo l'indeterminazione:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x^{2n-1}+x^{\frac{2n-2}{2n-1}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x^{2n-1}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)\right]$$

Osserviamo che:

$$\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}>0,\quad 2n-2>0,\quad 2n-1>0$$

per cui

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{2n-2}}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}x^{2n-1}=-\infty$$

Quindi:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}\right)=(-\infty)\left(2+0\cdot\sqrt{1+0}\right)=-\infty$$

Pertanto il calcolo di λ'_{2n} *conduce alla forma indeterminata* $\frac{\infty}{\infty}$*. Scriviamo:*

$$\lambda'_{2n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt[2n]{2n-\frac{3}{x^{2n-1}}+\frac{1}{x^{2n}}}}{x^{2n-1}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)}$$
$$=\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x^{2n-1}}\right)\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{2n-2}}}\right)$$

Il primo limite è

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x^{2n-1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^{2n-1}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^{2(n-1)}}=0$$

Il secondo limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{1}{x^{\frac{4n^2-6n+3}{2n-1}}}\sqrt[2n-1]{1+\frac{1}{x^{\frac{2n-2}{2n-1}}}}\right)=2,$$

cosicchè:

$$\lambda'_{2n}=0$$

Ne concludiamo

$$\lambda_{2n}=1,\quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$$

Per $n=2$ *il grafico della funzione, tracciato con Mathematica è riportato in fig. 1.6.*

Esercizio 63 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)=\infty-\infty$$

Soluzione. *Scriviamo:*

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$$

Quindi calcoliamo il fattore razionalizzante tramite la (1.53), ottenendo:

$$R(x)=\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}\sqrt[3]{(x^3)^{3-k}(1-x^3)^{k-1}}$$
$$=\sqrt[3]{x^6}-\sqrt[3]{x^3(1-x^3)}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}$$

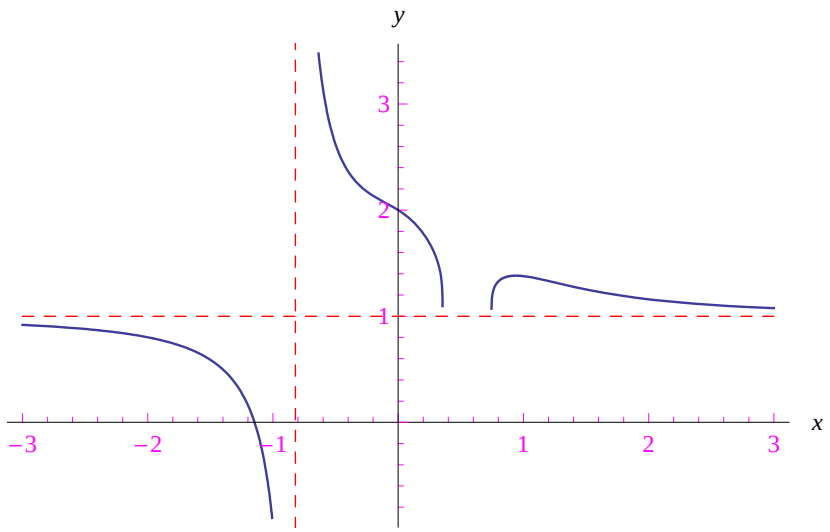


Figura 1.6: Grafico della funzione $\frac{\sqrt[2n]{2nx^{2n}-3x+1}+2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}{2x^{2n-1}+\sqrt[2n-1]{x^{2n-2}+1}}$ per $n=2$.

Riesce:

$$\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{1-x^3}\right)R(x)=1,$$

quindi:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{1-x^3}\right)R(x)}{R(x)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}\\ &= \frac{1}{(+\infty)-(+\infty)\sqrt[3]{-(+\infty)}+\sqrt[3]{(1-(+\infty))^2}}\\ &= \frac{1}{(+\infty)-(-\infty)+(+\infty)}\\ &= \frac{1}{+\infty}=0^+\end{aligned}$$

Esercizio 64 *Calcolare:*

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)$$

Soluzione. *Abbiamo la forma indeterminata* $\infty-\infty$*:*

$$\lambda=(+\infty)-(+\infty)=\infty-\infty$$

Il fattore razionalizzante è immediato, per cui:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3-x^2+2}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{5-4x}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{5}{x}-4\right)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|}\right)}_{=+1} \underbrace{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{x}-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}\right)}_{=-2} = -2
\end{aligned}$$

Esercizio 65 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)$$

Soluzione. *Abbiamo la forma indeterminata $\infty-\infty$:*

$$\lambda = (+\infty)-(+\infty) = \infty-\infty$$

Il fattore razionalizzante è immediato (vedere esercizio precedente):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-2}} \\
&= \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|}\right)}_{=-1} \underbrace{\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5}{x}-4}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}\right)}_{=-2} = 2
\end{aligned}$$

Esercizio 66 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+4}-x\right)$$

Soluzione. *Abbiamo la forma indeterminata $\infty-\infty$:*

$$\lambda = \infty-\infty$$

Non c'è bisogno di calcolare il fattore razionalizzante, giacchè $\sqrt{x^2+4x+4} = x+2$, per cui:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} (x+2-x) = 2$$

Esercizio 67 *Calcolare:*

$$\lambda_1 = \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)$$

$$\lambda_2 = \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)$$

Soluzione.

$$\lambda_1 = (-\infty)(\infty - \infty)$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)\left(\sqrt{x^2-12x+1}+\sqrt{3x^2+x+2}\right)}{\sqrt{x^2-12x+1}+\sqrt{3x^2+x+2}}\\
&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^2-13x-1}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}\\
&=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{13}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}\\
&=-\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|}\right)\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{13}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}}_{=\frac{2}{1+\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Il primo limite a secondo membro è:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|}=-\lim_{x\to-\infty}x=+\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)=-(+\infty)\cdot\frac{2}{1+\sqrt{3}}=-\infty,$$

cosicchè:

$$\lambda_1=(-\infty)(-\infty)=+\infty$$

Calcoliamo λ_2 utilizzando lo stesso procedimento:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)\\
&=-\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{|x|}\right)\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{2+\frac{13}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}}_{=\frac{2}{1+\sqrt{3}}}
\end{aligned}$$

Riesce:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-12x+1}-\sqrt{3x^2+x+2}\right)=-(+\infty)\cdot\frac{2}{1+\sqrt{3}}=-\infty$$

Quindi:

$$\lambda_2=(+\infty)(-\infty)=-\infty$$

1.4 Esercizi di riepilogo (funzioni razionali fratte e irrazionali)

Questa sezione compone un ripasso per il calcolo di limiti di funzioni razionali fratte e irrazionali.

Esercizio 68 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{2x+5}$$

***Soluzione**. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:*

$$\lambda = \frac{\infty}{\infty}$$

Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)} = +\infty$$

Esercizio 69 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$$

***Soluzione**. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:*

$$\lambda = \frac{\infty}{\infty}$$

Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)} = \frac{3}{+\infty} = 0^+$$

Esercizio 70 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

***Soluzione**. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

Esercizio 71 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$$

***Soluzione**. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \left(x^2+ax+a^2\right) = 3a^2\end{aligned}$$

Esercizio 72 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, $x^2 - 12x + 20 = (x-2)(x-10)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-10} = \frac{1}{8}$$

Esercizio 73 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$, $3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{3x+1} = 1$$

Esercizio 74 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+1)}{x-3} = -\frac{2}{5}$$

Esercizio 75 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2 - x - 6}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta: $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x+2)^2$, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, *onde:*

$$\lambda = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{x-3} = 0$$

Esercizio 76 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\infty - \infty$*:*

$$\lambda = \infty - \infty$$

Risulta:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}\\ &= \left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x+x^2}\right)\left(\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x}\right)\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}$$

Il secondo limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}(x+2) = -3$$

Quindi:

$$\lambda = \left(\frac{1}{3}\right)(-3) = -1$$

Esercizio 77 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 78 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{0}{0}$$

Risulta:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0\end{aligned}$$

Esercizio 79 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}$$

Soluzione*. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:*

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{3-2}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-\sqrt{3x-2}\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)}{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1-3x+2}{(x-1)\left(1+\sqrt{3x-2}\right)} \\ &= -3\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{3x-2}} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 80 *alcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$$

Soluzione*. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:*

$$\lambda = \frac{0}{\sqrt{0+4}-2} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x+4}+2\right) = 4\end{aligned}$$

Esercizio 81 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x-2}$$

Soluzione*. Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:*

$$\lambda = \frac{\sqrt{2+2}-\sqrt{4}}{2-2} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)} \\ &= -\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 82 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to -1} \frac{x+\sqrt{2x+3}}{x+1}$$

Soluzione. *Il rapporto si presenta nella forma indeterminata* $\frac{0}{0}$*:*

$$\lambda = \frac{-1+\sqrt{-2+3}}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to -1} \frac{\left(x+\sqrt{2x+3}\right)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}{(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-2x-3}{(x+1)\left(x-\sqrt{2x+3}\right)}\end{aligned}$$

Ma $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$*, per cui*

$$\lambda = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x-\sqrt{2x+3}} = 2$$

1.5 Limiti di funzioni trigonometriche

Per il calcolo dei limiti di funzioni trigonometriche, occorre tener in mente i seguenti limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \tag{1.62}$$

da cui derivano:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{1.63}$$

Esercizio 83 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cot x - 1}} \tag{1.64}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \tag{1.65}$$

Procediamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\frac{1}{\tan x} - 1} \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x\,(\tan x - 1)}{1-\tan x} \\ &= -\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan x = -1\end{aligned} \tag{1.66}$$

Esercizio 84 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 1} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2} \tag{1.67}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Eseguendo il cambio di variabile $t = 1-x$ si ha $\tan\frac{\pi x}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2}\right) = \cot\frac{\pi t}{2}$, onde:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to 0} t\cot\frac{\pi t}{2} \\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\tan\frac{\pi t}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\end{aligned} \tag{1.68}$$

Esercizio 85 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\cot 2x\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{1.69}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Osservando che $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$, si ha:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\tan 2x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 2x} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.70}$$

Esercizio 86 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x} \tag{1.71}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\pi} = \frac{0}{0} \tag{1.72}$$

Per rimuovere la forma indeterminata sviluppiamo $\sin 2x$ con le formule di duplicazione degli archi (Appendice B):

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2\sin x\cos x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.73}$$

Esercizio 87 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \tag{1.74}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione sviluppiamo il numeratore $\sin x - 1 = \sin x - \sin \frac{\pi}{2}$ con le formule di prostafaresi (Appendice B):

$$\sin x - \sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \tag{1.75}$$

per cui:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \sin 0 = 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \tag{1.76}$$

Alternativamente, poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right) = \sin \left(\frac{t}{2} \right), \quad \sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \cos t$$

Ne segue

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1 - \cos t}{t}}{\frac{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}{\frac{t}{2}}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = 0$$

Esercizio 88 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x}, \quad (a \in \mathbb{R} - \{0\}) \tag{1.77}$$

Soluzione. Il limite si calcola a partire dal limite fondamentale $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, eseguendo il cambio di variabile $t = ax$:

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\frac{t}{a}} = a \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = a \tag{1.78}$$

Esercizio 89 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, \quad (a, b \in \mathbb{R} - \{0\}, \ a \neq b) \tag{1.79}$$

Soluzione. Anche questo limite si calcola a partire dal limite fondamentale $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \right) \\ &= \frac{a}{b} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} \right) \left(\lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin bx} \right) \\ &= \frac{a}{b} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a}{b} \end{aligned} \tag{1.80}$$

Esercizio 90 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}} \tag{1.81}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{1 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{0}{0} \tag{1.82}$$

Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos x} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} \right) \tag{1.83}$$
$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = -\sqrt{2}$$

Esercizio 91 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0}, \quad (x_0 \in \mathbb{R}) \tag{1.84}$$

Soluzione. Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuovere l'indeterminazione espandiamo il numeratore:

$$\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{(\sin x - \sin x_0)(\sin x + \sin x_0)}{x - x_0} \tag{1.85}$$

Il termine che produce l'indeterminazione è $\sin x - \sin x_0$ che può essere sviluppato con le formule di prostaferesi:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right), \tag{1.86}$$

per cui

$$\lambda = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} (\sin x + \sin x_0) \right] \tag{1.87}$$
$$= \underbrace{2 \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}}_{=1} \cdot \lim_{x\to x_0} \left[\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) (\sin x + \sin x_0) \right]$$

Il secondo limite a secondo membro è:

$$\lim_{x\to x_0} \left[\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) (\sin x + \sin x_0) \right] = 2 \cos x_0 \sin x_0 = \sin 2x_0 \tag{1.88}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin^2 x - \sin^2 x_0}{x - x_0} = \sin 2x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{1.89}$$

Esercizio 92 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \sin x}{1 - \cos x + \sin x} \tag{1.90}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, giacchè

$$\lambda = \frac{1 - 1 - 0}{1 - 1 + 0} = \frac{0}{0}$$

Metodo 1

Dividiamo numeratore e denominatore per x:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$
$$= \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Metodo 2

Dalle formule di duplicazione (Appendice B):

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Longrightarrow \cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \tag{1.91}$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \Longrightarrow \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

onde:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1-1+2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \tag{1.92}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Metodo 3

Esprimiamo $\sin x$ e $\cos x$ come funzione razionale di $\tan\frac{x}{2} \stackrel{def}{=} t$. In altri termini, utilizziamo le formule parametriche riportate in Appendice B:

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}}{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \tag{1.93}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1+t^2-1+t^2-2t}{1+t^2-1+t^2+2t}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{t-1}{t+1} = -1$$

Per completezza, in fig. 1.7 riportiamo il grafico della funzione in cui è visibile il punto di discontinuità eliminabile.

Esercizio 93 *Mostrare che il risultato dell'esercizio precedente si generalizza in*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a - a\cos x - b\sin x}{a - a\cos x + b\sin x} = -1, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{1.94}$$

Soluzione

Utilizzando le formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t = \tan\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{1.95}$$

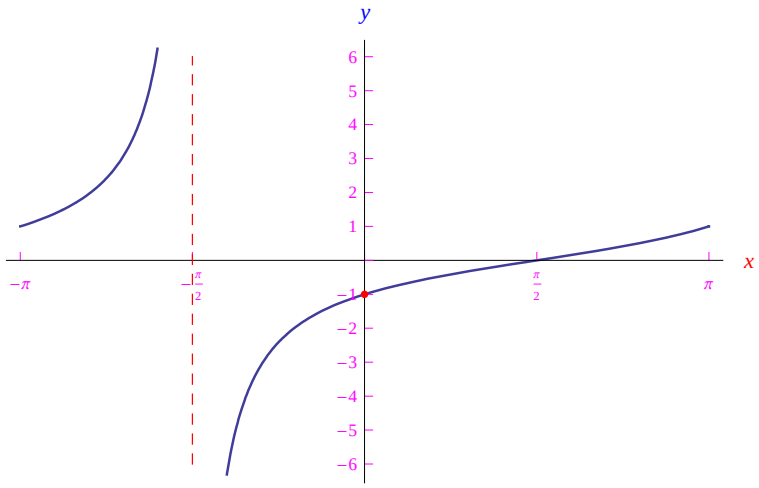


Figura 1.7: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1-\cos x-\sin x}{1-\cos x+\sin x}$.

la funzione trigonometrica di cui stiamo cercando il limite per $x \to 0$, si trasforma in una funzione razionale fratta. Precisamente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a-a\cos x-b\sin x}{a-a\cos x+b\sin x} &= \lim_{t\to 0}\frac{a-a\frac{1-t^2}{1+t^2}-b\frac{2t}{1+t^2}}{a-a\frac{1-t^2}{1+t^2}+b\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{a\left(1+t^2\right)-a\left(1-t^2\right)-2bt}{a\left(1+t^2\right)-a\left(1-t^2\right)+2bt} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{at-b}{at+b} = -1,\end{aligned} \tag{1.96}$$

da cui il risultato.

***

Nei due ultimi esercizi abbiamo utilizzato le formule parametriche per risolvere un'assegnata forma indeterminata. Tale procedimento è applicabile quando la funzione di cui si vuole calcolare il limite dipende da x esclusivamente attraverso le funzioni trigonometriche. Cioè

$$f(x) = F(\sin x, \cos x, \tan x, ...) \tag{1.97}$$

Ad esempio, nell'esercizio 92 avevamo

$$F(\sin x, \cos x) = \frac{1-\cos x-\sin x}{1-\cos x+\sin x} \tag{1.98}$$

Qui F è una funzione razionale fratta di $\sin x, \cos x$, per cui l'applicazione delle formule parametriche restituisce una funzione razionale fratta della variabile t, che è più semplice da manipolare. D'altra parte, se l'espressione analitica di F è comunque complicata, tale sarà la funzione espressa in termini di variabile parametrica. Ad esempio

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x-\sin^3 x\left(1+\cos^5 x\right)\left(1-\sin^4 x\right)}{1-\cos x+\sin^5 x\cos^6 x} \tag{1.99}$$

Applicando le formule parametriche

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{8t^3}{\left(1+t^2\right)^3}\left[1+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5\right]\left[1-\frac{16t^4}{\left(1+t^2\right)^4}\right]}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{32t^5}{\left(1+t^2\right)^5}-\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^6} \tag{1.100}$$

Sviluppando i vari termini, magari utilizzando un sistema di computer algebra, si perviene al limite del rapporto di due polinomi $p(t)$ e $q(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= t^{22} + 11t^{20} + 55t^{18} - 40t^{17} + 165t^{16} - 160t^{15} + 330t^{14} \\ &\quad + 320t^{13} + 462t^{12} - 480t^{11} + 462t^{10} + 752t^{9} - 330t^{8} \\ &\quad - 352t^{7} + 165t^{6} + 55t^{4} - 32t^{3} + 11t^{2} - 87t + 1 \\ q(t) &= \left(1+t^2\right)^2 (t^{18} + 9t^{16} + 36t^{14} + 16t^{13} + 84t^{12} + 80t^{11} + 126t^{10} \\ &\quad - 160t^{9} + 126t^{8} + 160t^{7} + 84t^{6} + 80t^{5} + 36t^{4} + 16t^{3} + 9t^{2} + 1), \end{aligned} \tag{1.101}$$

da cui

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{p(t)}{q(t)} = 1 \tag{1.102}$$

Esercizio 94 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x - \cos x + \sin x \cos x}{1 - \sin x + \cos x - \sin x \cos x}} \tag{1.103}$$

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, giacchè

$$\lambda = \frac{1 - 0 - 1 + 0}{1 - 0 + 1 - 0} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) - \cos x (1 - \sin x)}{(1 - \sin x) + \cos x (1 - \sin x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{(1 - \sin x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \end{aligned} \tag{1.104}$$

Esercizio 95 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin x - \cos x + \sin x \cos x}{1 - \sin x + \cos x - \sin x \cos x}} \tag{1.105}$$

Soluzione.
Anche qui il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dalla (1.104):

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

Esercizio 96 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin x - \cos x + \sin x \cos x}{1 + \sin x - \cos x - \sin x \cos x}} \tag{1.106}$$

Soluzione.
Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin x - \cos x (1 - \sin x)}{1 + \sin x - \cos x (1 + \sin x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{(1 + \sin x)(1 - \cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \end{aligned}$$

Esercizio 97 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \tag{1.107}$$

Soluzione.
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{0 - \sin 0}{0 + \sin 0} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1 - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}{1 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \\ &= \frac{1-1}{1+1} = 0 \end{aligned} \tag{1.108}$$

Esercizio 98 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x} \tag{1.109}$$

Soluzione.
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \frac{0 - \sin 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \\ &= 1 - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.110}$$

Esercizio 99 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\lambda - 1)\, x + \tan x}{\sin x + \tan^2 x} = \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.111}$$

Soluzione.
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{(\lambda - 1)\, x + \tan x}{\sin x + \tan^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\lambda - 1 + \frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\tan^2 x}{x}} \\ &= \frac{\lambda - 1 + \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \tan x} \\ &= \frac{\lambda - 1 + 1}{1 + 1 \cdot 0} = \lambda \end{aligned}$$

Esercizio 100 *Dimostrare:*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \cos^2 x}{2\sin x\,(1-\sin x)} = \lambda, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.112}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda \cos^2 x}{2\sin x\,(1-\sin x)} &= \lambda \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{2\sin x\,(1-\sin x)} \\ &= \lambda \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)\,(1+\sin x)}{2\sin x\,(1-\sin x)} \\ &= \frac{\lambda}{2} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{\sin x} = \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{2}{1} = \lambda, \end{aligned} \tag{1.113}$$

da cui il risultato.

Esercizio 101 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \tag{1.114}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per x^2:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2} \tag{1.115}$$

Ma

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \;\; \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1, \tag{1.116}$$

per cui

$$\lambda = \frac{1}{2} \tag{1.117}$$

Esercizio 102 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} \tag{1.118}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per x^2:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\sin x}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \tag{1.119}$$

Esercizio 103 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x\sin x\cos x} \tag{1.120}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ci conviene espandere il numeratore in $(1-\cos x)(1+\cos x)$, per poi dividere numeratore e denominatore per x^2:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\cdot \sin x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}\cos x} \\ &= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot 2}{1\cdot 1}=1\end{aligned} \tag{1.121}$$

Esercizio 104 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x} \tag{1.122}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ci conviene espandere il numeratore in $(1-\cos x)(1+\cos x+\cos x^2)$,, per poi dividere numeratore e denominatore per x^2:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos x^2)}{x\cdot \sin x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)\left(1+\cos x+\cos x^2\right)}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}\cos x} \\ &= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos x^2)}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos x} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot 3}{1\cdot 1}=\frac{3}{2}\end{aligned} \tag{1.123}$$

Esercizio 105 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2} \tag{1.124}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{9}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned} \tag{1.125}$$

Esercizio 106 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} \tag{1.126}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\end{aligned} \tag{1.127}$$

Esercizio 107 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \tag{1.128}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Infatti ricordando l'arco notevole $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$:

$$\lambda = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{1-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin t} \tag{1.129}$$

Espandiamo $\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$ con le formule di addizione:

$$\begin{aligned}\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) &= \cos t\cos\frac{\pi}{3} - \sin t\sin\frac{\pi}{3} \\ &\underset{\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}}{=} \frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t,\end{aligned} \tag{1.130}$$

per cui

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{\sin t} \tag{1.131}$$

Segue

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}{\sin t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right) + \sqrt{3}\end{aligned} \tag{1.132}$$

Il limite a secondo membro è:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{0}{1} = 0,$$

per cui

$$\lambda = 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Esercizio 108 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x \cdot \sin \frac{x}{2}}{1-\cos x} \tag{1.133}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per x^2:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{2}\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{1-\cos x}{x^2}} \\ &= \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1\end{aligned} \tag{1.134}$$

Alternativamente tenendo conto della relazione $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ che si ottiene dalle formule di duplicazione del coseno, si ha:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x \cdot \sin \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2}} = 1\end{aligned} \tag{1.135}$$

Esercizio 109 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x - 2\cos^2 x}{x \sin x} \tag{1.136}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Riduciamo in fattori il numeratore:

$$1+\cos x - 2\cos^2 x = (2\cos x + 1)(1-\cos x),$$

per cui:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{(2\cos x+1)(1-\cos x)}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(2\cos x+1)(1-\cos x)}{x^2}}{\frac{\sin x}{x^2}} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}\end{aligned} \tag{1.137}$$

Alternativamente, possiamo scrivere $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, onde:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x - 2\cos^2 x}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos x}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x\,(1-\cos x)}{x\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \cos^2 x \cdot \frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1+1\cdot\frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Per completezza riportiamo il grafico della funzione in fig. 1.8.

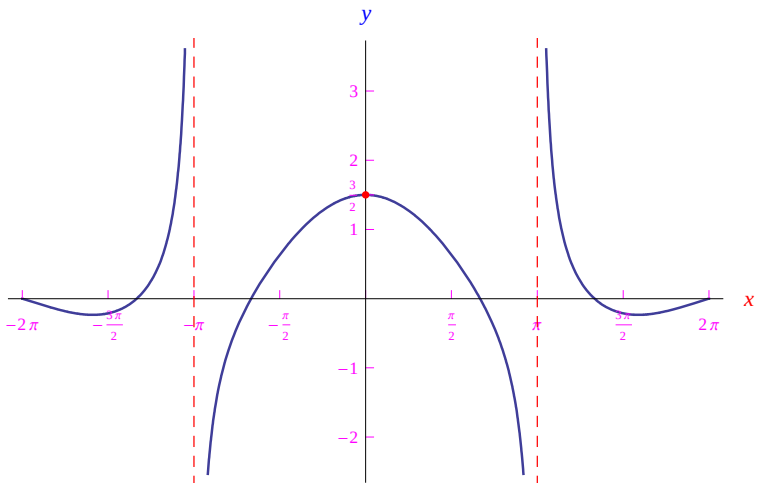


Figura 1.8: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1+\cos x - 2\cos^2 x}{x \sin x}$.

Esercizio 110 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x} \tag{1.138}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1-\cos x}{x} \right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \\ &= 1 - 0 = 1 \end{aligned} \tag{1.139}$$

Esercizio 111 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x} \tag{1.140}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x \left(1 - \cos x\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \cos x \right) \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}}_{=2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{=1} \\ &= 2 \end{aligned} \tag{1.141}$$

Per completezza riportiamo il grafico della funzione in fig. 1.9.

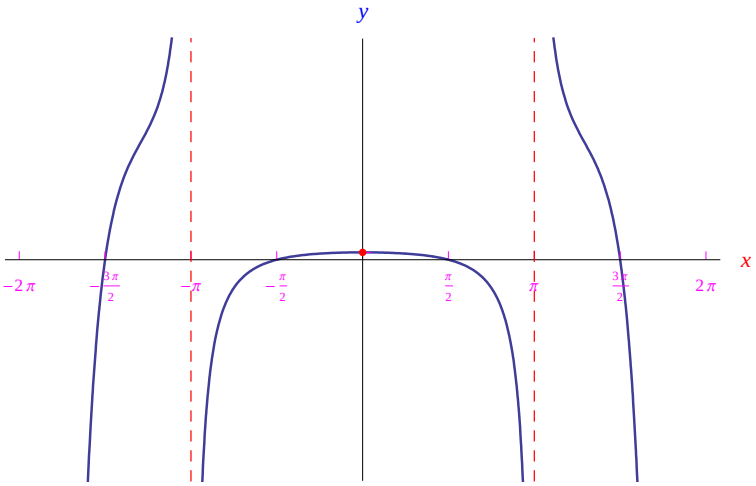


Figura 1.9: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3}{\tan x - \sin x}$.

Esercizio 112 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x} \tag{1.142}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Conviene eseguire il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \sin x = \cos t, \ \cos x = \sin t, \tag{1.143}$$

e $t \to 0$ per $x \to \frac{\pi}{2}$, cosicchè il limite diventa:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \to 0} \frac{(1 - \cos t)^2}{\sin t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{(1-\cos t)^2}{t}}{\frac{\sin t}{t}} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t}(1 - \cos t)}{\frac{\sin t}{t}} \\ &= \frac{\lim_{t \to 0} \frac{1-\cos t}{t} \cdot \lim_{t \to 0}(1 - \cos t)}{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}} \\ &= \frac{0 \cdot 0}{1} = 0 \end{aligned} \tag{1.144}$$

Alternativamente, possiamo utilizzare le formule parametriche

$$t = \tan \frac{x}{2}, \ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

e $t \to 1$ per $x \to \frac{\pi}{2}$, sicchè:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \to 1} \frac{\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= -\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1}{(t-1)(t+1)} \end{aligned}$$

Ma $t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = (t^3 - 3t^2 + 3t - 1)(t - 1)$, per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= -\lim_{t\to 1} \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t + 1} \\ &= -\frac{1 - 3 + 3 - 1}{2} = 0\end{aligned}$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x} = 0$$

come illustrato in fig. 1.10.

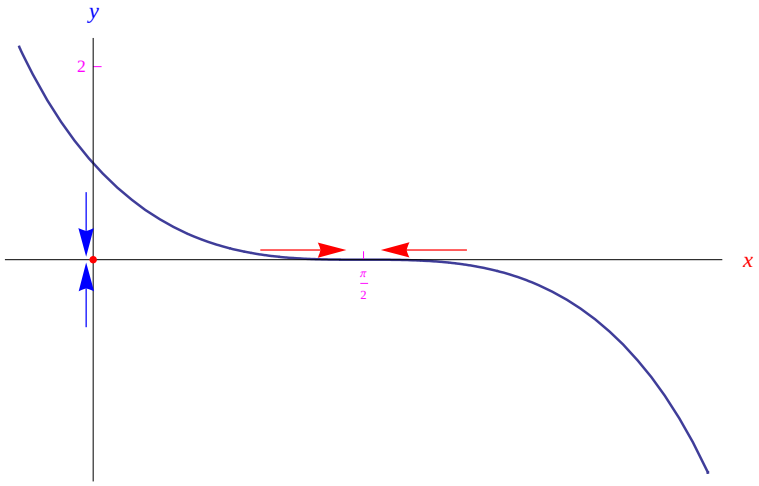


Figura 1.10: Esercizio 112.

Esercizio 113 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)} \tag{1.145}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)}{\cos x \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)} \tag{1.146}$$

Osservando che $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)}{\cos^2 x} \qquad (1.147)\\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{1 + \sin x} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Alternativamente, poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$, per cui $\sin x = \cos t,\ \cos x = \sin t$, e applicando le formule di addizione:

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)$$
$$\sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{t}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2}$$

Segue

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{2}}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per t^2

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t^2}}{\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\cdot 2} = \sqrt{2}\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 114 *Dimostrare:*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \ln\sin nx\right) = -\ln(n), \qquad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{1.148}$$

Soluzione
La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Scriviamo:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln x - \ln\sin nx\right) = \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x}{\sin nx}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin nx}\right) \tag{1.149}$$

Calcoliamo a parte il limite all'ultimo membro:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin nx} = \frac{1}{n}\lim_{x\to 0^+}\frac{nx}{\sin nx} = \frac{1}{n} \tag{1.150}$$

Quindi

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin nx}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n), \tag{1.151}$$

da cui il risultato.

Esercizio 115 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x\,(1-\sin x)$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Conviene eseguire il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t,\ \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

cosicchè

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\cot t\,(1-\cos t)$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\tan t} = \frac{0}{0}$$

Dividendo numeratore e denominatore per t:

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\tan t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x\,(1-\sin x)\,(1+\sin x)}{1+\sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x\left(1-\sin^2 x\right)}{1+\sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x\cos^2 x}{1+\sin x} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x} \\
&= \frac{1\cdot 0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

Esercizio 116 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^2 x + \sin x - 4}{x-\frac{\pi}{2}} \tag{1.152}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Conviene eseguire il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \sin x = \cos t,\ \cos x = \sin t,$$

cosicchè

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{3\cos^2 t + \cos t - 4}{t} \tag{1.153}$$

Il numeratore è un polinomio di secondo grado in $\cos t$ e riducendo in fattori: $3\cos^2 t + \cos t - 4 = (3\cos t + 4)\,(\cos t - 1)$, onde:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{(3\cos t + 4)\,(\cos t - 1)}{t} \\
&= -\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0} (3\cos t + 4)}_{=7} = 0
\end{aligned} \tag{1.154}$$

Alternativamente, osserviamo che $3\sin^2 x + \sin x - 4 = (3\sin x + 4)\,(\sin x - 1)$, per cui

$$\lambda = \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (3\sin x + 4)}_{=7} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x-\frac{\pi}{2}}}_{=\lambda_1}$$

Segue

$$\lambda_1 \underset{t=\frac{\pi}{2}-x}{=} -\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$$

Conclusione: $\lambda = 0$.

Esercizio 117 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (1-\tan x)\tan 2x \tag{1.155}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Dalle formule di duplicazione (Appendice B):

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x},$$

si ha:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[(1-\tan x)\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right] \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[(1-\tan x)\frac{2\tan x}{(1-\tan x)(1+\tan x)}\right] \\ &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\tan x} \\ &= 2\cdot\frac{1}{1+1} = 1\end{aligned}$$

Esercizio 118 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{ax-\sin x}, \quad (a\in\mathbb{R}) \tag{1.156}$$

Soluzione.

Poniamo per definizione:

$$f_a(x) = \frac{x+\sin x}{ax-\sin x}, \tag{1.157}$$

distinguendo i due casi:

1. $a \neq 0$
2. $a = 0$

Nel primo caso scriviamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{ax-\sin x} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(a-\frac{\sin x}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{\sin x}{x}}{a-\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{1+0}{a-0} \\ &= \frac{1}{a},\end{aligned} \tag{1.158}$$

giacchè:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \tag{1.159}$$

Infatti:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{\overbrace{|\sin x|}^{\leq 1}}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Longrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Ma

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\pm\frac{1}{x}\right)=0$$

da cui la (1.159) in virtù del del teorema dei carabinieri.

Tenendo conto della (1.158), per $a=0$ siamo tentati a scrivere $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{\sin x}=0$. Più precisamente:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f_0(x)=-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{\sin x}=-\left[\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{\sin x}\right)+1\right] \tag{1.160}$$

Ma $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sin x}$ non esiste. Infatti, $\frac{x}{\sin x}$è definitivamente limitata (in un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tra $-x$ e x, per cui detta funzione assume infinite volte (in ogni intorno di $+\infty$ o di $-\infty$) tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$. Ne concludiamo che il limite proposto non esiste per $a=0$.

Per completezza studiamo il comportamento della funzione in un intorno di $x=0$ Abbiamo

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{ax-\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{a-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+1}{a-1}=\frac{2}{a-1}$$

Per $a=$

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{-\sin x}=\left.\frac{2}{a-1}\right|_{a=0}=2$$

Nella fig. 1.11-. riportiamo il grafico di $f_{a\neq0}(x)$.

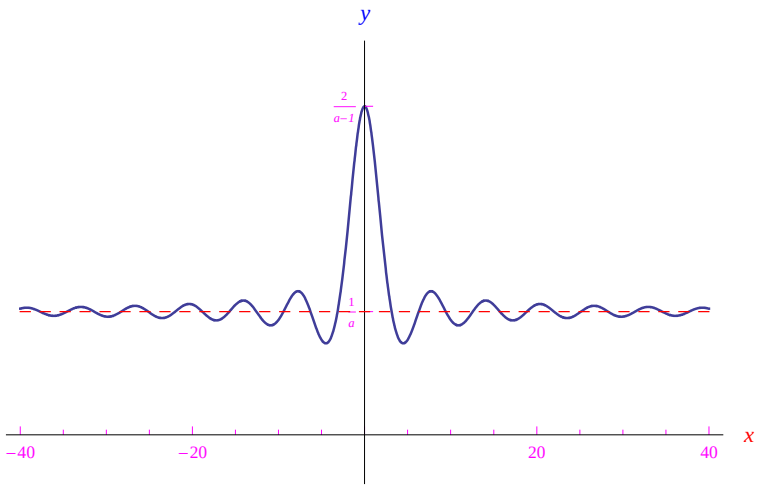


Figura 1.11: Grafico della funzione (1.157) per $a\neq0$.

Esercizio 119 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to0}\frac{\ln\sqrt{1-\sin^2x}}{x^2}}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda=\frac{\ln(1-0)}{0}=\frac{0}{0} \tag{1.161}$$

Osseviamo che

$$\ln\sqrt{1-\sin^2x}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\sin^2x\right), \tag{1.162}$$

quindi:

$$\lambda = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{x^2}, \tag{1.163}$$

che suggerisce l'utilizzo del limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg_a(1+x)}{x} = \lg_a e, \tag{1.164}$$

e in particolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{1.165}$$

Per ricondurci a questo limite, scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin^2 x}\cdot\left(\frac{-\sin^2 x}{x^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1-\sin^2 x\right)}{-\sin^2 x}\right]}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}_{=1}\end{aligned} \tag{1.166}$$

Calcoliamo λ_1 con il cambio di variabile $t = -\sin^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1, \tag{1.167}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{1-\sin^2 x}}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 120 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt[n]{1-\sinh^m x}}{x^m} = -\frac{1}{n}, \qquad \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\} \tag{1.168}$$

Soluzione
È una generalizzazione dell'esercizio precedente.

$$\begin{aligned}\lambda \overset{def}{=} \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sinh^m x\right)}{x^m} &= \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(1-\sinh^m x\right)}{-\sinh^m x}\cdot\left(-\frac{\sinh^m x}{x^m}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{n}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\sinh^m x\right)}{-\sinh^m x}}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^m}_{=1}\end{aligned} \tag{1.169}$$

Calcoliamo λ_1 con il cambio di variabile

$$t = -\sinh^m x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{1.170}$$

Abbiamo

$$\lambda_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1, \tag{1.171}$$

per cui

$$\lambda = -\frac{1}{n} \tag{1.172}$$

Esercizio 121 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x}} \tag{1.173}$$

Soluzione
Si calcola facilmente:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0}\cos x \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned} \tag{1.174}$$

Esercizio 122 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to \pi} \frac{1 - \sin\frac{x}{2}}{\pi - x} \tag{1.175}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Eseguendo il cambio di variabile $t = \pi - x$:

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \sin\frac{t}{2}}{t} \tag{1.176}$$

Eseguendo un secondo cambio di variabile $\tau = \frac{t}{2}$:

$$\lambda = \frac{1}{2}\lim_{\tau\to 0}\frac{1-\sin\tau}{\tau} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0 \tag{1.177}$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x} &= \lim_{x\to\pi}\left(\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}\cdot\frac{1+\sin\frac{x}{2}}{1+\sin\frac{x}{2}}\right) \\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{(\pi-x)\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\pi-x}}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\pi}\frac{1}{1+\sin\frac{x}{2}}}_{=\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\lambda_1 \underset{t=\pi-x}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

Esercizio 123 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2}{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}} \tag{1.178}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - 2\left(1-\cos^2 x\right)}{2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - 2\sin^2 x}{2\sin^2 x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.179}$$

Esercizio 124 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 2x}\right)} \tag{1.180}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$. Sviluppando $\sin 2x$ con le formule di duplicazione:

$$\lambda = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2\sin x\cos x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\cos x - 1}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{1.181}$$

Esercizio 125 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x}} \tag{1.182}$$

Soluzione

La forma indeterminata $\frac{0}{0}$ può essere rimossa dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}} \\ &= \frac{1}{0}\end{aligned} \tag{1.183}$$

In particolare:

$$\begin{aligned}x\to 0^+ &\Longrightarrow \frac{1-\cos x}{x}\to 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ x\to 0^- &\Longrightarrow \frac{1-\cos x}{x}\to 0^- \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty\end{aligned} \tag{1.184}$$

Esercizio 126 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cot x + \cos x}} \tag{1.185}$$

Soluzione

Procedimento veloce:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos x + \cos x\sin x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Procedimento alternativo: poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\tan t + \sin t}, \tag{1.186}$$

per poi dividere numeratore e denominatore per t:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{\tan t}{t} + \frac{\sin t}{t}} \\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.187}$$

Esercizio 127 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \cot x\right)} \tag{1.188}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$ che può essere ricondotta alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}, \tag{1.189}$$

che a sua volta può essere rimossa dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} \\ &= \frac{0}{1} = 0\end{aligned} \tag{1.190}$$

Esercizio 128 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x - \sin x\cos x}{\sin^2 x - 1}} \tag{1.191}$$

Soluzione
La forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si risolve facilmente:

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,(1-\sin x)}{(\sin x - 1)\,(\sin x + 1)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x + 1} = -\frac{0}{1+1} = 0$$

Esercizio 129 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right)} \tag{1.192}$$

Soluzione.
Qui abbiamo la forma indeterminata $\infty - \infty$ che può essere ricondotta alla forma $\frac{0}{0}$:

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x},$$

che a sua volta può essere rimossa eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sin t}{\cos t} = 0,$$

in quanto già calcolato in precedenza.

Esercizio 130 *Dimostrare:*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+x_0)+\sin(x-x_0)}{\cos(x+x_0)-\cos(x-x_0)} = -\cot x_0} \tag{1.193}$$

Soluzione.
Riesce:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+x_0)+\sin(x-x_0)}{\cos(x+x_0)-\cos(x-x_0)}=\frac{\sin x_0+\sin(-x_0)}{\cos x_0-\cos(x_0)}=\frac{0}{0},$$

avendo tenuto conto della parità (-1) della funzione seno, e della parità $(+1)$ della funzione coseno. Ricordiamo le formule di prostaferesi:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+x_0+x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0-x+x_0}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{x+x_0+x-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x+x_0-x+x_0}{2}\right)}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x_0}{\sin x_0}=-\cot x_0\end{aligned}$$

Esercizio 131 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin x}{\sin 2x}} \tag{1.194}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta manifestamente nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che può essere rimossa esplicitando $\tan 2x$:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x\cos 2x}{\sin 2x\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-\sin x\cos 2x}{2\sin x\cos x\cos 2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-\cos 2x}{2\cos x\cos 2x}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.195}$$

Esercizio 132 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}} \tag{1.196}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta manifestamente nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\cdot\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\sin 2x)(\sin x+\cos x)}{\sin^2 x-\cos^2 x}$$

Dalle formule di duplicazione: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\sin 2x)(\sin x+\cos x)}{\sin^2 x-\cos^2 x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)}_{=\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

Per l'altro limite eseguiamo il cambio di variabile $t=\frac{\pi}{4}-x$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{\sin 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos 2t}{2t}}{\frac{\sin 2t}{2t}}=\frac{0}{1}=0$$

Conclusione

$$\lambda=-\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 0=0 \tag{1.197}$$

Esercizio 133 *Calcolare :*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{1+\cos x - \sin x}}$$

Soluzione

Per risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, per cui:

$$\cos 2x = \cos(\pi - 2t) = -\cos 2t, \quad \cos x = \sin t, \ \sin x = \cos t,$$

e il limite diventa:

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos 2t}{1+\sin t - \cos t} \tag{1.198}$$

Scrivendo a numeratore $1 = \sin^2 t + \cos^2 t$:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos 2t}{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin t - \cos t} \qquad (1.199)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos 2t}{\sin t\,(\sin t + 1) + \cos t\,(\cos t - 1)}\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos 2t}{2t}\cdot 2}{\frac{\sin t}{t}\,(\sin t + 1) - \cos t \cdot \frac{1-\cos t}{t}}\\
&= 2\cdot \frac{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{2t}}{\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}(\sin t+1)}_{=1} - \underbrace{\lim_{t\to 0}\cos t}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}_{=0}}
\end{aligned}$$

Ovviamente

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{2t} \underset{\tau=2t}{=} \lim_{\tau\to 0}\frac{1-\cos\tau}{\tau} = 0,$$

onde

$$\lambda = 2\frac{0}{1\cdot 1 - 1\cdot 0} = 0 \tag{1.200}$$

Alternativamente:

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos 2t}{1+\sin t - \cos t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos 2t}{2t}}{\frac{\sin t}{2t} + \frac{1-\cos t}{2t}} = \frac{0}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0} = 0 \tag{1.201}$$

Esercizio 134 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \cos 2x}{1-\sin x}} \tag{1.202}$$

Soluzione

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ricordando la formula di duplicazione $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, per cui:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x}{1-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x} \qquad (1.203)\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin x) = 1+1 = 2
\end{aligned}$$

Alternativamente:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Longrightarrow \cos 2x = \cos(\pi - 2t) = -\sin 2t, \tag{1.204}$$

onde

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{\cos^2 t - \cos 2t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos^2 t - \cos^2 t + \sin^2 t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin^2 t}{t^2}}{\frac{1-\cos t}{t^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \tag{1.205}$$

Esercizio 135 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1-\cos x}} \tag{1.206}$$

Soluzione

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ ricordando la formula di duplicazione $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, per cui:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1 - 2\cos^2 2x}{1-\cos x} \tag{1.207}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = \cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

$$\lambda = \lim_{t\to 1} \frac{-2t^2 + t + 1}{1-t} \tag{1.208}$$

Riduciamo in fattori il polinomio a numeratore:

$$-2t^2 + t + 1 = (1-t)(2t+1), \tag{1.209}$$

per cui

$$\lambda = \lim_{t\to 1} (2t+1) = 3 \tag{1.210}$$

Esercizio 136 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x - \cos 2x}{1-\sin 2x + \cos 2x}} \tag{1.211}$$

Soluzione

Metodo 1

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{4} - x$, cosicché

$$\sin 2x = \cos 2t, \quad \cos 2x = \sin 2t$$

Ne segue

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos 2t - \sin 2t}{1-\cos 2t + \sin 2t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1-\cos 2t}{2t} - \frac{\sin 2t}{2t}}{\frac{1-\cos 2t}{2t} + \frac{\sin 2t}{2t}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Metodo 2

Utilizzando la formula di duplicazione $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin x\cos x - 1 + 2\sin^2 x}{1 - 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2 x - 2\sin x\cos x}{2 - 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x} \tag{1.212}$$
$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x(\sin x - \cos x)}{1 - \sin x(\sin x + \cos x)}$$

Scriviamo $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x\,(\sin x + \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,(\sin x - \cos x)}{\cos^2 x - \sin x \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\,(\sin x - \cos x)}{\cos x\,(\cos x - \sin x)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x = -1 \tag{1.213}$$

Metodo 3

Eseguiamo il cambio di variabile $\xi = 2x$

$$\lambda = \lim_{\xi\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin\xi - \cos\xi}{1 - \sin\xi + \cos\xi} \tag{1.214}$$

Utilizziamo le formule parametriche (cfr. Appendice B)

$$\sin\xi = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\xi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{1.215}$$

dove

$$t = \tan\frac{\xi}{2} \underset{\xi\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \tan\frac{\pi}{4} = 1, \tag{1.216}$$

per cui

$$\lambda = \lim_{t\to 1} \frac{1 - \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = -\lim_{t\to 1} t = -1 \tag{1.217}$$

Esercizio 137 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos 2x}{1 - \sin x}} \tag{1.218}$$

Soluzione

Possiamo rimuovere l'evidente forma indeterminata $\frac{0}{0}$ sviluppando $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1 - 2\sin^2 x}{1 - \sin x} \tag{1.219}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = \sin x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$

$$\lambda = \lim_{t\to 1} \frac{t + 1 - 2t^2}{1 - t} \tag{1.220}$$

Riduciamo in fattori il numeratore

$$-2t^2 + t + 1 = (1 - t)\,(2t + 1) \tag{1.221}$$

Conclusione

$$\lambda = \lim_{t\to 1} \frac{(1-t)\,(2t+1)}{1-t} = \lim_{t\to 1} (2t + 1) = 3 \tag{1.222}$$

Esercizio 138 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} - \tan 2x}{1 - \sqrt{3}\tan x}} \tag{1.223}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Infatti, rammentiamo che $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \tan\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, per cui $\lambda = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$. Per rimuovere l'indeterminazione utilizziamo la formula di duplicazione:

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \tag{1.224}$$

Quindi:

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} - \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - \sqrt{3}\tan x} \tag{1.225}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = \tan x \underset{x\to\frac{\pi}{6}}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3} - \frac{2t}{1-t^2}}{1 - \sqrt{3}t} \qquad (1.226)\\ &= \lim_{t\to\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\,(1-t^2) - 2t}{\left(1 - \sqrt{3}t\right)(1-t^2)}\\ &= \lim_{t\to\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}t - 1\right)(1-t^2)}\end{aligned}$$

Ma $\sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}t - 1\right)\left(t + \sqrt{3}\right)$, per cui:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\left(\sqrt{3}t - 1\right)\left(t + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}t - 1\right)(1-t^2)} \qquad (1.227)\\ &= \lim_{t\to\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t + \sqrt{3}}{1 - t^2}\\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}}\\ &= \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Esercizio 139 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x - \sin x}{\cos 2x + \cos x}} \tag{1.228}$$

Soluzione.

Ricordiamo gli archi notevoli:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \tag{1.229}$$

quindi:

$$\begin{aligned}\sin\frac{2\pi}{3} &= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{2\pi}{3} &= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},\end{aligned} \tag{1.230}$$

per cui il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sviluppando con le formule di duplicazione:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x\cos x-\sin x}{2\cos^2 x-1+\cos x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,(2\cos x-1)}{2\cos^2 x+\cos x-1} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin x}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1}}_{=\lambda_1},\end{aligned} \tag{1.231}$$

dove il limite λ_1 si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lambda_1 = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1} = \frac{0}{0}, \tag{1.232}$$

onde eseguiamo il cambio di variabile $t=\cos x \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

$$\lambda_1 = \lim_{t\to\frac{1}{2}} \frac{2t-1}{2t^2+t-1} \tag{1.233}$$

Riduciamo in fattori il denominatore

$$2t^2+t-1 = (t+1)\,(2t-1)$$

Quindi:

$$\lambda_1 = \lim_{t\to\frac{1}{2}} \frac{1}{t+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \tag{1.234}$$

Ne concludiamo

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{1.235}$$

Esercizio 140 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x-\tan\frac{x}{2}}{1-\cos x+\tan\frac{x}{2}}} \tag{1.236}$$

Soluzione.

Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ dividiamo numeratore e denominatore per x, manipolando poi le singole frazioni:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x}-\frac{\tan(x/2)}{x/2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1-\cos x}{x}+\frac{\tan(x/2)}{x/2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}_{=0} - \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x/2)}{x/2}}_{=1}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x/2)}{x/2}}_{=1}} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

Più lentamente, utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \Longrightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}, \tag{1.237}$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin^2\frac{x}{2} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{2\cdot 0 - 1}{2\cdot 0 + 1} = -1\end{aligned} \tag{1.238}$$

Un procedimento ancora più laborioso consiste nell'utilizzare le formule di bisezione per la tangente (cfr. Appendice B):

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \tag{1.239}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x - \frac{\sin x}{1+\cos x}}{1-\cos x + \frac{\sin x}{1+\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x - \sin x}{1-\cos^2 x + \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - \sin x}{\sin^2 x + \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} = -1\end{aligned} \tag{1.240}$$

Esercizio 141 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}} \tag{1.241}$$

Soluzione.

Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$:

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}},$$

dopodichè utilizziamo la formula di duplicazione del coseno: $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$, quindi

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Esercizio 142 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}} \tag{1.242}$$

Soluzione.

Anche qui conviene moltiplicare numeratore e denominatore per $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{\cos x} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}_{=\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Per calcolare λ_1 eseguiamo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, onde:

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{\sin t} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

Calcolare:

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}}$$

Soluzione

Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ dividiamo numeratore e denominatore per x, dopodiché manipoliamo le frazioni:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}\frac{\tan(x/2)}{x/2}}{\frac{\tan(x/2)}{x/2}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x/2)}{x/2}}{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x/2)}{x/2}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Un procedimento più laborioso consiste nell'utilizzo della formula di bisezione:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x},$$

per cui:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 1 + \cos x}{1-\cos x}$$

Dividendo numeratore e denominatore per x^2:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

Ricordando i limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

otteniamo

$$\lambda = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Esercizio 143 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\sin x + \cos x - 1}} \tag{1.243}$$

Soluzione

Per rimuovere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ dividiamo numeratore e denominatore per x:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{x}}{\frac{\sin x+\cos x-1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sin x}{x} - \frac{1-\cos x}{x}} = \frac{0\cdot\frac{1}{2}}{1-0} = 0$$

Esempio 2 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{3}\cos x - \cos\frac{x}{2}}} \tag{1.244}$$

Soluzione
Ricordiamo che:

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \tag{1.245}$$
$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi:

$$\sin\frac{x}{2}\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \tag{1.246}$$
$$\cos\frac{x}{2}\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

che conduce alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La presenza di $\sin\frac{x}{2}$ e $\cos\frac{x}{2}$ suggerisce l'utilizzo delle formule di duplicazione:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\ \ \cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1, \tag{1.247}$$

ottenendo:

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}} \tag{1.248}$$
$$=2\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin\frac{x}{2}}_{=1/2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}}}_{=\lambda_1}$$

Per calcolare λ_1 eseguiamo il cambio di variabile

$$t=\cos\frac{x}{2}\underset{x\to\frac{\pi}{6}}{\longrightarrow}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{1.249}$$

onde

$$\lambda_1=\lim_{t\to\frac{\pi}{3}}\frac{t-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}t^2-t-\sqrt{3}} \tag{1.250}$$

Riesce:

$$2\sqrt{3}t^2-t-\sqrt{3}=\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2\sqrt{3}t+2\right)$$

Quindi

$$\lambda_1=\lim_{t\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}t+2}=\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+2}=\frac{1}{5} \tag{1.251}$$

Conclusione:

$$\lambda=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5} \tag{1.252}$$

Esercizio 144 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos x}} \tag{1.253}$$

Soluzione
Anche in questo caso conviene esprimere $\sin x$ e $\cos x$ in termini di $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, ottenendo:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}-1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}-1} \\ &= \sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x}{2}\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+1\right)} = \sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+1} \\ &= \sqrt{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{1.254}$$

Esercizio 145 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos x}{(x-\pi)^2}} \tag{1.255}$$

Soluzione
Metodo 1
Per rimuovere la forma indeterminata $0/0$ esprimiamo $\cos x$ attraverso la formula di duplicazione:

$$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2},$$

cosicché il limite può scriversi:

$$\lambda = \lim_{x\to\pi} \frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2} \tag{1.256}$$

A questo punto eseguiamo il cambio di variabile $t=\pi-x$, per cui:

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2}$$

Segue

$$\lambda = \lim_{t\to0}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t^2} = \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2}_{=1} = \frac{1}{4} \tag{1.257}$$

Metodo 2
Scriviamo

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin^2\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2} = \lim_{x\to\pi}\frac{\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)}{(x-\pi)^2} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to\pi}\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)}_{=2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}}_{=\lambda_2}\end{aligned}$$

Il limite λ_2 conserva l'indeterminazione $0/0$, per cui eseguiamo il cambio di variabile $t=\pi-x$

$$\lambda_2 = \lim_{t\to0}\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{t^2} = \frac{1}{4}\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{1-\cos\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8},$$

da cui il risultato precedente.

Esercizio 146 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{\sin 2x}} \tag{1.258}$$

Soluzione

Appichiamo le formule di prostaferesi:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

per cui:

$$\lambda = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cos x}{\sin 2x} = 2\lim_{x\to 0}\cos x = 2$$

Alternativamente (metodo immediato) dividiamo numeratore e denominatore per x:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x+\sin x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 + \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2} = \frac{1\cdot 3+1}{1\cdot 2} = 2$$

Esercizio 147 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - \cos 3x - \cos x}{1-\cos x}} \tag{1.259}$$

Soluzione

Isolando il secondo termine a numeratore:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - (\cos 3x + \cos x)}{1-\cos x}, \tag{1.260}$$

e applicando le formule di prostaferesi:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{1.261}$$

per cui

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x\cos x,$$

mentre il limite diventa:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x - 2\cos 2x\cos x}{1-\cos x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\,(1-\cos x)}{1-\cos x} \\ &= 2\lim_{x\to 0}\cos 2x = 2\end{aligned} \tag{1.262}$$

Esercizio 148 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x + \cos x}{\cos x}}$$

Soluzione

Metodo 1

Eseguendo il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{2} - x$, si ottiene:

$$\lambda = \lim_{t\to 0}\frac{-\sin 3t + \sin t}{\sin t}$$

A questo punto dividiamo numeratore e denominatore per x

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-\sin 3t+\sin t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{-3\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t} + \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{-3\cdot 1+1}{1} = -2$$

Metodo 2

Applichiamo le formule di prostaferesi:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

onde

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x\cos x,$$

per cui

$$\lambda = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 2x = 2\cos\pi = -2$$

Esempio 3 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{4x-\pi}} \tag{1.263}$$

Soluzione

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(\sin x + \cos x)$

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{(4x-\pi)(\sin x+\cos x)} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{\cos^2 x-\sin^2 x}^{=\cos 2x}}{4x-\pi}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)$$
$$= -\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{4x-\pi}}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Eseguendo in λ_1 il cambio di variabile $t = \frac{\pi}{4} - x$

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2t\right) = \sin 2t, \quad 4x-\pi = -4t,$$

per cui

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t} = -\frac{1}{2}$$

Conclusione:

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio 149 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\sin 3x+\sin 4x}} \tag{1.264}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$, e la presenza di $\sin 3x$ etc. suggerisce l'utilizzo del limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. A tale scopo dividiamo numeratore e denominatore per x

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x+\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x+\sin 4x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4 + \frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3 + \frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4} = \frac{4+2}{3+4} = \frac{6}{7}$$

Esercizio 150 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6} \tag{1.265}$$

Soluzione

Proviamo a trasformare il numeratore in modo da spezzare il limite in una somma. Innanzitutto scriviamo

$$x=(x-\sin x)+\sin x,\quad \sin(\sin x)=\sin(\sin x)-\sin x+\sin x,$$

per cui il numeratore diventa:

$$\begin{gathered}x\sin(\sin x)-\sin^2 x=\\ =[(x-\sin x)+\sin x][\sin(\sin x)-\sin x+\sin x]-\sin^2 x\\ =(x-\sin x)[\sin(\sin x)-\sin x]+\\ +(x-\sin x)\sin x+\sin x[\sin(\sin x)-\sin x]\end{gathered}$$

Cioè

$$x\sin(\sin x)-\sin^2 x=(x-\sin x)[\sin(\sin x)-\sin x]+\sin x[x-2\sin x+\sin(\sin x)],$$

per cui denotando con λ (se esiste) il limite proposto, si ha:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)[\sin(\sin x)-\sin x]}{x^6}+\\ &+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x[x-2\sin x+\sin(\sin x)]}{x^6}\\ &=\lambda_1+\lambda_2,\end{aligned}$$

essendo:

$$\lambda_1=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)[\sin(\sin x)-\sin x]}{x^6},\ \lambda_2=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x[x-2\sin x+\sin(\sin x)]}{x^6} \tag{1.266}$$

Calcoliamo separatamente i due limiti λ_1 e λ_2.

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}}_{=\lambda_1'}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{\sin^3 x}}_{=\lambda_1''}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3}\right)}_{=1}\\ &=\lambda_1'\lambda_1''\end{aligned} \tag{1.267}$$

Se in λ_1'' eseguiamo il cambio di variabile $t=\sin x$, otteniamo:

$$\lambda_1''=-\lambda_1'\Longrightarrow\lambda_1=-\lambda_1'^2=-\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\right)^2 \tag{1.268}$$

Per calcolare tale limite scriviamo

$$\lambda_1'=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x-\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

Il secondo limite è quasi immediato:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right]\\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{=1/2}\\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

cosicchè

$$\lambda_1' = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan x-\sin x} \tag{1.269}$$

Scriviamo:

$$\begin{aligned}\frac{x-\sin x}{\tan x-\sin x} &= \frac{x-\sin x}{\tan x\,(1-\cos x)}\\ &= \frac{x-\sin x}{\sin x\,(1-\cos x)}\cdot\cos x\end{aligned}$$

Sostituendo in (1.269):

$$\begin{aligned}\lambda_1' &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x\,(1-\cos x)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{=1}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x\,(1-\cos x)}\end{aligned}$$

Poniamo

$$g(x)\overset{def}{=}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x-\sin x}$$

Riesce:

$$-x^2+3\le g(x)\le x^2+3,$$

per cui applicando il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=3\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x\,(1-\cos x)}=\frac{1}{3}\Longrightarrow\lambda_1'=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

Esercizio 151 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan\alpha x-\tan x}{\sin 2x},\qquad \textit{dove }\ \alpha\in\mathbb{R}-\{1\} \tag{1.270}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$. La presenza di tan suggerisce una manipolazione in modo da ricondurre il limite a una combinazione contenente il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$. A tale scopo dividiamo numeratore e denominatore per x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan\alpha x-\tan x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha-\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}=\frac{\alpha-1}{2}$$

Esercizio 152 *Per quale valore di n è verificata la seguente identità?*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2nx)+\sin(nx)}{\sin[(n+1)x]+\sin x}=\frac{3}{2}} \tag{1.271}$$

Soluzione.
Innanzitutto calcoliamo il limite a primo membro:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2nx)+\sin(nx)}{\sin[(n+1)x]+\sin x}=\frac{0}{0}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(2nx)+\sin(nx)}{x}}{\frac{\sin[(n+1)x]+\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(2nx)}{2nx}\cdot 2n+\frac{\sin(nx)}{nx}\cdot n}{\frac{\sin[(n+1)x]}{(n+1)x}\cdot(n+1)+\frac{\sin x}{x}}=\frac{2n+n}{n+1+1}=\frac{3n}{n+2}$$

Deve essere

$$\frac{3n}{n+2}=\frac{3}{2}\Longrightarrow n=2$$

Esercizio 153 *Per quale valore di n è verificata la seguente identità?*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{n}}\frac{1-(n-1)\cos x}{\pi-nx}=-\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{1.272}$$

Soluzione.
Una condizione necessaria è che il rapporto

$$\frac{1-(n-1)\cos x}{\pi-nx}$$

si presenti nella forma indeterminata $0/0$ per $x\to\pi/n$. Ne segue che n deve essere tale che

$$1-(n-1)\cos\frac{\pi}{n}=0\Longrightarrow\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{n-1},$$

che è soddisfatta per $n=3$. A questo punto non ci resta che verificare il risultato, eseguendo il cambio di variabile $t=\frac{\pi}{3}-x$ e applicando le formule di addizione:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right)=\frac{1}{2}\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{n}}\frac{1-(n-1)\cos x}{\pi-nx}&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t-\sqrt{3}\sin t}{3t}=\frac{0}{0}\\&=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t}}_{=0}-\frac{\sqrt{3}}{3}\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 154 *Determinare i valori del parametro $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ per i quali la seguente equazione in $a,b\in\mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^n}=-4, \tag{1.273}$$

ammette ∞^1 soluzioni.

Soluzione

Dal momento che il limite a primo membro della (1.273) si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, conviene sviluppare il numeratore attraverso le formule di prostaferesi:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2},$$

che nel nostro caso si scrivono:

$$\cos ax - \cos bx = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right),$$

cosicchè:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x^n}$$

Per $n = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x} &= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x} \\ &= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}_{=0}\end{aligned} \tag{1.274}$$

Riesce:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a\pm b}{2}x\right)}{x} = \frac{a\pm b}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a\pm b}{2}x\right)}{\frac{a\pm b}{2}x}}_{=1} = \frac{a\pm b}{2}$$

Quindi la (1.274) diventa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x} = -2\frac{a\pm b}{2}\cdot 0 = 0$$

Ciò implica che deve essere $n \geq 2$. Proviamo prima per ogni $n > 2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^n} &= -2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x^n} \\ &= -2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a+b}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a-b}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{n-2}}}_{=\infty} \\ &= \infty\end{aligned}$$

Deve allora essere necessariamente $n = 2$. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} &= -2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a+b}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}x\right)}{x}}_{=\frac{a-b}{2}} \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}\end{aligned}$$

Il problema chiede di determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2} = -4$, per cui:

$$\frac{b^2-a^2}{2} = -4$$

Cioè

$$a^2 - b^2 - 8 = 0, \tag{1.275}$$

che è un'equazione di secondo grado in a, b e come tale ammette ∞^1 soluzioni. Assumendo $b \in \mathbb{R}$ come parametro, la soluzione generale della (1.275) si scrive:

$$a = \pm\sqrt{b^2 + 8}, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \tag{1.276}$$

o ciò che è lo stesso:

$$(a, b) = \left(\pm\sqrt{b^2 + 8}, b\right), \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Osservando che $\cos\left(\pm\sqrt{b^2 + 8}x\right) = \cos\left(\sqrt{b^2 + 8}x\right)$, segue che alla soluzione generale (1.276) corrisponde la famiglia di funzioni:

$$\mathcal{F} = \left\{f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}\,(x)\right\}, \tag{1.277}$$

essendo:

$$f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}\,(x) = \frac{\cos\left(\sqrt{b^2 + 8}x\right) - \cos bx}{x^2} \tag{1.278}$$

Per quanto precede, comunque prendiamo $b \in \mathbb{R}$, la funzione $f_{\pm\sqrt{b^2+8},b}\,(x)$ converge a -4 per $x \to 0$. In fig. 1.12 sono graficate alcune funzioni della famiglia (1.277).

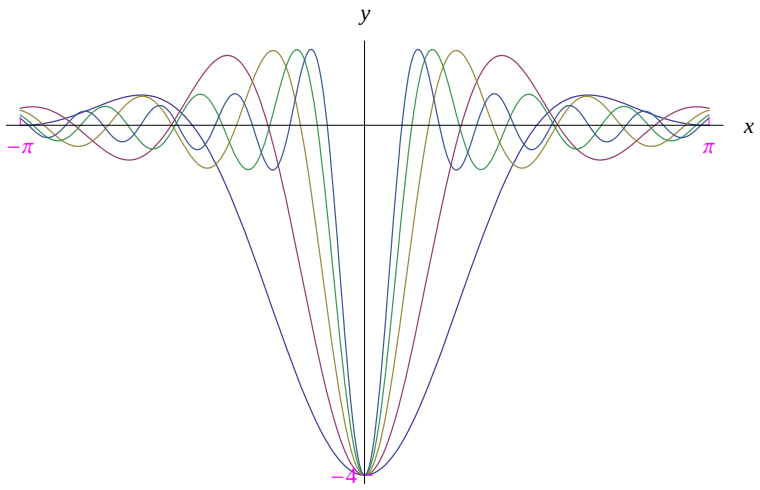


Figura 1.12: Grafico di (1.278) per $b = 1, 2, 4, 6, 8, 10$.

Esercizio 155 *Calcolare:*

$$\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{\cos^2 x - \cos^2 x_0}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Espandendo il denominatore otteniamo:

$$\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{(\cos x - \cos x_0)(\cos x + \cos x_0)},$$

da cui vediamo che $\cos x + \cos x_0$ non dà luogo a indeterminazione, quindi lo lasciamo così com'è. Lavoriamo, dunque, sui termini $\sin(x - x_0)$ e $\cos x - \cos x_0$. Il primo può essere espanso con le formule di duplicazione:

$$\sin(x - x_0) = 2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x - x_0}{2}$$

Il rimanente termine $\cos x - \cos x_0$ può essere trasformato in prodotto tramite prostaferesi:

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x-x_0}{2}}{\sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} (\cos x + \cos x_0)} = - \lim_{x \to x_0} \frac{\cos \frac{x-x_0}{2}}{\sin \frac{x+x_0}{2} (\cos x + \cos x_0)} \\ &= -\frac{1}{\sin x_0 (\cos x + \cos x_0)} = -\frac{1}{2 \sin x_0 \cos x_0} = -\frac{1}{\sin 2x_0}\end{aligned}$$

Esercizio 156 *Dimostrare:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{\sin \frac{x}{n} - \sin \frac{x_0}{n}} = \frac{n \cos x_0}{\cos \frac{x_0}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

Soluzione
Eseguendo il cambio di variabile $t = x - x_0$:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin (x_0 + t) = \sin x_0 \cos t + \cos x_0 \sin t \\ \sin \frac{x}{n} &= \sin \left(\frac{x_0}{n} + \frac{t}{n} \right) = \sin \frac{x_0}{n} \cos \frac{t}{n} + \cos \frac{x_0}{n} \sin \frac{t}{n}\end{aligned}$$

Il limite diventa

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0} \frac{\sin x_0 \cos t + \cos x_0 \sin t - \sin x_0}{\sin \frac{x_0}{n} \cos \frac{t}{n} + \cos \frac{x_0}{n} \sin \frac{t}{n} - \sin \frac{x_0}{n}} &= \lim_{t \to 0} \frac{\cos x_0 \sin t - (1 - \cos t) \sin x_0}{\cos \frac{x_0}{n} \sin \frac{t}{n} - \left(1 - \cos \frac{t}{n}\right) \sin \frac{x_0}{n}} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\cos x_0 \sin t - (1 - \cos t) \sin x_0}{t}}{\frac{\cos \frac{x_0}{n} \sin \frac{t}{n} - \left(1 - \cos \frac{t}{n}\right) \sin \frac{x_0}{n}}{t}} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sin t}{t} \cos x_0 - \frac{1 - \cos t}{t} \sin x_0}{\frac{\sin \frac{t}{n}}{\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{n} \cos \frac{x_0}{n} - \frac{1 - \cos \frac{t}{n}}{\frac{t}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{x_0}{n}} \\ &= \frac{\cos x_0 - 0}{\frac{1}{n} \cos \frac{x_0}{n}},\end{aligned}$$

da cui l'asserto.

Esercizio 157 *Verificare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$$

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \right) = \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\sin x}}_{= \lambda_1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}}_{= 1}$$

Calcoliamo il limite λ_1 eseguendo il cambio di variabile $t = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$:

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{1/n} - 1}{t}$$

Tenendo presente il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, si ha $\lambda_1 = \frac{1}{n}$, onde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$$

Esercizio 158 *Studiare il comportamento della seguente funzione in un intorno di $x = 0$:*

$$f(x) = \theta(x) \sin \frac{1}{x},$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino unitario (unit step):

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Soluzione

Come è noto, la funzione $\sin \frac{1}{x}$ è non regolare in $x_0 = 0$. Più precisamente, è non regolare nè a sinistra e nè a destra di x_0. La restrizione di f a $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ è la funzione identicamente nulla:

$$f_{\mathbb{R}^-}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-,$$

onde per definizione di limite sinistro:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} f_{\mathbb{R}^-}(x) = 0$$

Cioè la funzione è regolare a sinistra in x_0, risultando ivi infinitesima. La restrizione di f a $\mathbb{R}^+$ è:

$$f_{\mathbb{R}^+}(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

onde $\nexists \lim_{x\to 0} f_{\mathbb{R}^+}(x)$ e, per definizione di limite destro, $\nexists \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Pertanto, la funzione assegnata è non regolare a destra. In fig. 1.13 riportiamo il diagramma cartesiano della funzione assegnata.

Esercizio 159 *Dimostrare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}}$$

Soluzione

Tenendo presente che

$$\lim_{x\to 0} \left(x^n \sin \frac{1}{x} \right) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\},$$

si ha che il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dividiamo numeratore e denominatore per $\sin \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\left(1+x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{\sin \frac{1}{x}}}{\frac{x^{n-1}}{\sin \frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\frac{\left(1+x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{\sin \frac{1}{x}}}{x^n} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right] = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^n \sin \frac{1}{x}}}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)}_{=0}$$

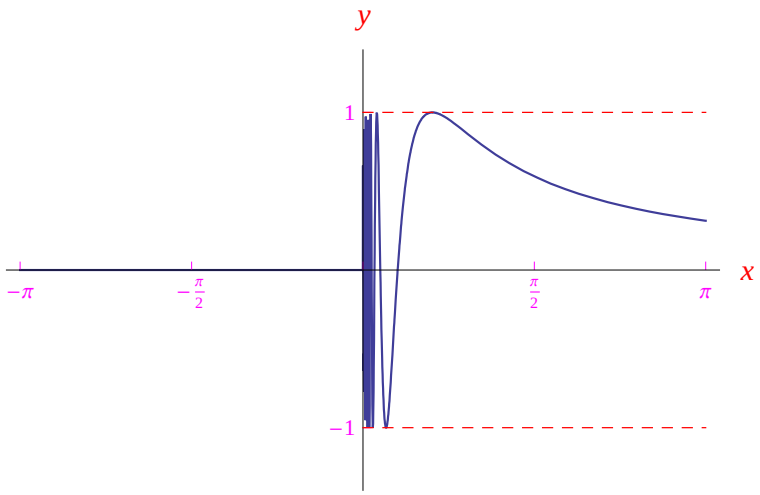


Figura 1.13: Grafico della funzione $f(x) = \theta(x) \sin \frac{1}{x}$ nell'intervallo $[-2, 2]$.

Per calcolare il limite λ_1 eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = x^n \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

onde

$$\lambda_1 = \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t}$$

Rammentando il limite fondamentale

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

si ha $\lambda_1 = \alpha$ e quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}} = 0$$

In fig. (1.14) riportiamo il grafico della funzione per assegnati valori di n, α.

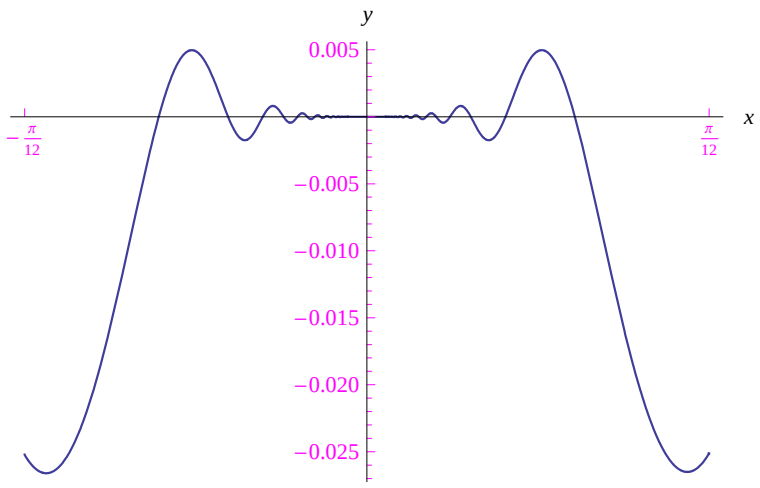


Figura 1.14: Grafico di $\frac{\left(1+x^n \sin \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1}{x^{n-1}}$ per $(\alpha, n) = \left(\sqrt{5}, 4\right)$.

Esercizio 160 *Classificare i punti di discontinuità della funzione:*

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) \tag{1.279}$$

Soluzione

L'insieme di definizione della funzione è:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x \neq x_k = \frac{1}{k\pi},\ \ \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Per determinare il limite per $x \to x_k$, eseguiamo il cambio di variabile $t = \sin\frac{1}{x}$, per cui:

$$\lim_{x \to x_k} x \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\arcsin t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

Tale limite non esiste, per cui la funzione ha infiniti punti di discontinuità di seconda specie in $x_k = \frac{1}{k\pi},\ \ \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Più precisamente, in ogni intorno di x_k il grafico di f compie infinite oscillazioni che non si smorzano.

Denotiamo con S l'insieme di detti punti:

$$S = \left\{ x_k = \frac{1}{k\pi} \right\}_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}},$$

da cui vediamo che $x = 0$ è di accumulazione per S:

$$\forall I_\delta(0) = (-\delta, \delta),\ \ \exists x_k \in S \cap I_\delta(0) - \{0\}$$

Inoltre:

$$-x \leq f(x) \leq x,\ \ \forall x \in (-\delta, \delta)$$

Per il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. In fig. 1.15 è illustrato il grafico di f.

Esercizio 161 *Classificare i punti di discontinuità della funzione*

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x} \tag{1.280}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Per calcolare i limiti destro e sinistro, esplicitiamo il valore assoluto in un opportuno intorno di $x = 0$, ad esempio $I(0) = (-\pi, \pi)$:

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x \in [0, \pi) \\ \sin x, & \text{se } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \in [0, \pi) \\ -\frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \in (-\pi, 0] \end{cases}, \tag{1.281}$$

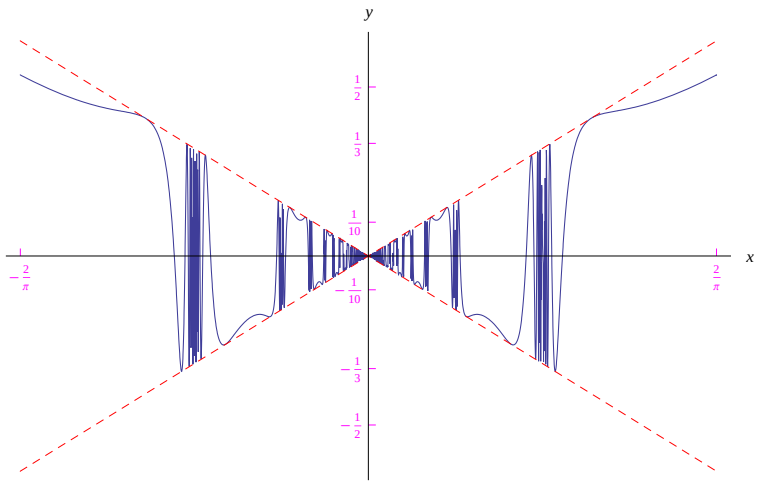


Figura 1.15: Grafico della funzione $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

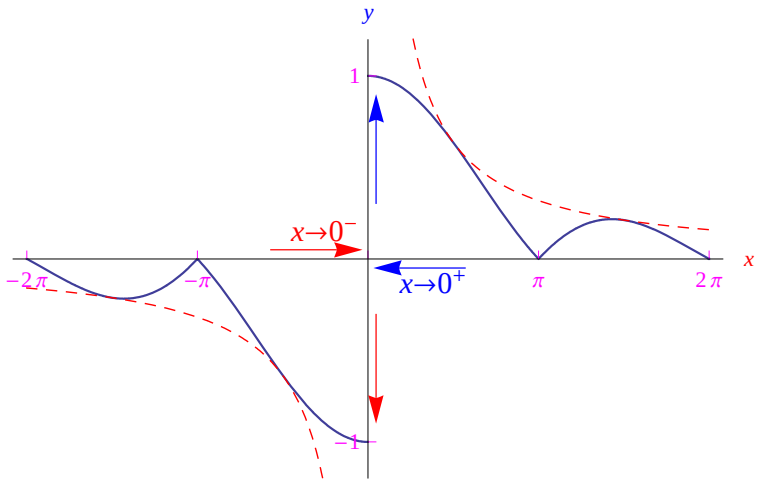


Figura 1.16: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$.

per cui

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\sin x}{x} = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{1.282}$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è

$$s(0) = 2$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 1.16.

Esercizio 162 *Assegnate le funzioni*

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}, \;\; g(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \tag{1.283}$$

studiare il comportamento di $f(x) - g(x)$ *in un intorno di* $x = 0$.

Soluzione

Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno in $x = 0$ una discontinuità di prima specie. Abbiamo già discusso la funzione $f(x)$ nell'esercizio precedente. In ogni caso, esplicitando il valore assoluto in un opportuno intorno di $x = 0$, si ha:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \in [0, \pi) \\ -\frac{\sin x}{x}, & \text{se } x \in (-\pi, 0] \end{cases} \tag{1.284}$$

Per la funzione $g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\sin x}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$$

Cioè f e g hanno lo stesso comportamento nel predetto intorno di $x = 0$, giacché

$$x \in [-\pi, \pi] \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

Ne segue

$$x \in [-\pi, \pi] \Longrightarrow h(x) \overset{def}{=} f(x) - g(x) = 0$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

Conclusione: la funzione $h(x)$ è continua in $x = 0$.

Il diagramma cartesiano di $f(x) - g(x)$ nell'intervallo $[-6\pi, 6\pi]$ è riportato in fig. 1.17.

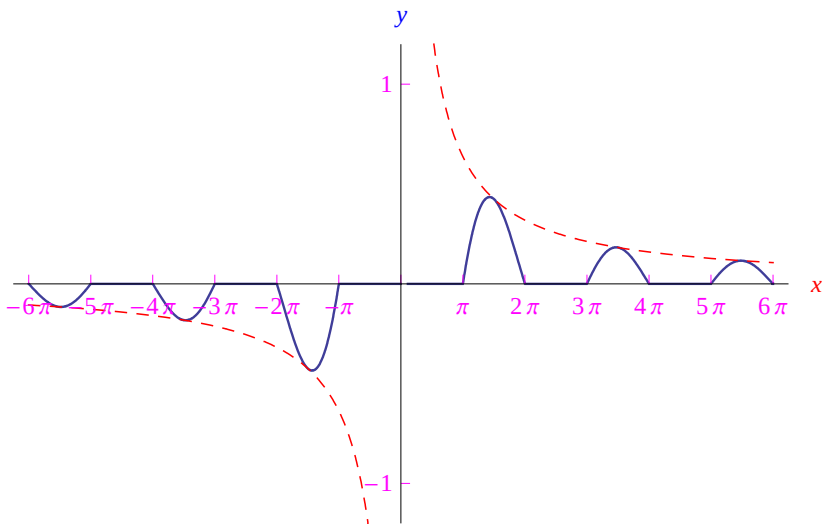


Figura 1.17: Diagramma cartesiano della funzione $\frac{|\sin x|}{x} - \frac{\sin x}{|x|}$.

Capitolo 2

La regola di De L'Hospital

2.1 Introduzione

La *regola di De L'Hospital* è l'applicazione di due teoremi che richiedono la conoscenza della nozione di derivata, per cui in questa sezione ci limitiamo semplicemente ad enunciarla.

Siano date le funzioni

$$f : X_1 \to \mathbb{R}, \;\; g : X_2 \to \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

entrambe infinitesime o entrambe infinite in un punto x_0 di accumulazione per i rispettivi insiemi di definizione. Quindi il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ si presenta, per $x \to x_0$, in una delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Se sono verificate le seguenti ipotesi:

1. $\exists I_\delta (x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid f, g$ sono derivabili in $I_\delta (x_0) - \{x_0\}$.
2. $g'(x) \neq 0, \;\; \forall x \in I_\delta (x_0) - \{x_0\}$
3. $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.2}$$

Si noti che tale procedimento può essere iterato, cioè applicato al rapporto delle derivate, cosicché

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \tag{2.3}$$

Diamo ora un'interpretazione geometrica alla regola, considerando le seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{2}, \quad g(x) = \sqrt{x^2+3} - 2$$

La prima è definita per $x \geq 1$, mentre la seconda è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, esse sono continue nei rispettivi insiemi di definizione. In particolare nel punto $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0, \quad \lim_{x \to 1} g(x) = g(1) = 0$$

Ne segue che il rapporto $f(x)/g(x)$ si presenta ivi nella forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3} - 2} = \frac{0}{0}$$

Applicando la regola

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per dare un'interpretazione geometrica, fissiamo un intorno destro di $x_0=1$ di raggio δ, che denotiamo con $I_\delta^+(x_0)$. Quindi indichiamo con s la retta secante al grafico $\gamma: y=f(x)$ per i punti $(x_0,0)$ e $P_0(x_0,f(x_0))$, come illustrato in fig. 2.1. Il coefficiente angolare di s è

$$m=\frac{f(x)}{x-x_0}$$

Segue (fig. 2.1)

$$\exists\xi\in(x_0,x)\mid \text{la tangente per } Q(\xi,f(\xi)) \text{ è parallela a } s$$

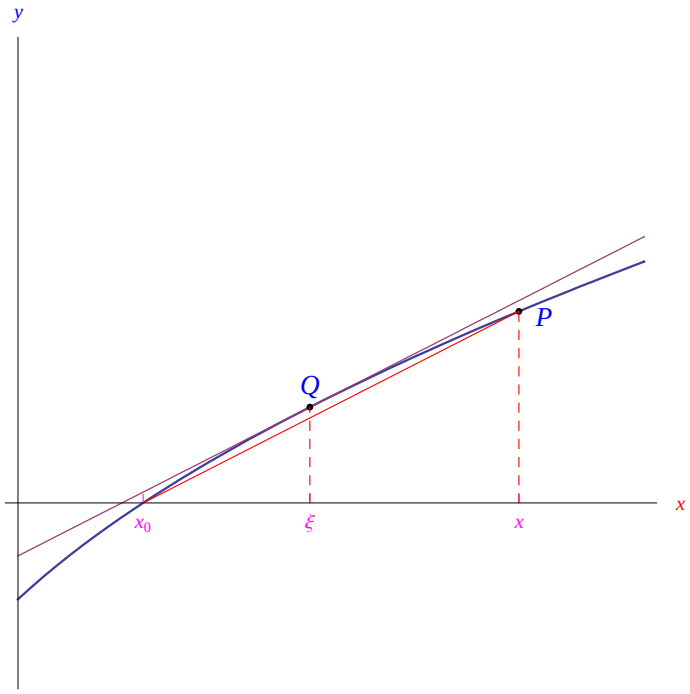


Figura 2.1: Intepretazione geometrica della regola di De L'Hospital.

Dal momento che il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata prima calcolata in quel punto, dall'uguaglianza dei rispettivi coefficienti angolari (condizione di parallelismo) si ha:

$$\frac{f(x)}{x-x_0}=f'(\xi) \tag{2.4}$$

Ripetendo il procedimento per la funzione $g(x)$ si perviene (con ovvio significato dei simboli):

$$\frac{g(x)}{x-x_0}=g'(\xi'), \tag{2.5}$$

essendo $\xi'\in I_\delta^+(x_0)$. Dall'ipotesi 2 si ha che la derivata di $g(x)$ è priva di zeri in $I_\delta^+(x_0)$, per cui dalle (2.4)-(2.5)

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi')},\quad \forall x\in I_\delta^+(x_0) \tag{2.6}$$

Il comportamento $\xi,\xi'\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}x_0$ assieme alla (2.5) giustifica geometricamente la regola di De L'Hospital.

***

In generale, quando si applica la regola di De L'Hospital è consuetudine utilizzare la notazione simbolica:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2.7}$$

Esempio 4 *Dimostrare*

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^n}{\cos x}=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0\}} \tag{2.8}$$

Soluzione.

Applicando la regola di De L'Hospital per $n=1$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0 \tag{2.9}$$

Per $n>1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)^n}{\cos x}&=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{n(1-\sin x)^{n-1}(-\cos x)}{-\sin x}=n\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(1-\sin x)^{n-1}}{\sin x}\\ &\underset{n-1>0}{=}n\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1-\sin x)^{n-1}\cot x\right]=n\cdot 0=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

***

Dalla ipotesi 3 vediamo che per poter applicare la regola di De L'Hospital, è necessaria la regolarità in x_0 del rapporto delle derivate, i.e. l'esistenza del limite per $x\to x_0$ del predetto rapporto. In particolare:

$$\nexists\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\nRightarrow\nexists\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Ad esempio, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$$

Il numeratore nell'ultimo limite è non regolare per $x\to 0$ in quanto tale è la funzione $\sin\frac{1}{x}$. Ne segue la non esistenza del limite del rapporto delle derivate (fig. 2.2).

D'altra parte il limite assegnato si calcola facilmente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cos\frac{1}{x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{0}{\frac{1}{2}}=0$$

***

La regola di De L'Hospital non deve essere applicata meccanicamente. Consideriamo, ad esempio, il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

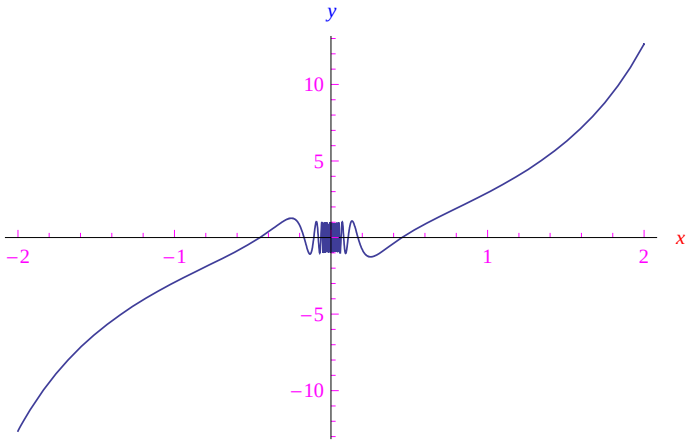


Figura 2.2: Il rapporto delle derivate compie infinite oscillazioni che non si smorzano per $x \to 0$.

Abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin^2 x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x + x \sin 2x} = \frac{0}{0}$$
$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2 \sin 2x + 2x \cos 2x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6 \cos 2x - 4x \sin 2x} = \frac{1}{6}$$

Tuttavia, osserviamo che dopo la prima applicazione della regola si perviene a un limite che può essere calcolato dividendo numeratore e denominatore per x^2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin 2x}{x}} = \frac{1}{6},$$

giacché

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

2.2 Esercizi svolti

Esercizio 163 *Applicando la regola di De L'Hospital, calcolare:*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}}{\tan \frac{1}{x}}} \tag{2.11}$$

Soluzione

Conviene dapprima eseguire il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}}{\tan \frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin \sqrt{t} + t^2}{\tan t} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\cos \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} + 2t}{\frac{1}{\cos^2 t}}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{\cos \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} + 2t\right) \cos^2 t = \left(\frac{1}{0^+} + 0\right) \cdot 1 = +\infty$$

Si noti che il limite è altrettanto immediato anche senza applicare la predetta regola:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin \sqrt{t} + t^2}{\tan t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\sin \sqrt{t} + t^2}{t}}{\frac{\tan t}{t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} + t}{\frac{\tan t}{t}} = \frac{1 \cdot (+\infty) + 0}{1} = +\infty$$

Esercizio 164 *Applicando la regola di De L'Hospital come secondo tentativo, calcolare:*

$$\boxed{\lim_{x\to -2^+} \frac{|x^3-1|-2x^2-1}{\sqrt{2+x}}} \tag{2.12}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{|x^3-1|-2x^2-1}{\sqrt{2+x}} = \frac{9-8-1}{\sqrt{2-2}} = \frac{0}{0}$$

Conviene svincolarsi dal valore assoluto, osservando che

$$\left|x^3-1\right| = 1-x^3, \quad \forall x<1,$$

per cui

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{|x^3-1|-2x^2-1}{\sqrt{2+x}} = -\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2(2+x)}{\sqrt{2+x}} = -\lim_{x\to -2^+} x^2\sqrt{2+x} = 0$$

Applicando la regola di De L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^+} \frac{|x^3-1|-2x^2-1}{\sqrt{2+x}} &= -\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{2+x}} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} -\lim_{x\to -2^+} \frac{3x^2+2}{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}} \\ &= -2\lim_{x\to -2^+} \left(3x^2+2\right)\sqrt{2+x} = 0\end{aligned} \tag{2.13}$$

Esercizio 165 *Applicando la regola di De L'Hospital, calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sin \pi x}{\sqrt[3]{x^2-1}}} \tag{2.14}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to -1^+} \frac{\pi\cos\pi x}{\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{-2/3}(2x)} = \frac{3\pi}{2}\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{\cos\pi x}{x}\sqrt[3]{x^2-1}\right) \\ &= \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}\cdot 0 = 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

Esercizio 166 *Applicando la regola di De L'Hospital, calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x}} \tag{2.16}$$

Soluzione
Risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x-\sin x} &= \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\cos^2 x\,(1-\cos x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x}{\cos^2 x} = 2\end{aligned}$$

Esercizio 167 *Senza applicare la regola di De L'Hospital, calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^x}{1-\cos x}} \tag{2.17}$$

Soluzione
Scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{1-\cos x} \cdot e^x \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} e^x}_{1} \tag{2.18}$$

Rammentando il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

si ha

$$\lambda = 2 \tag{2.19}$$

Esercizio 168 *Applicando la regola di De L'Hospital, calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos 2x}{1+\sin^2 2x + \cos 2x}} \tag{2.20}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2\sin 2x}{4\sin 2x \cos 2x - 2\sin 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2\sin 2x}{2\sin 4x - 2\sin 2x} \\ &= \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x - 4\cos x}{8\cos 4x - 4\cos 2x} \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 4\cos 2x}{2\cos 4x - \cos 2x} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1-4}{2\cdot 1 + 1} = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{2.21}$$

L'esercizio seguente richiede la conoscenza del calcolo integrale:

Esercizio 169 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2} \int_0^{x-2} e^{-t^2-1} dt, & se\ x > 2 \\ b, \quad se\ x = 2 \\ \frac{e^{x-2}-1-a(x-2)}{x^2} - \frac{1}{2}, & se\ x < 2 \end{cases}, \tag{2.22}$$

studiare continuità e derivabilità al variare dei parametri reali a, b.

Soluzione
L'integrale che compare nell'espressione analitica della funzione per $x > 2$, non è elementarmente esprimibile. Più precisamente, si esprime attraverso una funzione speciale nota come **funzione degli errori**:

$$\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \tag{2.23}$$

per cui

$$\int_0^{x-2} e^{-t^2-1}dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2e}\mathrm{Erf}\,(2-x) \tag{2.24}$$

Ciò premesso, studiamo il comportamento della funzione in un intorno di $x = 2$. A tale scopo calcoliamo:

$$\lim_{x\to 2^+} f\,(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\int_0^{x-2} e^{-t^2-1}dt}{(x-2)^2} = \frac{0}{0} \tag{2.25}$$

Per risolvere l'indeterminazione applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\int_0^{x-2} e^{-t^2-1}dt}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{d}{dx}\int_0^{x-2} e^{-t^2-1}dt}{\frac{d}{dx}(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{-(x-2)^2-1}}{2\,(x-2)} = +\infty \tag{2.26}$$

Per $x \to 2^-$:

$$\lim_{x\to 2^-} f\,(x) = \lim_{x\to 2^-} \left[\frac{e^{x-2}-1-a\,(x-2)}{x^2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1-1+0}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \tag{2.27}$$

Ne consegue che qualunque siano a, b il punto $x = 2$ è di discontinuità di seconda specie. La continuità in $x = 2$ può esserci solo a sinistra per $b = -1/2$. Inoltre, la funzione non è ivi derivabile, ma lo è solo a sinistra.

Passiamo al comportamento per $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f\,(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{e^{x-2}-1-a\,(x-2)}{x^2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{e^{-2}-1+2a}{0^+} - \frac{1}{2} = \pm\infty \tag{2.28}$$

Riesce:

$$e^{-2}-1+2a > 0 \Longleftrightarrow a > \frac{1-e^{-2}}{e} \overset{def}{=} a_{\min}, \tag{2.29}$$

onde

$$\begin{aligned} a > a_{\min} &\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f\,(x) = (+\infty) - \frac{1}{2} = +\infty \\ a < a_{\min} &\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f\,(x) = -\frac{|e^{-2}-1+2a|}{0^+} - \frac{1}{2} = -\infty \end{aligned} \tag{2.30}$$

Per $a = a_{\min}$

$$f\,(x<2) = \frac{2e^{x-2}-2-(1-e^{-2})\,(x-2)}{2x^2} - \frac{1}{2}, \tag{2.31}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} f\,(x) = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{x-2}-1+e^{-2}}{4x} = \frac{3e^{-2}-1}{0^+} = -\infty \tag{2.32}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f\,(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > a_{\min} \\ -\infty, & \text{se } a \le a_{\min} \end{cases} \tag{2.33}$$

Per $x \to 0^-$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f\,(x) &= \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{e^{x-2}-1-a\,(x-2)}{x^2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{e^{-2}-1+2a}{0^+} - \frac{1}{2} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a > a_{\min} \\ -\infty, & \text{se } a < a_{\min} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Per $a = a_{\min}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2e^{x-2} - 1 + e^{-2}}{4x} = \frac{3e^{-2} - 1}{0^-} = -\frac{|3e^{-2} - 1|}{0^-} = -(-\infty) = +\infty \tag{2.35}$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq a_{\min} \\ -\infty, & \text{se } a < a_{\min} \end{cases} \tag{2.36}$$

Quindi $x = 0$ è un punto di infinito per la funzione. Ne concludiamo che la funzione assegnata non è mai continua in $x = 0, 2$ comunque prendiamo i parametri reali a, b. Solo per $b = -1/2$ si verifica la continuità a sinistra in $x = 2$. Infine, è facile convincersi che la funzione è infinitesima per $x \to +\infty$. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{x-2} e^{-t^2-1} dt}{(x-2)^2} \tag{2.37}$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x-2} e^{-t^2-1} dt < +\infty, \tag{2.38}$$

onde

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \tag{2.39}$$

Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{e^{x-2} - 1 - a(x-2)}{x^2} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{2} \tag{2.40}$$

Cioè la retta $y = -1/2$ è asintoto orizzontale a sinistra. In fig. 2.3 riportiamo il grafico per diversi valori dei parametri.

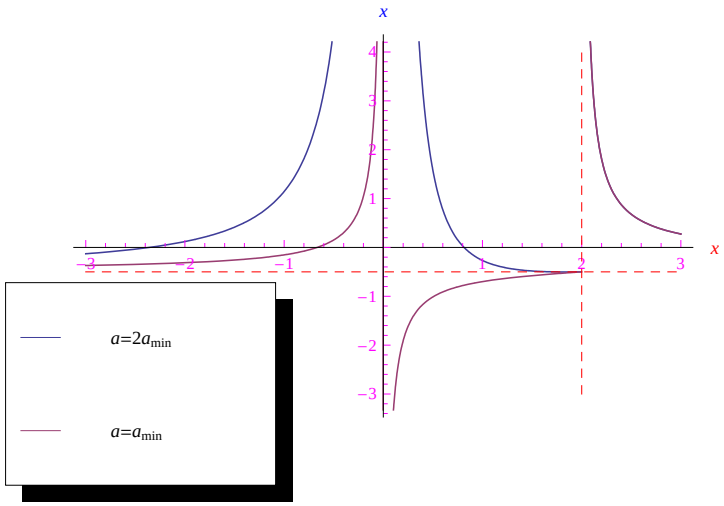


Figura 2.3: Grafico della funzione assegnata per alcuni valori di a, b.

Capitolo 3

Limiti delle funzioni trigonometriche inverse

3.1 Introduzione

In questo capitolo focalizziamo l'attenzione sui limiti delle funzioni trigonometriche inverse. A tale proposito rammentiamo il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1, \tag{3.1}$$

e il comportamento all'infinito delle funzioni $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}^{-}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}^{+}\\ &\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0^{+}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi^{-}\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2 Esercizi svolti

Esercizio 170 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 1}\frac{(\arccos x)^2}{1-x}} \tag{3.3}$$

Soluzione

Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$, poiché $\arccos 1=0$. Eseguiamo il cambio di variabile

$$t=\arccos x\underset{x\to 1}{\longrightarrow}0\Longrightarrow x=\cos t, \tag{3.4}$$

onde

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos t}=2, \tag{3.5}$$

dove abbiamo tenuto conto del limite fondamentale:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2} \tag{3.6}$$

Si noti che la regola di De L'Hospital richiede una doppia applicazione. Infatti:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\arccos x)^2}{1-x}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2\arccos x\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}}{-1}=2\lim_{x\to 1}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.7}$$
$$=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}2\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(2x)}=2\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=2$$

Esercizio 171 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin 6x)^3}{5x^3}} \tag{3.8}$$

Soluzione
Risolviamo la forma indeterminata $0/0$ con il cambio di variabile

$$t=\arcsin 6x\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0 \tag{3.9}$$

Segue

$$\sin t=6x\Longrightarrow x=\frac{1}{6}\sin t, \tag{3.10}$$

onde

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{5\cdot\frac{1}{6^3}\sin^3 t}=\frac{216}{5}\underbrace{\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^3}_{=1}=\frac{216}{5} \tag{3.11}$$

Esercizio 172 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 1^-}\frac{(\arccos x)^5}{\pi(1-x)^3}} \tag{3.12}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t=\arccos x\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}0^+, \tag{3.13}$$

onde

$$\lambda=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0^+}\frac{t^5}{(1-\cos t)^4}=\frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{t^2}{1-\cos t}\cdot\left(\frac{t}{1-\cos t}\right)^3\right] \tag{3.14}$$
$$=\frac{1}{\pi}\underbrace{\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1-\cos t}}_{=2}\cdot\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t}{1-\cos t}\right)^3$$

Calcoliamo

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t}{1-\cos t}\right)^3=\left(\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-\cos t}\right)^3 \tag{3.15}$$

Segue

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-\cos t}=\frac{1}{\underbrace{\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{t}}_{=0^+}}=\frac{1}{0^+}=+\infty \tag{3.16}$$

Pertanto

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{t}{1-\cos t}\right)^3 = +\infty \tag{3.17}$$

Conclusione

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\cdot 2\cdot(+\infty) = +\infty \tag{3.18}$$

Cioè la funzione diverge positivamente per $x \to 1^-$.

Esercizio 173 *Calcolare:*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\arcsin x\right)^4}{\sin^5 x}} \tag{3.19}$$

Soluzione

Qui non conviene eseguire il cambio di variabile $t = \arcsin x$, ma servirsi dei limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1 \tag{3.20}$$

Infatti:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^4\right] = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^4 \tag{3.21}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^4 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^4 \tag{3.22}$$

Cioè

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arcsin x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = 1 \tag{3.23}$$

Conclusione

$$\lambda = 1 \tag{3.24}$$

Esercizio 174 *Calcolare:*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)^2}{x^2\left(\arctan x\right)^2}} \tag{3.25}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Scriviamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)^2}{x^2\left(\arctan x\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2}{\left(\arctan x\right)^2}$$

Quindi dividiamo numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2}{\frac{1}{x^2}\left(\arctan x\right)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2}{\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2} = \frac{\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2}{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{1}{4}$$

Alternativamente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos x\right)^2}{x^2\left(\arctan x\right)^2} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1-\cos x}{\left(\arctan x\right)^2}\right] = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{=1/2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(\arctan x\right)^2} \tag{3.26}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\arctan x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2} \tag{3.27}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2(\arctan x)^2}=\frac{1}{4} \tag{3.28}$$

Esercizio 175 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\arccos x}} \tag{3.29}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\arccos x}=\frac{1-1}{\arccos 1}=\frac{0}{0}, \tag{3.30}$$

che può essere risolta con il cambio di variabile

$$t=\arccos x\underset{x\to 1}{\longrightarrow}0$$

Segue

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0 \tag{3.31}$$

Esercizio 176 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 1}\frac{(\arccos x)^2}{1-x}} \tag{3.32}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\arccos x)^2}{1-x}=\frac{(\arccos 1)^2}{1-1}=\frac{0}{0}, \tag{3.33}$$

che può essere risolta con il cambio di variabile

$$t=\arccos x\underset{x\to 1}{\longrightarrow}0$$

Segue

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{1-\cos t}=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2, \tag{3.34}$$

dove abbiamo utilizzato il limite fondamentale

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2} \tag{3.35}$$

Esercizio 177 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(1-x)}{(\arccos x)^4}} \tag{3.36}$$

Soluzione

Il rapporto restituisce la forma indeterminata $0/0$ che può essere risolta dividendo numeratore e denominatore per $(1-x)^2$:

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1-\cos(1-x)}{(1-x)^2}\frac{(1-x)^2}{(\arccos x)^4}\right] = \underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(1-x)}{(1-x)^2}}_{=1/2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{(\arccos x)^4} \tag{3.37}$$

Calcoliamo il secondo limite con il cambio di variabile $t = \arccos x$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{(\arccos x)^4} &= \lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos t)^2}{t^4} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)^2 \\ &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\end{aligned} \tag{3.38}$$

dove abbiamo utilizzato il limite fondamentale

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Conclusione

$$\lambda = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} \tag{3.39}$$

Esercizio 178 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(1-x)}{(\arccos x)^4}} \tag{3.40}$$

Soluzione

Anche qui abbiamo la forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(1-x)}{(\arccos x)^4} = \frac{0}{0} \tag{3.41}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per $(1-x)^2$:

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin^2(1-x)}{(1-x)^2}\frac{(1-x)^2}{(\arccos x)^4}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(1-x)}{(1-x)^2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{(\arccos x)^4} \tag{3.42}$$

Dall'esercizio precedente sappiamo che il secondo limite vale $1/4$, mentre il primo è

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(1-x)}{(1-x)^2} = \left[\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{(1-x)}\right]^2 = 1 \tag{3.43}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(1-x)}{(\arccos x)^4} = \frac{1}{4} \tag{3.44}$$

Esercizio 179 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x-\arcsin x}} \tag{3.45}$$

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x-\arcsin x}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\right) \tag{3.46}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}}_{=\lambda'}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}}_{=1}$$

Calcoliamo

$$\lambda'=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}, \tag{3.47}$$

eseguendo il cambio di variabile $t=-x^2$

$$\lambda'=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^{1/2}-1}=-2, \tag{3.48}$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad\forall\alpha\in\mathbb{R} \tag{3.49}$$

Conclusione:

$$\lambda=-2$$

Esercizio 180 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\arctan|x|}} \tag{3.50}$$

Soluzione
Risulta

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\arctan|x|}=\frac{0}{0} \tag{3.51}$$

Dividiamo numeratore e denominatore per x, svincolandoci dal valore assoluto:

$$\lambda=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}}{\frac{\arctan x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}}{\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{x}} \tag{3.52}$$

Si tratta di limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x}{x}=1$$

Conclusione

$$\lambda=\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3.53}$$

Esercizio 181 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 2x}{x^3 \arctan x}} \tag{3.54}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 2x}{x^3 \arctan x} = \frac{\sin^4 0}{0 \cdot \arctan 0} = \frac{0}{0} \tag{3.55}$$

Anziché applicare la regola di De L'Hospital, dividiamo numeratore e denominatore per x:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 2x}{x^3 \arctan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^4 2x}{x}}{\frac{x^3 \arctan x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^4 2x}{x^4}}{\frac{\arctan x}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^4 \cdot 2^4}{\frac{\arctan x}{x}} = 2^4 \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^4}{\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}}\end{aligned} \tag{3.56}$$

Qui abbiamo i limiti notevoli

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^4 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}\right)^4 = 1 \\ &\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 2x}{x^3 \arctan x} = 2^4 = 16 \tag{3.58}$$

Esercizio 182 *Calcolare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x - \arcsin x}} \tag{3.59}$$

Soluzione

Anche in questo caso si presenta la forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x - \arcsin x} = \frac{0}{0} \tag{3.60}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x - \arcsin x} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - 1} \\ &= 4 \underbrace{\lim_{x\to 0} \sqrt{1-x^2}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2} - 1}\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}-1}$. A tale scopo razionalizziamo il denominatore:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2} - 1} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + 1}{\sqrt{1-x^2} + 1}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(\sqrt{1-x^2} + 1\right)}{1 - x^2 - 1} \\ &= -4 \lim_{x\to 0} x\left(\sqrt{1-x^2} + 1\right) = 0\end{aligned} \tag{3.61}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x-\arcsin x}=0 \tag{3.62}$$

Esercizio 183 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{(1-\cos x)^2}} \tag{3.63}$$

Soluzione

La presenza di $1-\cos x$ suggerisce di ricondurre al limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2=\frac{1}{4} \tag{3.64}$$

A tale scopo dividiamo numeratore e denominatore per x^4:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{(1-\cos x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2-\arctan x^2}{x^4}}{\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{x^4}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2}_{=1/4}} \tag{3.65}$$

Calcoliamo il limite a numeratore eseguendo il cambio di variabile $t=x^2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{x^4}&=\lim_{t\to 0}\frac{t-\arctan t}{t^2}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{2t}\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0}{1+0}=0\end{aligned}$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{(1-\cos x)^2}=\frac{0}{\frac{1}{4}}=0 \tag{3.66}$$

Esercizio 184 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to+\infty}x\arcsin\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}} \tag{3.67}$$

Soluzione

Calcoliamo preliminarmente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x^2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{=1}, \tag{3.68}$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+ \tag{3.69}$$

onde

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}=0^+$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x \arcsin\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = (+\infty)\cdot\arcsin\left(0^+\right) = 0\cdot\infty \tag{3.70}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 1/x$, per cui

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \sqrt{t^2+t^4}$$

Segue

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to0^+}\frac{\arcsin\sqrt{t^2+t^4}}{t} = \frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2-t^4}}\cdot\frac{2t+4t^3}{2\sqrt{t^2+t^4}}}{1} \\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{t+2t^3}{\sqrt{(t^2+t^4)(1-t^2-t^4)}} = \lim_{t\to0^+}\frac{t+2t^3}{|t|\sqrt{(1+t^2)(1-t^2-t^4)}} \\ &= \lim_{t\to0^+}\frac{t+2t^3}{t\sqrt{(1+t^2)(1-t^2-t^4)}} = \lim_{t\to0^+}\frac{1+2t^2}{\sqrt{(1+t^2)(1-t^2-t^4)}} = 1\end{aligned} \tag{3.71}$$

Esercizio 185 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to-\infty} x\arcsin\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}} \tag{3.72}$$

Soluzione
Dall'esercizio precedente

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x^2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}_{=1} \tag{3.73}$$

mentre

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = -\frac{1}{-\infty} = -\left(0^-\right) = 0^+, \tag{3.74}$$

onde

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = 0^+ \tag{3.75}$$

Quindi

$$\lim_{x\to-\infty} x\arcsin\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = (-\infty)\cdot\arcsin\left(0^+\right) = 0\cdot\infty \tag{3.76}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 1/x$, per cui

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \sqrt{t^2+t^4}$$

Segue

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to0^-}\frac{\arcsin\sqrt{t^2+t^4}}{t} = \frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to0^-}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2-t^4}}\cdot\frac{2t+4t^3}{2\sqrt{t^2+t^4}}}{1} \\ &= \lim_{t\to0^-}\frac{t+2t^3}{\sqrt{(t^2+t^4)(1-t^2-t^4)}} = \lim_{t\to0^-}\frac{t+2t^3}{|t|\sqrt{(1+t^2)(1-t^2-t^4)}} \\ &= -\lim_{t\to0^-}\frac{t+2t^3}{t\sqrt{(1+t^2)(1-t^2-t^4)}} = -\lim_{t\to0^-}\frac{1+2t^2}{\sqrt{(1+t^2)(1-t^2-t^4)}} = -1\end{aligned} \tag{3.77}$$

Esercizio 186 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \arctan x - \sqrt{x^2+1}\right)} \tag{3.78}$$

Soluzione
Il limite restituisce la forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \arctan x - \sqrt{x^2+1}\right) = (+\infty) + \frac{\pi}{2} - (+\infty) = \infty - \infty \tag{3.79}$$

Isoliamo il termine relativo all'$\arctan x$

$$\lambda = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \arctan x}_{=\frac{\pi}{2}^-} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}_{=\lambda'} \tag{3.80}$$

Calcoliamo il limite λ':

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = \infty - \infty$$

Razionalizziamo il numeratore

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0^-\end{aligned}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x + \arctan x - \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{\pi}{2}^- + 0^- = \frac{\pi}{2}^- \tag{3.81}$$

Cioè la funzione è convergente per $x \to +\infty$, i.e. la retta $2y - \pi = 0$ è asintoto orizzontale a destra per il diagramma cartesiano della funzione.

Esercizio 187 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}} \tag{3.82}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{\overbrace{\arctan 1}^{=\pi/4} - \frac{\pi}{4}}{1 - 1} = \frac{0}{0} \tag{3.83}$$

Anzichè applicare la regola di De L'Hospital, forziamo l'indeterminazione con la sostituzione

$$t = \arctan x - \frac{\pi}{4} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0, \tag{3.84}$$

da cui

$$\arctan x = t + \frac{\pi}{4} \Longrightarrow x = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{3.85}$$

Rammentando le formule di addizione

$$\tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan t + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan t \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan t + 1}{1 - \tan t}, \tag{3.86}$$

onde

$$x = \frac{\tan t + 1}{1 - \tan t}, \tag{3.87}$$

cosicché il limite diventa:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{\frac{\tan t + 1}{1 - \tan t} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,(1 - \tan t)}{2\tan t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0} (1 - \tan t)}_{=1} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{3.88}$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$$

Esercizio 188 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to -\infty} x \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\pi}{2} \right)} \tag{3.89}$$

Soluzione
Calcoliamo preliminarmente

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \underbrace{\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|}}_{=-1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}_{=1}, \tag{3.90}$$

onde

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

Quindi

$$\lim_{x\to -\infty} x \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\pi}{2} \right) = (-\infty) \left[\underbrace{\arcsin(-1)}_{=-\pi/2} + \frac{\pi}{2} \right] = 0 \cdot \infty \tag{3.91}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x} \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} 0^- \tag{3.92}$$

per cui

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{1}{t}}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}} = \frac{|t|}{t\sqrt{1+t^2}} \tag{3.93}$$

Osserviamo che per un assegnato $\Delta > 0$

$$\forall x \in (-\infty, -\Delta)\,, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \forall t \in (-\delta, 0)\,,$$

essendo $\delta = 1/\Delta$. Ciò implica

$$\lambda = \lim_{t\to 0^-} \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{\pi}{2}\right)}{t} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{d}{dt}\left[\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) + \frac{\pi}{2}\right]}{\frac{d}{dt}(t)} \tag{3.94}$$

Calcoliamo a parte la derivata del numeratore che si riduce a

$$\frac{d}{dt}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \tag{3.95}$$

A tale scopo definiamo la variabile ausiliaria

$$\xi(t) = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\arcsin\xi(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d}{dt}\xi(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}\cdot(-1)\frac{d}{dt}\left(1+t^2\right)^{-1/2} \\ &= \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}\left(1+t^2\right)^{-3/2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^3}}\end{aligned} \tag{3.96}$$

Cio

$$\frac{d}{dt}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{t}{|t|\left(1+t^2\right)} \tag{3.97}$$

Pertanto

$$\lambda = \lim_{t\to 0^-}\frac{t}{|t|\left(1+t^2\right)} = \underbrace{\lim_{t\to 0^-}\frac{t}{|t|}}_{=-1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{1+t^2}}_{=1} \tag{3.98}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\pi}{2}\right) = -1 \tag{3.99}$$

ovvero la funzione converge a -1 per $x\to-\infty$, i.e. la retta $y+1=0$ è asintoto orizzontale a sinistra per il diagramma cartesiano della funzione.

Esercizio 189 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x-\arctan x} \tag{3.100}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$ per cui applichiamo subito la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - x}{x-\arctan x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\arcsin x - x)}{\frac{d}{dx}(x-\arctan x)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}_{=1},\end{aligned}$$

mentre l'altro limite è riconducibile ad un limite fondamentale, attraverso il cambio di variabile

$$t = -x^2 \tag{3.101}$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-(1+t^2)^{1/2}}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t^2)^{1/2}-1}{t}=\frac{1}{2}, \tag{3.102}$$

giacché

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\alpha, \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \tag{3.103}$$

da cui il risultato.

Capitolo 4

Limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

4.1 Introduzione

Per il calcolo di limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche occorre memorizzare i seguenti limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}\quad (a>0,\ a\neq 1) \tag{4.1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

Dagli ultimi due limiti segue che le funzioni

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad g(x)=(1+x)^{1/x},$$

riconducibili l'una all'altra attraverso il cambio di variabile $t=1/x$, convergono al numero e rispettivamente per $x\to\pm\infty$ e $x\to 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=e,\qquad \lim_{x\to 0}g(x)=e \tag{4.2}$$

Evidentemente

$$\lim_{x\to 0}f(x)\neq e,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}g(x)\neq e \tag{4.3}$$

Tuttavia i predetti limiti capitano sovente, per cui vale la pena calcolarli. Anzi, è preferibile tracciare il grafico delle funzioni f, g, visto che spesso si fa confusione scrivendo ad esempio:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\qquad \textbf{ERRATO!}$$

Iniziamo con la funzione f il cui insieme di definizione X_1 è tale che

$$1+\frac{1}{x}>0\iff\frac{x+1}{x}>0, \tag{4.4}$$

che si risolve facilmente disegnando il diagramma riportato in fig. 4.1.

Ne consegue che il campo di esistenza di f è

$$X_1=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty) \tag{4.5}$$

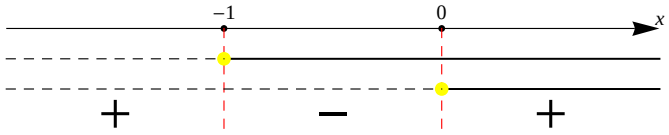


Figura 4.1: Ricerca delle soluzioni della disequazione (4.4).

Studiamo il comportamento della funzione in un intorno sinistro di $x = -1$ calcolando:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}} = \frac{1}{(0^+)^{+1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{4.6}$$

Il secondo passaggio si giustifica osservando che

$$\lim_{x\to -1^-} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^+ \tag{4.7}$$

Ci si può aiutare per via grafica: il grafico di $1 + 1/x$ è il grafico di $1/x$ traslato di 1 nella direzione dell'asse y positivo, come illustrato in fig.4.2.

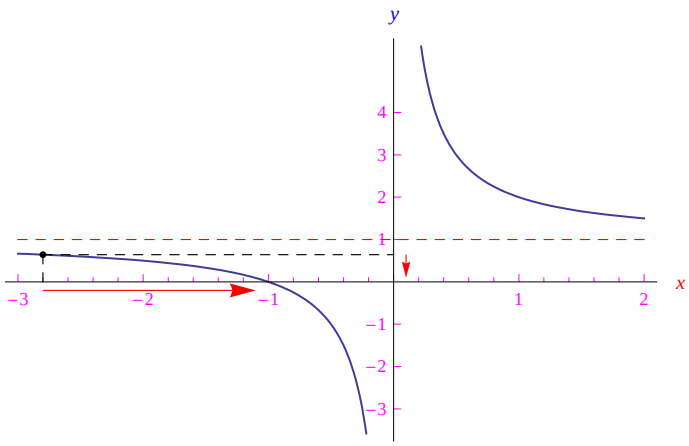


Figura 4.2: Grafico della funzione $1 + \frac{1}{x}$. Per $x \to -1^-$, è $1 + \frac{1}{x} \to 0^+$.

La divergenza positiva della funzione ci sta dicendo che la retta $x = -1$ è asintoto verticale a sinistra per il grafico della funzione. Studiamo ora il comportamento della funzione in un intorno destro di $x = 0$ calcolando:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \infty^0 \tag{4.8}$$

Come vedremo più avanti, tale risultato è una nuova forma indeterminata, e in casi come questi viene utilizzato il seguente artificio:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\infty \tag{4.9}$$

Abbiamo così trasformato la forma indeterminata ∞^0 nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ che ben conosciamo. In questo caso operiamo un cambio di variabile:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{1+t} = 0^+$$

Segue

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{0^+} = 1^+ \tag{4.10}$$

Quindi $x=1$ è un punto di discontinuità eliminabile. Il comportamento all'infinito è regolato dai limiti che già conosciamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{4.11}$$

onde la retta $y=e$ è asintoto orizzontale sia destra che a sinistra. In fig. 4.3 riportiamo il grafico completo.

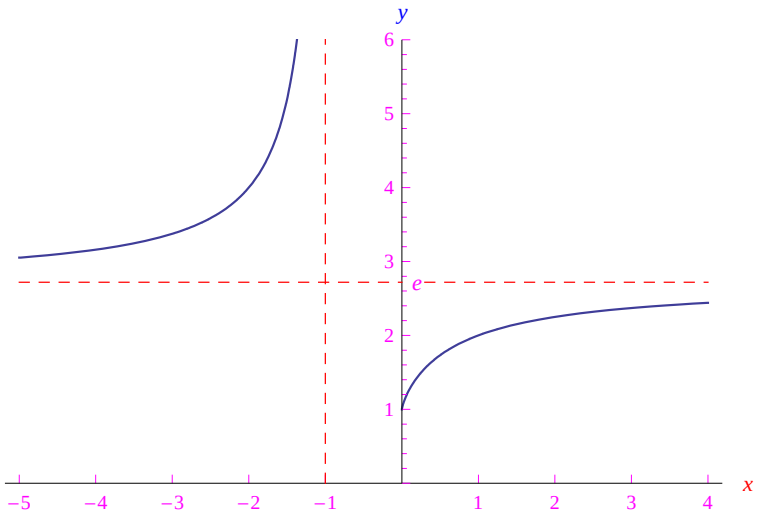


Figura 4.3: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Passiamo alla funzione $g(x)$. Qui l'insieme di definizione X_2 è tale che

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x\neq 0 \end{cases} \iff X_2 = (-1,0)\cup(0,+\infty) \tag{4.12}$$

Il comportamento della funzione in un intorno del punto di accumulazione $x=0$ è regolato dal limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \tag{4.13}$$

Studiamo il comportamento in un intorno destro di $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{(1+x)^{-1/x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{4.14}$$

Anche qui ci si può convincere della correttezza del secondo passaggio utilizzando la via grafica. Segue che la retta $x = -1$ è asintoto verticale a destra per il diagramma cartesiano della funzione. Studiamo il comportamento della funzione per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+x)^{1/x} = \infty^0 \tag{4.15}$$

Utilizziamo l'artificio:

$$\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} (1+x)^{1/x} = e^{0^+} = 1^+ \tag{4.16}$$

Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a destra. In fig. 4.4 riportiamo il grafico completo.

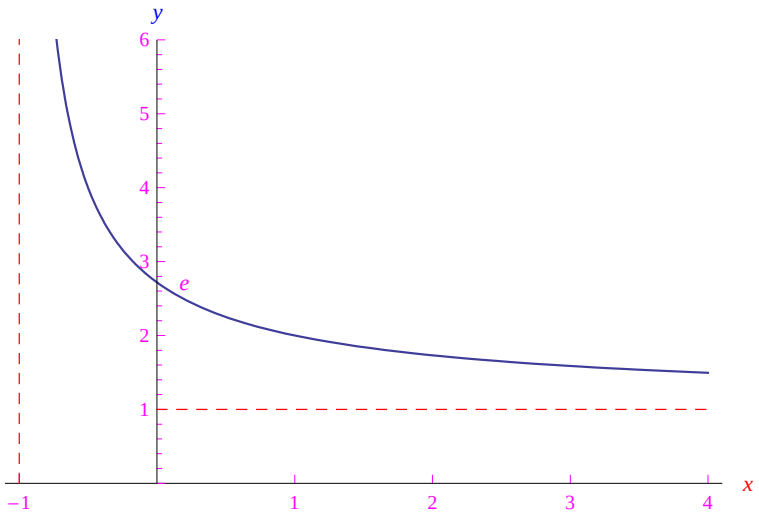


Figura 4.4: Diagramma cartesiano della funzione $g(x) = (1+x)^{1/x}$.

Siamo quindi in grado di completare la nostra tabella:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \\ &\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^+, \qquad \lim_{x\to+\infty} (1+x)^{1/x} = 1^+ \end{aligned} \tag{4.17}$$

***

I risultati precedenti si generalizzano al calcolo dei seguenti limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0} (1+\alpha x)^{1/x}, \qquad (\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}) \tag{4.18}$$

Per il primo limite eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{x}{\alpha} \tag{4.19}$$

Abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\alpha t}=\lim_{t\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^\alpha=\left[\underbrace{\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{=e}\right]^\alpha$$

Cioè

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha \tag{4.20}$$

L'altro limite

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x}$$

è riconducibile al primo attraverso il cambio di variabile

$$\tau=\frac{1}{x}$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x}=\lim_{\tau\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\tau}\right)^\tau=e^\alpha \tag{4.21}$$

Restano da calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x,\qquad\lim_{x\to+\infty}(1+\alpha x)^{1/x} \tag{4.22}$$

Per il primo eseguiamo il cambio di variabile $t=x/\alpha$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=\left[\underbrace{\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}_{=1}\right]^\alpha=1 \tag{4.23}$$

Il secondo è riconducibile al primo ponendo $\tau=1/x$, per cui

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\alpha x)^{1/x}=1 \tag{4.24}$$

Esempio 5 *Calcoliamo*

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{3x+1}\right)^{x^3} \tag{4.25}$$

Per quanto precede:

$$\lambda=\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{3x+1}\right)\right]^{\lim_{x\to+\infty}x^3} \tag{4.26}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{3} \tag{4.27}$$

L'altro limite

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \tag{4.28}$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{3x+1}\right)^{x^3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=0^+ \tag{4.29}$$

Osservazione 6 *Dal momento che*

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \tag{4.30}$$

si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+2}{3x+1}\right)^{x^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty} = 0^+, \tag{4.31}$$

Esercizio 190 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}} \tag{4.32}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$, per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{1 - \cos x} \tag{4.33}$$

La presenza di $1 - \cos x$ suggerisce l'utilizzo del limite fondamentale:

$$\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{4.34}$$

per cui scriviamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{1 - \cos x} &= \lim_{x\to0} \left(\frac{e^x + e^{-x} - 2x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x}\right) \\ &= \lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{x^2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{x^2}{1 - \cos x}}_{=2} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 \\ \Longrightarrow \lim_{x\to0} \frac{e^x + e^{-x} - 2x}{1 - \cos x} = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2 \tag{4.37}$$

Esercizio 191 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = x\left(1 - e^{1/x}\right) \tag{4.38}$$

in un intorno di $x = 0$.

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. È preferibile studiare dapprima il segno della funzione:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x\left(1 - e^{1/x}\right) > 0$$

Osserviamo che

$$1 - e^{1/x} > 0 \Longleftrightarrow e^{1/x} < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} < 0 \Longleftrightarrow x < 0$$

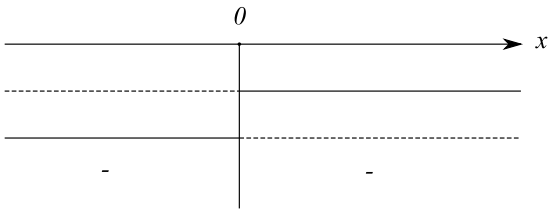


Figura 4.5: Studio del segno di $x\left(1-e^{1/x}\right)$.

Il segno del prodotto si ricava dal diagramma di fig. 4.5, da cui vediamo che

$$f(x)<0,\ \ \forall x\in X$$

Cioè la funzione è negativa in tutto il suo insieme di definizione.

Calcoliamo il limite destro

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(1-e^{1/x}\right)=0\cdot\left(1-e^{\frac{1}{0^+}}\right)=0\cdot\left(1-e^{+\infty}\right)=0\cdot\infty$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t=\frac{1}{x},$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(1-e^{1/x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^t}{t}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{H}}{=}-\lim_{t\to+\infty}e^t=-\left(+\infty\right)=-\infty \tag{4.39}$$

Calcoliamo il limite sinistro

$$\lim_{x\to 0^-} x\left(1-e^{1/x}\right)=0\cdot\left(1-e^{\frac{1}{0^-}}\right)=0\cdot\left(1-e^{-\infty}\right)=0 \tag{4.40}$$

Dallo studio del segno

$$\lim_{x\to 0^-} x\left(1-e^{1/x}\right)=0^-$$

Ciò implica che $x=0$ è un punto di discontinuità di seconda specie. In fig. 4.6 riportiamo il grafico della funzione in un assegnato intorno di $x=0$.

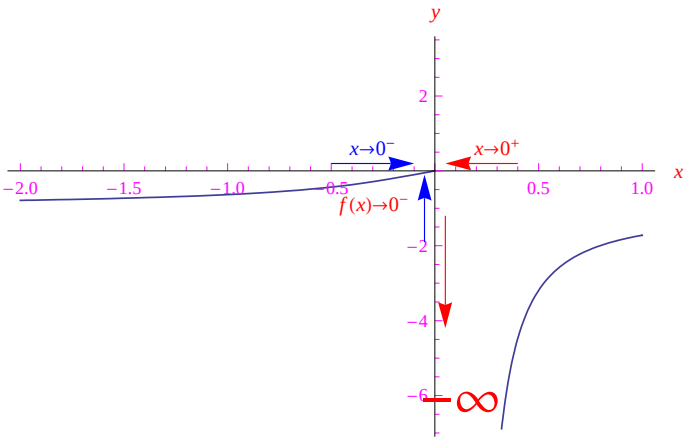


Figura 4.6: Diagramma cartesiano della funzione $f(x)=x\left(1-e^{1/x}\right)$ in un intorno di $x=0$.

Esercizio 192 *Studiare il comportamento all'infinito della funzione dell'esercizio precedente.*

Soluzione
Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-e^{1/x}\right) = (+\infty)\left(1-e^{0^+}\right) = 0\cdot\infty \tag{4.41}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = 1/x$ il limite diventa:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-e^{1/x}\right) = \lim_{t\to0^+}\frac{1-e^t}{t} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} -\lim_{t\to0^+} e^t = -1^-$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(1-e^{1/x}\right) \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to0^-}\frac{1-e^t}{t} = -1^+$$

Ne concludiamo che la retta $y=-1$ è asintoto orizzontale, come mostrato in fig. 4.7.

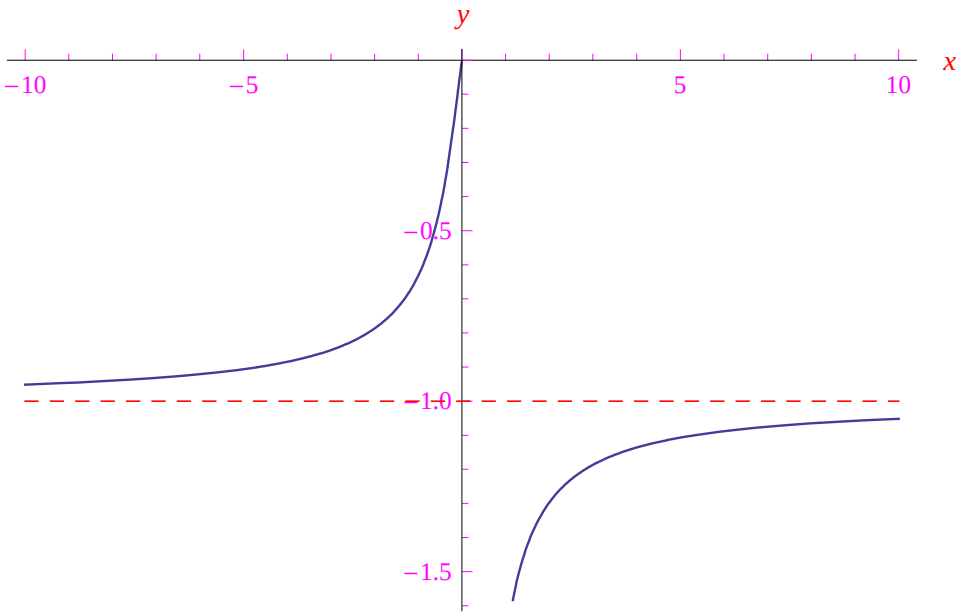


Figura 4.7: La retta $y=1$ (tratteggiata) è asintoto orizzontale per il diagramma cartesiano della funzione $f(x) = x\left(1-e^{1/x}\right)$.

Esercizio 193 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x - \ln x}} \tag{4.42}$$

Soluzione
Per una nota proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos x}{\ln\sin x-\ln x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos x}{\ln\frac{\sin x}{x}} = \frac{0}{0} \tag{4.43}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lambda = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos x}{\ln\frac{\sin x}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}} = -\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin^2 x}{x\cos x-\sin x}}_{\lambda'} \tag{4.44}$$

Calcoliamo

$$\lambda' = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(1-\cos^2 x\right)}{x\cos x - \sin x} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\left(1+\cos x\right)}_{=2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(1-\cos x\right)}{x\cos x - \sin x}}_{\lambda''} \tag{4.45}$$

Il limite λ'' può essere calcolato agevolmente dividendo numeratore e denominatore per x^3:

$$\lambda'' = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(1-\cos x\right)}{x\cos x - \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}}{\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}} \tag{4.46}$$

A numeratore abbiamo il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{4.47}$$

A denominatore

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3} \tag{4.48}$$

Quindi

$$\lambda'' = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} \Longrightarrow \lambda' = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -3 \Longrightarrow \lambda = -\left(-3\right) = 3 \tag{4.49}$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos x}{\ln\sin x - \ln x} = 3 \tag{4.50}$$

Esercizio 194 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x}{x - \sin x}} \tag{4.51}$$

Soluzione

Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$ per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x}{x - \sin x} &= \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} - 2}{1-\cos x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1-x-\left(1+x\right)\left(1-x\right)^2}{\left(1+x\right)\left(1-x^2\right)\left(1-\cos x\right)} \\ &= 2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+x\right)^2}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-x-\left(1+x\right)\left(1-x\right)^2}{\left(1-x\right)\left(1-\cos x\right)}}_{\lambda'}\end{aligned} \tag{4.52}$$

Calcoliamo λ'

$$\lambda' = \lim_{x\to 0}\frac{1-x-\left(1+x\right)\left(1-x\right)^2}{\left(1-x\right)\left(1-\cos x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x\right)\left[1-\left(1-x^2\right)\right]}{\left(1-x\right)\left(1-\cos x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = 2,$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{4.53}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x}{x - \sin x} = 4 \tag{4.54}$$

Esercizio 195 *Studiare i punti di discontinuità della funzione*

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}} \tag{4.55}$$

Soluzione
La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Quindi calcoliamo il limite destro

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \tag{4.56}$$

Passiamo al limite sinistro

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0^+} = 1^- \tag{4.57}$$

Ne consegue che $x = 0$ è una discontinuità di prima specie. Il salto della funzione è

$$s(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \tag{4.58}$$

In fig. 4.8 è riportato il diagramma cartesiano della funzione in un intorno di $x = 0$.

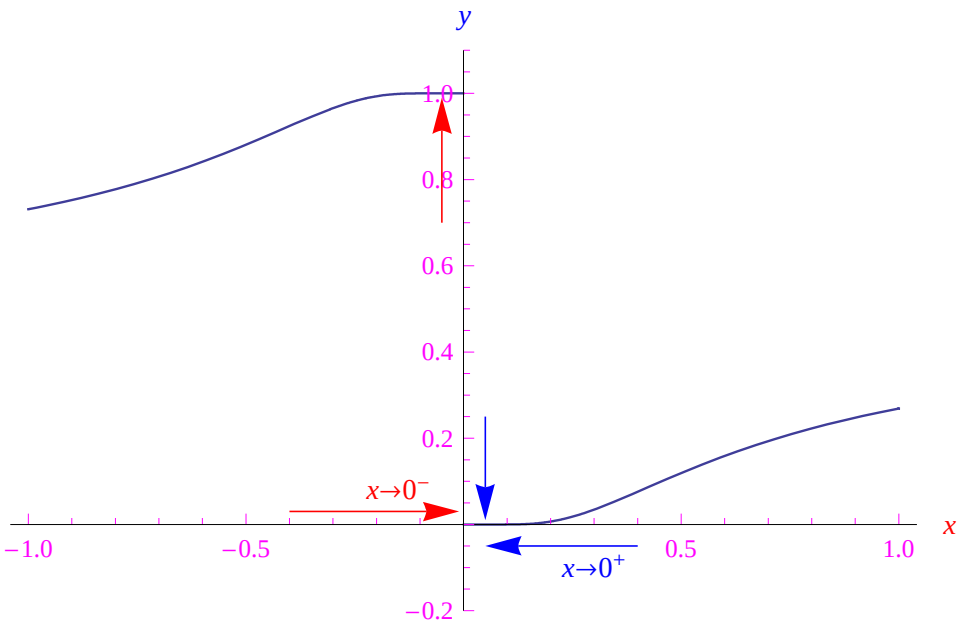


Figura 4.8: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ in un intorno di $x = 0$.

4.2 Le forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0

Consideriamo una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ la cui espressione analitica è:

$$f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)},$$

essendo φ e ψ funzioni reali.

Teorema 7 *Se x_0 è punto di accumulazione per X e risulta:*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lambda_1>0,\ \lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lambda_2, \tag{4.59}$$

allora:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right]^{\lim_{x\to x_0}\psi(x)} \tag{4.60}$$

Dimostrazione. Scriviamo:

$$f(x)=e^{\ln f(x)}=e^{\ln\varphi(x)^{\psi(x)}}=e^{\psi(x)\ln\varphi(x)},\qquad \forall x\in X, \tag{4.61}$$

cosicchè:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}f(x)&=\lim_{x\to x_0}e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}\\&=e^{\lim_{x\to x_0}[\psi(x)\ln\varphi(x)]}\end{aligned} \tag{4.62}$$

Per un noto teorema (limite del prodotto di funzioni):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[\psi(x)\ln\varphi(x)]&=\lim_{x\to x_0}\psi(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\ln\varphi(x)\\&=\lim_{x\to x_0}\psi(x)\cdot\ln\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\\&=\lambda_2\ln\lambda_1,\end{aligned} \tag{4.63}$$

Cioè:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=e^{\lambda_2\ln\lambda_1}=\lambda_1^{\lambda_2} \tag{4.64}$$

■

Osserviamo che $\varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta in una forma indeterminata quando il prodotto $\psi(x)\ln\varphi(x)$ si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Ciò accade in tre casi distinti:

1. $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0\Longrightarrow\varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta nella forma indeterminata 0^0
2. $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1\Longrightarrow\varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta nella forma indeterminata 1^∞
3. $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty\Longrightarrow\varphi(x)^{\psi(x)}$ si presenta nella forma indeterminata ∞^0

Esempio 8 *Calcoliamo*

$$\lambda=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x \tag{4.65}$$

Riesce

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=1^\infty \tag{4.66}$$

Il limite è riconducibile a limiti fondamentali. Infatti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \tag{4.67}$$

Abbiamo il limite fondamentale

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, \tag{4.68}$$

mentre

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{(-1)}{x}\right]^{x}=e^{-1} \tag{4.69}$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\frac{e^{-1}}{e}=\frac{1}{e^{2}} \tag{4.70}$$

Proponiamo un algoritmo per risolvere la forma indeterminata 1^{∞}. Assumendo

$$f(x)=\varphi(x)^{\psi(x)}, \tag{4.71}$$

con

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1,\quad \lim_{x\to x_0}\psi(x)=\pm\infty \tag{4.72}$$

Segue

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=1^{\infty} \tag{4.73}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=1\Longleftrightarrow\exists\chi(x)\mid\begin{cases}\varphi(x)=1+\chi(x)\\ \lim_{x\to x_0}\chi(x)=0\end{cases} \tag{4.74}$$

Cioè la funzione $\varphi(x)$ converge a 1 per $x\to x_0$, se e solo se esiste una funzione $\chi(x)$ infinitesima in $x=x_0$. Con tale posizione il limite si scrive:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\varphi(x)^{\psi(x)}&=\lim_{x\to x_0}\left[1+\chi(x)\right]^{\psi(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[1+\chi(x)^{\frac{1}{\chi(x)}}\right]^{\chi(x)\psi(x)}\\ &=\left\{\lim_{x\to x_0}\left[1+\chi(x)\right]^{\frac{1}{\chi(x)}}\right\}^{\lim_{x\to x_0}\chi(x)\psi(x)}\end{aligned} \tag{4.75}$$

Calcoliamo il primo limite con il cambio di variabile

$$t=\chi(x)\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}0, \tag{4.76}$$

per cui

$$\lim_{x\to x_0}\left[1+\chi(x)\right]^{\frac{1}{\chi(x)}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \tag{4.77}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=e^{\lim_{x\to x_0}\chi(x)\psi(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}[\varphi(x)-1]\psi(x)} \tag{4.78}$$

Applichiamo questo procedimento al limite dell'esempio precedente:

$$\lambda=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} \tag{4.79}$$

Qui è

$$\varphi(x)=\frac{x-1}{x+1},\quad \psi(x)=x,$$

onde

$$\chi(x)=\varphi(x)-1=\frac{x-1}{x+1}-1=\frac{x-1}{x+1}=\frac{-2}{x+1}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0 \tag{4.80}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{-\frac{2x}{x+1}} \tag{4.81}$$

$$=\left\{\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]}_{=e}\right\}^{\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{2x}{x+1}\right)}_{=-2}}$$

$$=e^{-2}$$

Dall'esecuzione dei calcoli, vediamo che l'algoritmo proposto ha un costo computazionale più alto di quello utilizzato nel predetto esempio. È tuttavia vantaggioso nei casi in cui il limite è più complicato.

4.3 Esercizi svolti

Esercizio 196 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}} \tag{4.82}$$

Soluzione

Calcoliamo dapprima il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1, \tag{4.83}$$

per cui il limite assegnato si presenta sotto la forma indeterminata 1^{∞}. Applichiamo l'algoritmo visto in precedenza:

$$\varphi(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}, \tag{4.84}$$

si ha

$$\chi(x)=\varphi(x)-1=\frac{x^2+2}{x^2+1}-1=\frac{1}{x^2+1}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0 \tag{4.85}$$

Segue

$$\lambda=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\chi(x)\right]^{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2} \tag{4.86}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right]^{\frac{x^2}{x^2+1}}=\left[\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}\right]^{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+1}}$$

Il limite nell'esponente è manifestamente 1, mentre l'altro limite è un fondamentale. Basta infatti eseguire il cambio di variabile

$$t=\frac{1}{x^2+1}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0, \tag{4.87}$$

per cui

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e \tag{4.88}$$

Conclusione

$$\lambda = e^1 = e \tag{4.89}$$

Esercizio 197 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x}} \tag{4.90}$$

Soluzione

Anche qui abbiamo la forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x} = 1^\infty \tag{4.91}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} = \left[\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} \tag{4.92}$$

All'esponente abbiamo un limite fondamentale che è pari a 1, mentre

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \tag{4.93}$$

si calcola con il cambio di variabile

$$t = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{4.94}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \tag{4.95}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{1/x} = e^1 = e \tag{4.96}$$

Esercizio 198 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}} \tag{4.97}$$

Soluzione

Forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = 1^\infty \tag{4.98}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} &= \lim_{x\to 0} [1+(\cos x-1)]^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\frac{\cos x-1}{x}} \\ &= \left\{\lim_{x\to 0} [1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}\end{aligned} \tag{4.99}$$

Calcoliamo a parte i due limiti. Risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0, \tag{4.100}$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \tag{4.101}$$

L'altro limite si calcola con il cambio di variabile

$$t = \cos x - 1, \tag{4.102}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}\left[1+(\cos x-1)\right]^{\frac{1}{\cos x-1}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \tag{4.103}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}=e^{0}=1 \tag{4.104}$$

Esercizio 199 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} \tag{4.105}$$

Soluzione
Forma indeterminata 1^{∞}:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty} \tag{4.106}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right\}^{\frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}\\&=\left\{\underbrace{\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}}_{=e}\right\}^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}\end{aligned} \tag{4.107}$$

Calcoliamo il limite nell'esponente

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^{2}}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=0 \tag{4.108}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{0}=1 \tag{4.109}$$

Esercizio 200 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\cot x}} \tag{4.110}$$

Abbiamo la forma indeterminata 1^{∞}:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\cot x}=1^{\infty}$$

Applichiamo dunque il procedimento standard:

$$\frac{\sin x}{x}=1+\chi(x)\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\chi(x)=0, \tag{4.111}$$

da cui ricaviamo $\chi(x)$

$$\chi(x)=\frac{\sin x-x}{x} \tag{4.112}$$

Segue

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}\right]^{\frac{(\sin x - x)\cot x}{x}} = \lambda_1^{\lambda_2}, \tag{4.113}$$

essendo

$$\lambda_1 = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x - x}}, \quad \lambda_2 = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)\cot x}{x} \tag{4.114}$$

Il primo limite si calcola con il cambio di variabile

$$t = \chi(x) = \frac{\sin x - x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{4.115}$$

onde

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t} = e \tag{4.116}$$

Calcoliamo λ_2:

$$\lambda_2 = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)\cos x}{x\sin x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} \tag{4.117}$$

Riesce

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \tag{4.118}$$

Dividendo numeratore e denominatore per x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x - 1}{x}}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{0}{1+1} = 0, \tag{4.119}$$

dove abbiamo utilizzato i limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0, \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4.120}$$

Quindi

$$\lambda_2 = 1\cdot 0 = 0 \Longrightarrow \lambda = \lambda_1^{\lambda_2} = e^0 = 1$$

Ne concludiamo che il limite assegnato vale 1.

4.3.1 Complementi

Studiamo il comportamento in un intorno destro di $x = 0$ della funzione:

$$f(x) = (\sin x)^{\psi(x)}, \tag{4.121}$$

dove $\psi(x)$ è infinitesima per $x \to 0^+$ ed derivabile in un intorno destro di $x = 0$ per un "numero sufficiente" di volte, in modo da poter applicare la regola di De L'Hospital.

Abbiamo

$$\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^0, \tag{4.122}$$

per cui utilizziamo l'artificio

$$f(x) = e^{\ln(\sin x)^{\psi(x)}} = e^{\psi(x)\ln\sin x} \tag{4.123}$$

Quindi

$$\lambda = e^{\lim_{x\to 0^+}\psi(x)\ln\sin x} \tag{4.124}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0^+} \psi(x) \ln \sin x = 0 \cdot \ln\left(0^+\right) = 0 \cdot (-\infty) = 0 \cdot \infty \tag{4.125}$$

Riconduciamola alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ in modo da poter applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \psi(x) \ln \sin x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\psi(x)}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}} \\ &= -\lim_{x\to 0^+} \left\{ \cos x \cdot \frac{[\psi(x)]^2}{\psi'(x)} \right\} \end{aligned} \tag{4.126}$$

Pertanto

$$\ln \lambda = -\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \cos x}_{=1^-} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{[\psi(x)]^2}{\psi'(x) \sin x}}_{\lambda'} \tag{4.127}$$

Ovviamente l'esistenza del limite λ' dipende dalla funzione $\psi(x)$. Supponiamo che $\psi(x)$ sia la funzione potenza di esponente reale positivo:

$$\psi(x) = x^\alpha, \quad (\alpha > 0) \tag{4.128}$$

Segue:

$$\psi'(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$

onde

$$\lambda' = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2\alpha}}{\alpha x^{\alpha-1} \sin x} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{\sin x} = \frac{1}{\alpha} \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha}_{=0^+} = 0^+ \tag{4.129}$$

Ciò implica

$$\ln \lambda = -1^- \cdot 0^+ = 0^- \Longrightarrow \lambda = e^{0^-} = 1^- \tag{4.130}$$

ovvero

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{x^\alpha} = 1^-, \quad (\alpha > 0) \tag{4.131}$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile per tale funzione. Eseguendo un esperimento computazionale con Mathematica, siamo tentati di scrivere

$$\lim_{\alpha\to+\infty} f_\alpha(x) = \theta(1 - x), \quad \forall x \in (0, +\infty),$$

essendo

$$f_\alpha(x) = (\sin x)^{x^\alpha}, \tag{4.132}$$

mentre $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside.

Tale conclusione è corroborata dai grafici riportati nelle figure 4.9-4.10-4.11-4.12.

Riprendiamo la (4.127) con la condizione aggiuntiva:

$$\psi(x) \mid \exists\lambda = \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\psi(x)}, \tag{4.133}$$

per cui la (4.127) può essere scritta come

$$\ln \lambda = -\lim_{x\to 0^+} \frac{[\psi(x)]^2}{\psi'(x) \sin x} \tag{4.134}$$

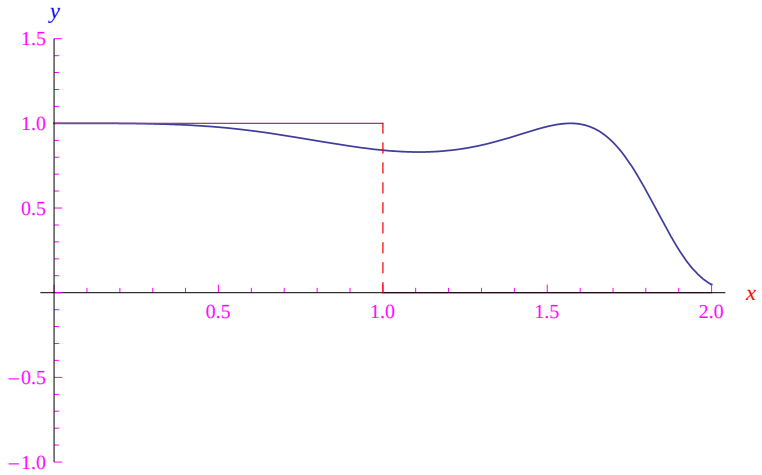


Figura 4.9: Diagramma cartesiano delle funzioni $f_5(x) = (\sin x)^{x^5}$ e $\theta(1-x)$ per $x > 0$.

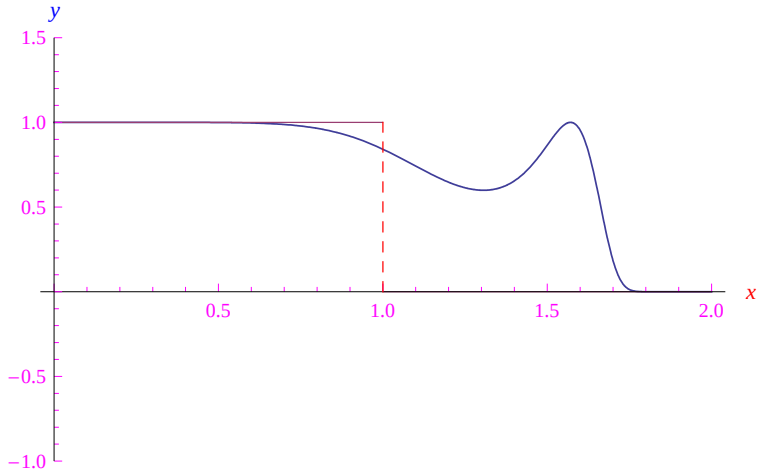


Figura 4.10: Diagramma cartesiano delle funzioni $f_{10}(x) = (\sin x)^{x^{10}}$ e $\theta(1-x)$ per $x > 0$.

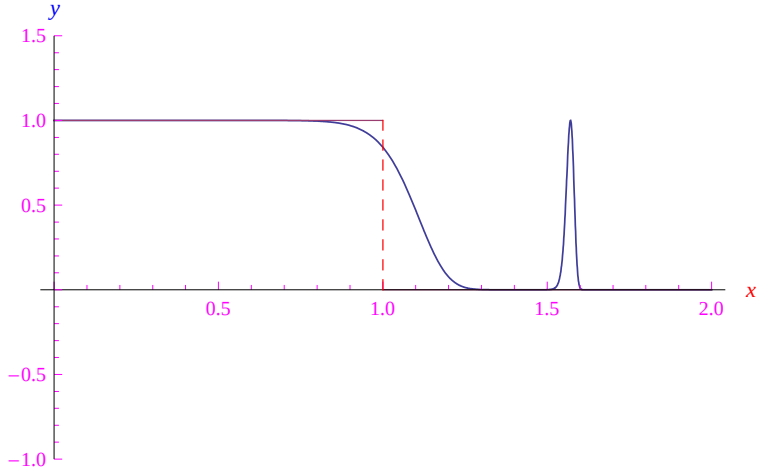


Figura 4.11: Diagramma cartesiano delle funzioni $f_{2\pi^2}(x) = (\sin x)^{x^{2\pi^2}}$ e $\theta(1-x)$ per $x > 0$.

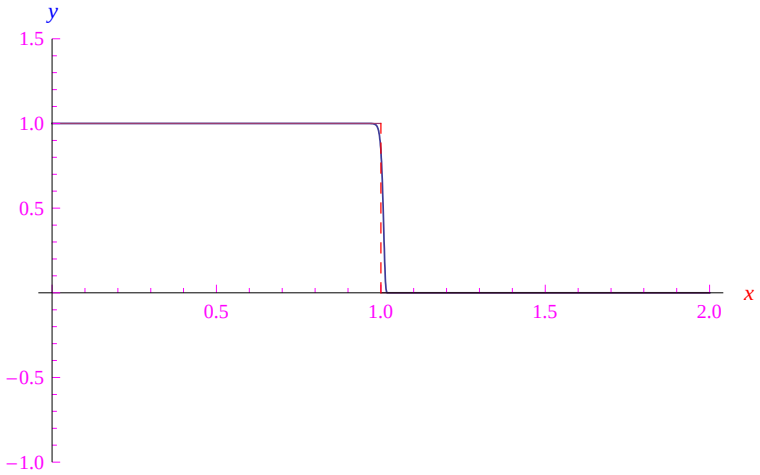


Figura 4.12: Diagramma cartesiano delle funzioni $f_{200}(x) = (\sin x)^{x^{200}}$ e $\theta(1-x)$ per $x > 0$.

Per quanto visto, sono interessanti le funzioni dipendenti da un parametro α, onde

$$\ln \lambda_\alpha = -\lim_{x\to 0^+} \frac{[\psi_\alpha(x)]^2}{\psi'_\alpha(x)\sin x} \tag{4.135}$$

Proviamo con

$$\psi_\alpha(x) = \arcsin x^\alpha, \tag{4.136}$$

la cui derivata prima è

$$\psi'_\alpha(x) = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\sqrt{1-x^{2\alpha}}} \tag{4.137}$$

Perciò

$$\ln \lambda_\alpha = -\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-x^{2\alpha}}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{x^{\alpha-1}\sin x}}_{\Lambda_\alpha} \tag{4.138}$$

Dobbiamo calcolare

$$\Lambda_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{x^{\alpha-1}\sin x} \tag{4.139}$$

Distinguiamo i vari casi:

$$\Lambda_{0<\alpha<1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1-\alpha}(\arcsin x^\alpha)^2}{\sin x} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{x^\alpha} \tag{4.140}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \left[x^\alpha \frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{x^{2\alpha}} \right] = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arcsin x^\alpha}{x^\alpha} \right)^2}_{=1} = 0 \tag{4.141}$$

Cioè

$$\Lambda_{0<\alpha<1} = 0 \tag{4.142}$$

Inoltre

$$\Lambda_{\alpha=1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\arcsin x)^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \left[\left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{x^2}{\sin x} \right] \tag{4.143}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}}_{=1} = 0$$

Infine

$$\Lambda_{\alpha>1} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{x^{2\alpha} \cdot x^{\alpha-1}} \cdot \frac{x^{2\alpha}}{\sin x} \right] = \lim_{x\to 0^+} \left[\left(\frac{\arcsin x^\alpha}{x^\alpha} \right)^2 \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\sin x} \right] \tag{4.144}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\arcsin x^\alpha}{x^\alpha} \right)^2}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}}_{=1} = 0$$

Ne consegue

$$\Lambda_\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in (0, +\infty)\,, \tag{4.145}$$

che a sua volta implica

$$\ln \lambda_\alpha = -\Lambda_\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in (0, +\infty)\,, \tag{4.146}$$

da cui

$$\lambda_\alpha = e^0 = 1, \quad \forall \alpha \in (0, +\infty) \tag{4.147}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\arcsin x^\alpha} = 1, \qquad (\alpha > 0) \tag{4.148}$$

Notiamo infine che la funzione è definita in $(0, 1]$ presentando una discontinuità eliminabile in $x = 0$:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\sin x)^{\arcsin x^\alpha}, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{4.149}$$

In fig. 4.13 riportiamo l'andamento per $\alpha = 0.8$.

Anche in questo caso, al crescere progressivo del parametro α la funzione tende al gradino $\theta(1 - x)$, come vediamo dal grafico di fig. 4.14

Esercizio 201 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}} \tag{4.150}$$

Soluzione

Dal limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \tag{4.151}$$

segue la forma indeterminata $0/0$, per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left[e - (1+x)^{1/x} \right]}{\frac{d}{dx}(x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{d}{dx} (1+x)^{1/x} \tag{4.152}$$

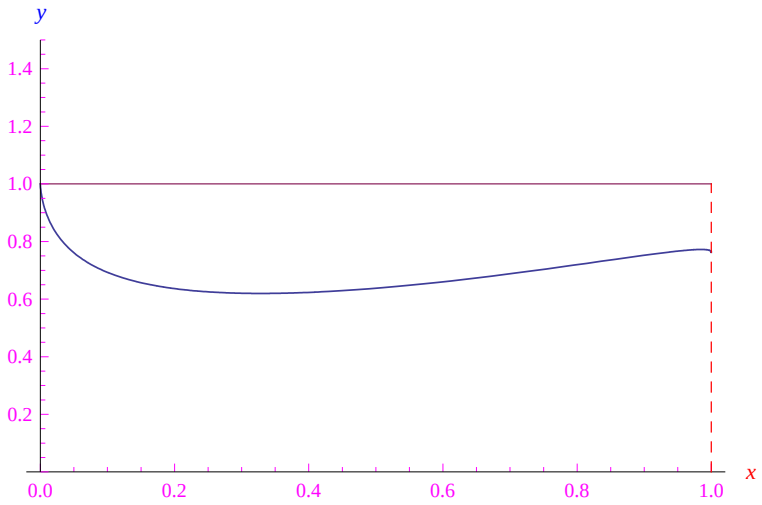


Figura 4.13: Diagramma cartesiano delle funzione $f_{0.8}(x) = (\sin x)^{\left(\arcsin x^{0.8}\right)^2}$ confrontato con la restrizione della funzione di Heaviside $\theta(1-x)$ all'intervallo $[0,1]$.

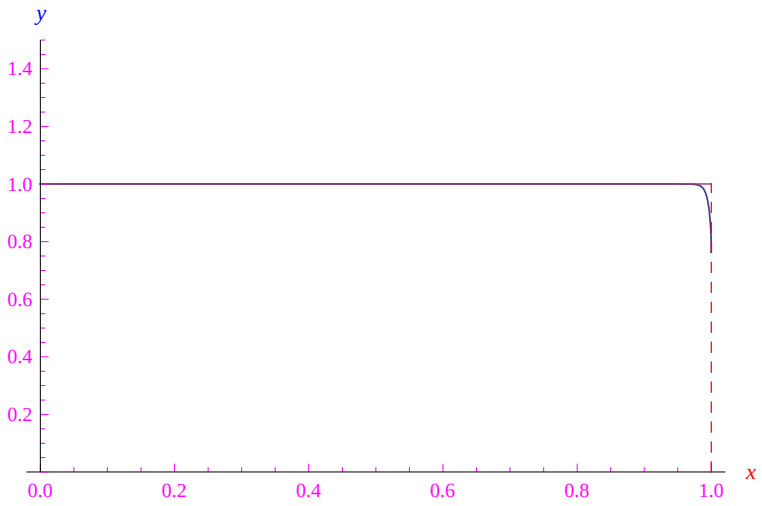


Figura 4.14: Diagramma cartesiano delle funzione $f_{200}(x) = (\sin x)^{\left(\arcsin x^{200}\right)^2}$ confrontato con la restrizione della funzione di Heaviside $\theta(1-x)$ all'intervallo $[0,1]$.

Calcoliamo a parte l'ultima derivata, ponendo

$$g(x) = (1+x)^{1/x}, \tag{4.153}$$

quindi la derivata logaritmica, i.e. derivando rispetto a x primo e secondo membro della seguente equazione:

$$\begin{aligned} \ln g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \Longrightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{1}{1+x}\cdot x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \end{aligned} \tag{4.154}$$

Cioè

$$\frac{d}{dx}(1+x)^{1/x} = (1+x)^{1/x}\,\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} \tag{4.155}$$

Cosicché il limite diventa

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{1/x}\,\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2(1+x)}\right] \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}_{=e}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}}_{=\lambda'} \end{aligned} \tag{4.156}$$

Segue

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+1-1}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{4.157}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = e\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{e}{2} \tag{4.158}$$

Esercizio 202 *Verficare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = \frac{e}{2}} \tag{4.159}$$

Soluzione
La soluzione è immediata. Infatti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x}}{\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x}}{\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x},$$

per cui tenendo conto del risultato dell'esercizio precedente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x} = \frac{e}{2} \tag{4.160}$$

Tuttavia a titolo di esercizio, proviamo a calcolare direttamente il limite. Partendo dal limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$$

si ha che il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x}=\frac{0}{0} \tag{4.161}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[e-(1+x)^{1/x}\right]}{\frac{d}{dx}(\sin x)} \tag{4.162}$$

Calcoliamo a parte la derivata del numeratore

$$\frac{d}{dx}\left[e-(1+x)^{1/x}\right]=-\frac{d}{dx}\left[(1+x)^{1/x}\right] \tag{4.163}$$

Quindi poniamo

$$g(x)=(1+x)^{1/x}, \tag{4.164}$$

Calcoliamone la derivata logaritmica:

$$\ln g(x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)\Longrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}, \tag{4.165}$$

onde

$$g'(x)=(1+x)^{1/x}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right] \tag{4.166}$$

Segue

$$\frac{d}{dx}\left[e-(1+x)^{1/x}\right]=(1+x)^{1/x}\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x(1+x)}\right] \tag{4.167}$$

A questo punto possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}\left[\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x(1+x)}\right]}{\cos x} \tag{4.168}$$

Cioè

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}\left[(1+x)\ln(1+x)-x\right]}{x^2(1+x)\cos x} \\ &=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}}{(1+x)\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}\end{aligned} \tag{4.169}$$

Calcoliamo separatamente i due limiti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}}{(1+x)\cos x}&=\frac{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}{\lim_{x\to 0}(1+x)\cos x}=\frac{e}{1}=e \\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2}&=\frac{0}{0}\end{aligned} \tag{4.170}$$

Di nuovo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left[(1+x)\ln(1+x)-x\right]}{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1} = \frac{1}{2},\end{aligned} \tag{4.171}$$

giacché il limite nella parentesi graffa è un limite notevole. Ne concludiamo (tenendo conto dell'esercizio precedente):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x} = \frac{e}{2} \tag{4.172}$$

Ciò è illustrato nel grafico di fig. 4.15.

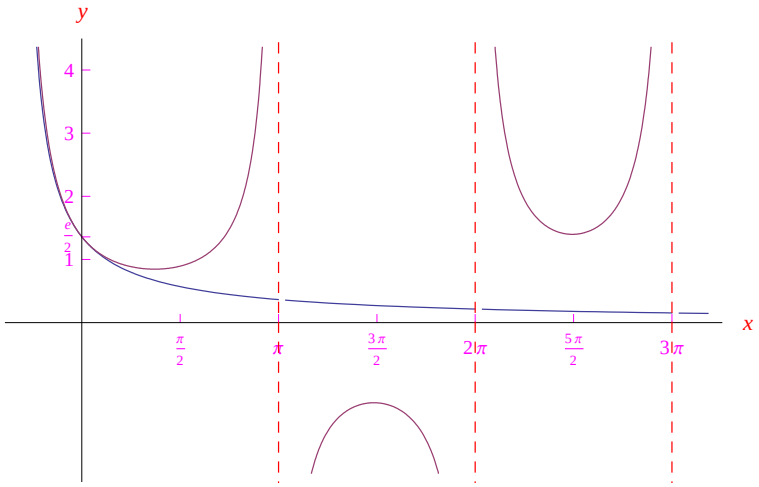


Figura 4.15: Grafici delle funzioni $\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$ e $\frac{e-(1+x)^{1/x}}{\sin x}$.

Esercizio 203 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^3}} \tag{4.173}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata 0/0. Proviamo a dividere numeratore e denominatore per $\tan^3 x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan^3 x}}{\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3} = \frac{\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan^3 x}}^{\stackrel{def}{=}\lambda'}}{\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^3}_{=1}} \tag{4.174}$$

Calcoliamo

$$\lambda' = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\tan^3 x} = \frac{0}{0} \tag{4.175}$$

eseguendo il cambio di variabile $t = \tan x$:

$$\lambda' = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{\arctan t}}{t^3} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t\left(1+t^2\right) - \frac{e^{\arctan t}}{1+t^2}}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t\left(1+t^2\right) - e^{\arctan t}}{3t^2\left(1+t^2\right)} \tag{4.176}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t^2}\cdot \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^t\left(1+t^2\right) - e^{\arctan t}}{t^2}}_{=\lambda''}$$

Segue

$$\lambda'' = \lim_{t\to 0} \frac{e^t\left(1+t^2\right) - e^{\arctan t}}{t^2} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t\left(1+t^2\right) + 2te^t - \frac{e^{\arctan t}}{1+t^2}}{2t} \tag{4.177}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t\left(1+t^2\right) + 2te^t\left(1+t^2\right) - e^{\arctan t}}{2t\left(1+t^2\right)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t + 2e^t t^2 + e^t t^4 + 2e^t t + 2e^t t^3 - e^{\arctan t}}{2t\left(1+t^2\right)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{\arctan t} + e^t t\left(2t + t^3 + 2 + 2t^2\right)}{2t\left(1+t^2\right)}$$
$$= \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{\arctan t}}{2t\left(1+t^2\right)}}_{=\lambda'''} + \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{e^t t\left(2t + t^3 + 2 + 2t^2\right)}{2\left(1+t^2\right)}}_{=1}$$

Calcoliamo

$$\lambda''' = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{\arctan t}}{2t\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+t^2}}_{=1}\cdot \lim_{t\to 0}\frac{e^t - e^{\arctan t}}{t}, \tag{4.178}$$

mentre

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - e^{\arctan t}}{t} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0}\left(e^t - \frac{e^{\arctan t}}{1+t^2}\right) = 1 - \frac{1}{1+0} = 0 \tag{4.179}$$

Quindi

$$\lambda''' = 0 \Longrightarrow \lambda'' = \lambda''' + 1 = 1 \Longrightarrow \lambda' = \frac{1}{3}\lambda'' = \frac{1}{3} \Longrightarrow \lambda = \frac{\lambda'}{1} = \frac{1}{3}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^3} = \frac{1}{3} \tag{4.180}$$

***

Nell'esercizio precedente abbiamo stabilito il seguente risultato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^3} = \frac{1}{3} \tag{4.181}$$

Come vedremo più avanti, ciò si esprime dicendo che la funzione $e^{\tan x} - e^x$ è per $x \to 0$, un infinitesimo di ordine 3 rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$. In questo numero ci proponiamo di generalizzare il predetto risultato studiando il seguente problema:

Problema 9 *Determinare due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tali che la funzione $e^{\varphi(x)} - e^{\psi(x)}$ sia per $x \to 0$, un infinitesimo di ordine 3 rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$. Cioè*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(x)} - e^{\psi(x)}}{x^3} = \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{4.182}$$

Soluzione
Per semplicità supponiamo che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano infinitesimi per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0, \ \lim_{x\to 0} \psi(x) = 0, \tag{4.183}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \left[e^{\varphi(x)} - e^{\psi(x)}\right] = 0,$$

come richiesto. Inoltre, supponiamo che tali funzioni siano derivabili almeno 3 volte in un intorno di $x = 0$, in modo da poter applicare la regola di De L'Hospital per un sufficiente numero di volte. Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(x)} - e^{\psi(x)}}{x^3} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x) e^{\varphi(x)} - \psi'(x) e^{\psi(x)}}{3x^2} \tag{4.184}$$

Evidentemente se

$$\lim_{x\to 0} \left[\varphi'(x) e^{\varphi(x)} - \psi'(x) e^{\psi(x)}\right] = \ell \in [-\infty, +\infty], \tag{4.185}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x) e^{\varphi(x)} - \psi'(x) e^{\psi(x)}}{3x^2} = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(x)} - e^{\psi(x)}}{x^3} = \pm\infty \tag{4.186}$$

In altri termini, se la funzione

$$\varphi'(x) e^{\varphi(x)} - \psi'(x) e^{\psi(x)} \tag{4.187}$$

non è un infinitesimo per $x \to 0$, necessariamente la funzione x^3 tende a 0 più rapidamente di $e^{\varphi(x)} - e^{\psi(x)}$, per cui quest'ultima è un infinitesimo di ordine < 3.

Osservazione 10 *Escludiamo il caso in cui la funnzione*

$$\varphi'(x) e^{\varphi(x)} - \psi'(x) e^{\psi(x)}$$

è non regolare in $x = 0$, i.e. non tende ad alcun limite per $x \to 0$.

Ne consegue che affinché il problema proposto ammetta almeno una soluzione, deve essere

$$\lim_{x\to 0} \varphi'(x) e^{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0} \psi'(x) e^{\psi(x)} \tag{4.188}$$

In tale ipotesi possiamo riapplicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(x) e^{\varphi(x)} - \psi'(x) e^{\psi(x)}}{3x^2} = \frac{0}{0} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(x) e^{\varphi(x)} + [\varphi'(x)]^2 e^{\varphi(x)} - \psi''(x) e^{\psi(x)} - [\psi'(x)]^2 e^{\psi(x)}}{6x} \end{aligned} \tag{4.189}$$

Anche qui deve essere

$$\lim_{x\to 0} \left\{\varphi''(x) e^{\varphi(x)} + [\varphi'(x)]^2 e^{\varphi(x)} - \psi''(x) e^{\psi(x)} - [\psi'(x)]^2 e^{\psi(x)}\right\} = 0 \tag{4.190}$$

Riapplicando la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \{\varphi'''(x) e^{\varphi(x)} + \varphi''(x) \varphi'(x) e^{\varphi(x)} + 2\varphi'(x) \varphi''(x) e^{\varphi(x)} + [\varphi'(x)]^3 e^{\varphi(x)} \\ &- \psi'''(x) e^{\psi(x)} - \psi''(x) \psi'(x) e^{\psi(x)} - 2\psi'(x) \psi''(x) e^{\psi(x)} - [\psi'(x)]^3 e^{\psi(x)}\} \end{aligned} \tag{4.191}$$

Ne consegue che affinché il problema ammetta almeno una soluzione, deve essere:

$$\lim_{x\to 0}\{\varphi'''(x)\,e^{\varphi(x)}+3\varphi'(x)\,\varphi''(x)\,e^{\varphi(x)}+[\varphi'(x)]^3\,e^{\varphi(x)} \\ -\psi'''(x)\,e^{\psi(x)}-3\psi'(x)\,\psi''(x)\,e^{\psi(x)}-[\psi'(x)]^3\,e^{\psi(x)}\}=\Lambda\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{4.192}$$

Se è verificata tale condizione si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\varphi(x)}-e^{\psi(x)}}{x^3}=\frac{\Lambda}{6} \tag{4.193}$$

Ad esempio per

$$\varphi(x)=\tan x-\tanh x,\quad \psi(x)=x^4+\sin x-\sinh x,$$

si ha (applicando le formule precedenti):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x-\tanh x}-e^{x^4+\sin x-\sinh x}}{x^3}=1 \tag{4.194}$$

Esercizio 204 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x\,(1-\cos x)}} \tag{4.195}$$

Soluzione

Forma indeterminata $0/0$. Proviamo a dividere numeratore e denominatore per x^2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x\,(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^2}}{x\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}}_{=\lambda'}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}}_{=2}$$

Il limite

$$\lambda'=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3}$$

è simile a quello dell'esercizio 203, per cui seguiamo lo stesso procedimento. Precisamente, dividiamo numeratore e denominatore per $\sin^3 x$

$$\lambda'=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-e^{\sin x}}{\sin^3 x}}{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\sin^3 x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}_{=1} \tag{4.196}$$

L'altro limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\sin^3 x} \tag{4.197}$$

si può calcolare con il cambio di variabile $t=\sin x$, per cui

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\sin^3 x}&=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t}{t^3}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}e^{\arcsin t}-e^t}{3t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t\sqrt{1-t^2}}{3t^2\sqrt{1-t^2}}\\&=\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t\sqrt{1-t^2}}{t^2}}_{=\lambda''}\end{aligned} \tag{4.198}$$

Segue

$$\begin{aligned}\lambda'' &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t\sqrt{1-t^2}}{t^2} = \frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}e^{\arcsin t}-e^t\sqrt{1-t^2}-\frac{e^t(-2t)}{2\sqrt{1-t^2}}}{2t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t\left(1-t^2\right)+te^t}{2t\sqrt{1-t^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t+te^t\left(1+t\right)}{2t\sqrt{1-t^2}} \\ &= \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t}{2t\sqrt{1-t^2}}}_{=\lambda'''}+\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{e^t\left(1+t\right)}{2\sqrt{1-t^2}}}_{=\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{4.199}$$

Calcoliamo

$$\lambda''' = \lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t}{2t\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \tag{4.200}$$

Segue

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{\arcsin t}-e^t}{t} = \frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}e^{\arcsin t}-1\right) = 0 \tag{4.201}$$

Pertanto

$$\lambda'' = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda' = \frac{1}{3}\lambda'' = \frac{1}{6} \Longrightarrow \lambda = 2\lambda' = \frac{1}{3} \tag{4.202}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x\left(1-\cos x\right)} = \frac{1}{3} \tag{4.203}$$

Esercizio 205 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}} \tag{4.204}$$

Soluzione
Forma indeterminata 0/0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x} = \frac{0}{0} \tag{4.205}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x} = \frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x e^{\sin x}}{1-\cos x} \tag{4.206}$$

La presenza a denominatore di $1-\cos x$ suggerisce di dividere numeratore e denominatore per x^2 in modo da riprodurre il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{4.207}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x e^{\sin x}}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-\cos x e^{\sin x}}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right) \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x e^{\sin x}}{x^2}}_{\lambda}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}}_{=2}\end{aligned} \tag{4.208}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\lambda = \frac{0}{0} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x e^{\sin x} - \cos x e^{\sin x}}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{\sin x}(\sin x - \cos x)}{2x} \\ &= \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \left[e^x + \cos x e^{\sin x}(\sin x - \cos x) + e^{\sin x}(\cos x + \sin x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + 1\cdot(0-1) + 1\cdot(1+0)\right] = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{4.209}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lambda \cdot 2 = 1 \tag{4.210}$$

Esercizio 206 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x}} \tag{4.211}$$

Il limite proposto restituisce la forma indeterminata $0/0$, per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x(1-x) - 1}{(1-x)(1-\cos^2 x)}\cdot \cos^2 x\right] \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{(1-x)(1-\cos^2 x)}}_{=\lambda'} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \cos^2 x}_{=1}\end{aligned} \tag{4.212}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\lambda' = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x) - 1}{(1-x)\sin^2 x} = \frac{0}{0} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-x) - e^x}{2\sin x \cos x} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x}\cdot \lim_{x\to 0} e^x = -\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{4.213}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} = -\frac{1}{2} \tag{4.214}$$

Esercizio 207 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda_n = \lim_{x\to 1} \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}} \tag{4.215}$$

Soluzione

La forma indeterminata $0/0$ suggerisce di applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-(n+1)\,x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2} &= \frac{1-(n+1)+n}{0}=\frac{0}{0}\\ &\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-(n+1)^2\,x^n+n\,(n+2)\,x^{n+1}}{-2\,(1-x)}\\ &=\frac{1-(n+1)^2+n\,(n+2)}{0}\\ &=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-n\,(n+1)^2\,x^{n-1}+n\,(n+2)\,(n+1)\,x^n}{2}\\ &=\frac{-n\,(n^2+2n+1)+n\,(n^2+3n+2)}{2}\\ &=\frac{n^2+n}{2}\end{aligned}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-(n+1)\,x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}=\frac{n\,(n+1)}{2} \tag{4.216}$$

Esercizio 208 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}} \tag{4.217}$$

Soluzione

Il limte si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$, per cui applichiamo la regola di De L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3} &= \frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2xe^x+1+x-4e^x+2}{3\,(e^x-1)^2\,e^x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{-3e^x+2xe^x+x+3}{3\,(e^x-1)^2}\\ &=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-3e^x+2e^x+2xe^x+1}{6\,(e^x-1)\,e^x}\\ &=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x+2xe^x+1}{e^{2x}-e^x}\\ &=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{2e^x-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2-1}\end{aligned} \tag{4.218}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3}=\frac{1}{6} \tag{4.219}$$

Esercizio 209 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{e^{2\pi x}-1}\right)} \tag{4.220}$$

Soluzione

Evidentemente

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\pi x-1}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{e^{2\pi x}-1} \tag{4.221}$$

È necessario calcolare i limiti destro e sinistro. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi x - 1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{0^+}\right) = -\left(+\infty\right) = -\infty \tag{4.222}$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\pi x - 1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{0^+}\right) = -\left(+\infty\right) = -\infty$$

Cioè

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi x - 1}{2x^2} = -\infty \tag{4.223}$$

Passiamo all'altro limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{e^{2\pi x} - 1} = \pi \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{2\pi x} - 1}$$

Qui conviene aiutarsi con il grafico della funzione $e^{2\pi x} - 1$, come illustrato in fig. 4.16 da cui vediamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(e^{2\pi x} - 1\right) = 0^+, \quad \lim_{x\to 0^-} \left(e^{2\pi x} - 1\right) = 0^- \tag{4.224}$$

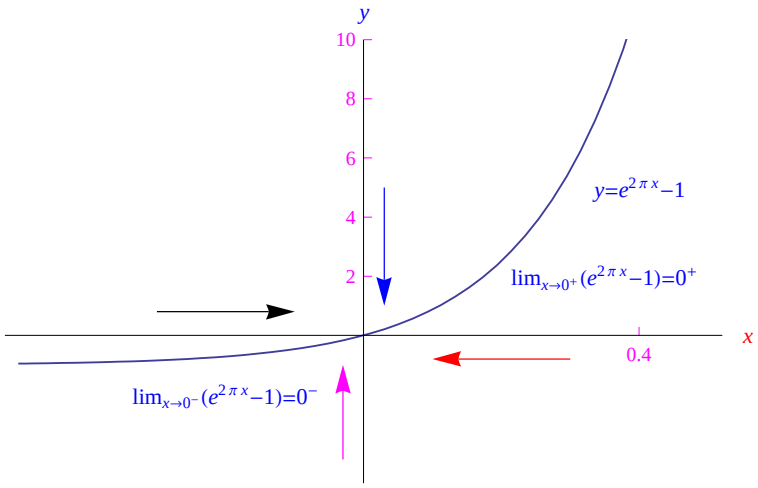


Figura 4.16: Andamento della funzione $e^{2\pi x} - 1$ in un intorno di $x = 0$.

Da ciò segue

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{e^{2\pi x} - 1} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\pi}{e^{2\pi x} - 1} = \pi \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = \pi\left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty \tag{4.225}$$

Pertanto

$$\lambda_- \overset{def}{=} \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{e^{2\pi x} - 1}\right) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \tag{4.226}$$

mentre

$$\lambda_+ \overset{def}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{e^{2\pi x} - 1}\right) = (-\infty) + (+\infty) = \infty - \infty, \tag{4.227}$$

cioè la forma indeterminata $\infty - \infty$, che può essere rimossa nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{e^{2\pi x}-1}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(\pi x-1)\,e^{2\pi x}-\pi x+1+2x^2\pi}{2x^2e^{2\pi x}-1}\\ &= \frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi e^{2\pi x}+2\pi\,(\pi x-1)\,e^{2\pi x}-\pi+4x\pi}{4x\,(e^{2\pi x}-1)+4\pi x^2e^{2\pi x}}\\ &= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{\pi\,(e^{2\pi x}-1)+2\pi\,(\pi x-1)\,e^{2\pi x}+4x\pi}{x\,(e^{2\pi x}-1)+\pi x^2e^{2\pi x}}\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{0^+ +(-1)\cdot 2\pi+0^+}{0^+}=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{0^+}=-\infty\end{aligned}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{e^{2\pi x}-1}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{e^{2\pi x}-1}\right)=-\infty$$

Cioè

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{e^{2\pi x}-1}\right)=-\infty,$$

come mostrato in fig. 4.17.

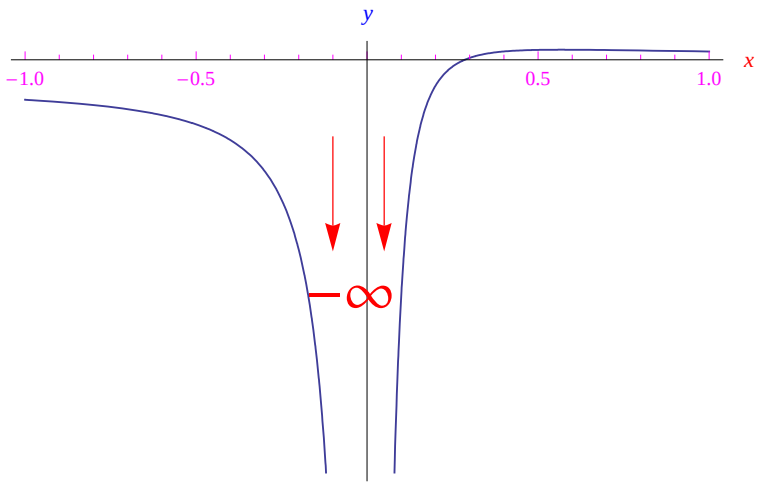


Figura 4.17: Andamento della funzione $\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{e^{2\pi x}-1}$ in un intorno di $x=0$.

Esercizio 210 *Calcolare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}} \tag{4.228}$$

Soluzione

Forma indeterminata 0/0

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}=\frac{0}{0} \tag{4.229}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-1+e^{-x}}{2x}, \tag{4.230}$$

che ci ricorda il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \tag{4.231}$$

a patto di eseguire il cambio di variabile $t=-x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1+e^{-x}}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=-\frac{1}{2} \tag{4.232}$$

Ne concludiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x-e^{-x}}{x^2}=-\frac{1}{2} \tag{4.233}$$

Esercizio 211 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}x\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)^2} \tag{4.234}$$

Soluzione

Calcoliamo preliminarmente

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{0^{\pm}}\right)^2=(\pm\infty)^2=+\infty, \tag{4.235}$$

onde

$$\lim_{x\to 0}x\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)^2=0\cdot\ln(+\infty)=0\cdot(+\infty),$$

cioè la forma indeterminata $0\cdot\infty$. Prima di trasformarla nella forma $\frac{\infty}{\infty}$ in modo da applicare la regola di De L'Hospital, osserviamo che

$$\lim_{x\to 0}x\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)^2=2\lim_{x\to 0}x\ln\left(\frac{1-x}{x}\right),$$

dopodiché eseguiamo il cambio di variabile $t=1/x$:

$$\lim_{x\to 0}x\ln\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\ln(t-1)}{t}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t-1}=0 \tag{4.236}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}x\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)^2=0 \tag{4.237}$$

Esercizio 212 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)} \tag{4.238}$$

Soluzione

Il prodotto si presenta sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=0\cdot\infty \tag{4.239}$$

Anziché convertirla subito nella $\frac{\infty}{\infty}$ per poter applicare la regola di De L'Hospital, scriviamo

$$\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x\ln x\right]=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}x\ln x}_{\lambda'},$$

dove abbiamo tenuto conto del limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Calcoliamo

$$\lambda'=\lim_{x\to 0}x\ln x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0 \tag{4.240}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=0 \tag{4.241}$$

Esercizio 213 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x}} \tag{4.242}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x}=1^\infty \tag{4.243}$$

Applichiamo il procedimento standard

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x}&=\lim_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{\cot x(\cos x-1)} \\ &=\left\{\underbrace{\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}}_{\lambda_1}\right\}^{\underbrace{\lim_{x\to 0}\cot x(\cos x-1)}_{\lambda_2}}=\lambda_1^{\lambda_2}\end{aligned} \tag{4.244}$$

Per calcolare il primo limite eseguiamo il cambiamento di variabile

$$t=\cos x-1\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0, \tag{4.245}$$

per cui

$$\lambda_1=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \tag{4.246}$$

Calcoliamo il limite all'esponente

$$\begin{aligned}\lambda_2&=\lim_{x\to 0}\cot x(\cos x-1)=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\right) \\ &=-\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}}_{=1}=0\cdot 1=0\end{aligned} \tag{4.247}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\cot x}=e^0=1 \tag{4.248}$$

Esercizio 214 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x}} \tag{4.249}$$

Soluzione
Forma indeterminata 1^{∞}:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x} = 1^{\infty} \tag{4.250}$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0}\left\{\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\sin x\cot x}\right\} = \tag{4.251}$$

$$= \left[\underbrace{\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}_{\lambda_1}\right]^{\underbrace{\lim_{x\to 0}\sin x\cot x}_{\lambda_2}}$$

Calcoliamo il primo limite con il cambio di variabile

$$t = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

per cui

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \tag{4.252}$$

L'altro limite

$$\lambda_2 = \lim_{x\to 0}\sin x\cot x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \tag{4.253}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cot x} = e^1 = e \tag{4.254}$$

Per completezza riportiamo in fig. 4.18 il grafico della funzione.

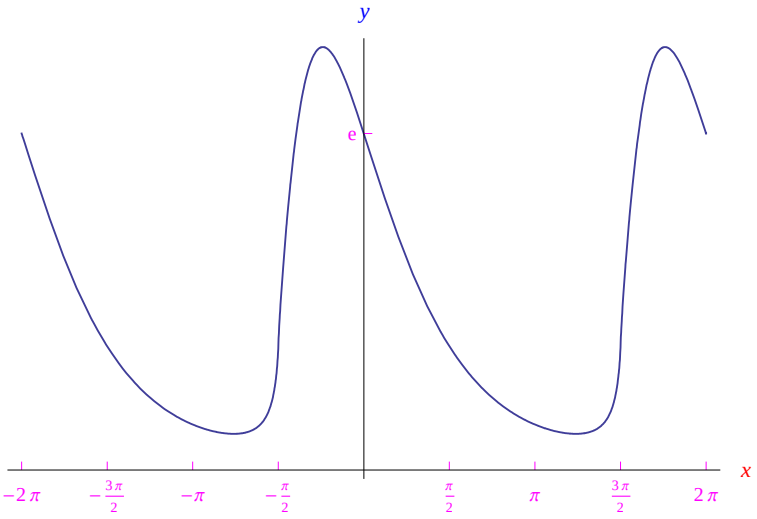


Figura 4.18: Diagramma cartesiano della funzione $(1+\sin x)^{\cot x}$.

Esercizio 215 *Provare che non esiste il limite*

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x^2}} \tag{4.255}$$

Soluzione
Il limite si presenta sotto la forma indeterminata 1^{∞}, giacché

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\pm\infty \tag{4.256}$$

Applichiamo il procedimento standard:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}}\right]^{\frac{\sin\frac{1}{x}\sin x}{x}} \\ &= \left[\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}\sin x}{x}}\end{aligned} \tag{4.257}$$

Il primo limite si calcola facilmente con il cambio di variabile

$$t=x\sin\frac{1}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0, \tag{4.258}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e \tag{4.259}$$

L'altro limite può scriversi:

$$\lim_{x\to 0}\psi(x), \tag{4.260}$$

essendo

$$\psi(x)\overset{def}{=}\frac{\sin\frac{1}{x}\sin x}{x}, \tag{4.261}$$

che è una funzione definita in $\mathbb{R}-\{0\}$. Come è noto

$$\nexists\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x} \tag{4.262}$$

Inoltre

$$|\psi(x)|=\left|\sin\frac{1}{x}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|, \tag{4.263}$$

per cui

$$-\frac{\sin x}{x}\leq\psi(x)\leq\frac{\sin x}{x} \tag{4.264}$$

Tale doppia disuguaglianza suggerisce l'utilizzo del teorema dei carabinieri. Tuttavia le funzioni agli estremi non tendono allo stesso limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \ \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1, \tag{4.265}$$

onde il predetto teorema non è applicabile. È facile persuadersi che il grafico di $\psi(x)$ oscilla infinitamente tra le curve

$$\gamma_{\pm}: y=\pm\frac{\sin x}{x} \tag{4.266}$$

Le oscillazioni non si smorzano per $x \to 0$. Ne consegue la non esistenza del limite di $\psi(x)$ per $x \to 0$. A sua volta ciò implica

$$\nexists \lim_{x\to 0} \left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x^2}} \tag{4.267}$$

Infine, per completezza calcoliamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x^2}} = \left(1 + \lim_{x\to\pm\infty} x \sin \frac{1}{x}\right)^{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x^2}}, \tag{4.268}$$

riuscendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} x \sin \frac{1}{x} \underset{\tau=\frac{1}{x}}{=} \lim_{\tau\to 0} \frac{\sin \tau}{\tau} = 1 \tag{4.269}$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \begin{cases} 0^+, & \text{se } x \to +\infty \\ 0^-, & \text{se } x \to -\infty \end{cases} \tag{4.270}$$

Segue

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x^2}} = \begin{cases} 2^{0^+} = 1^+ \text{ se } & x \to +\infty \\ 2^{0^-} = 1^- \text{ se } & x \to -\infty \end{cases} \tag{4.271}$$

Riportiamo in fig. 4.19 il grafico della funzione.

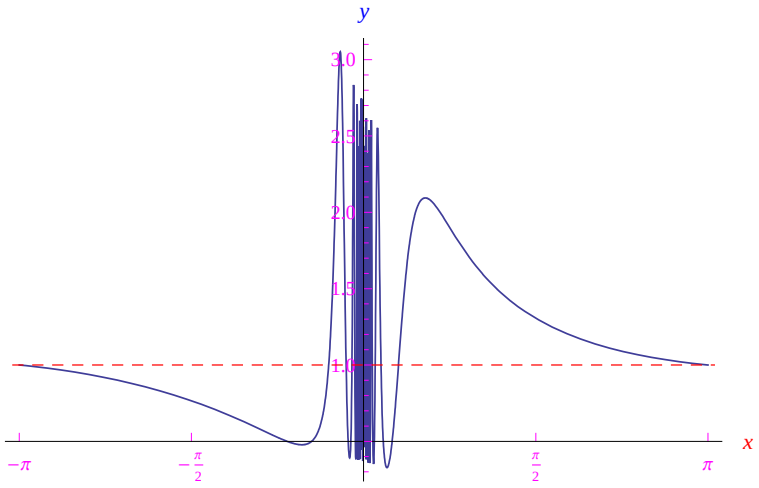


Figura 4.19: Diagramma cartesiano della funzione $\left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x^2}}$.

Esercizio 216 *Verificare*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} (1 + x^n)^{\frac{1}{(\sin x)^n}} = e, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}} \tag{4.272}$$

Soluzione

Il limite si presenta sotto la forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0} (1 + x^n)^{\frac{1}{(\sin x)^n}} = 1^\infty \tag{4.273}$$

Applichiamo il procedimento standard:

$$\lim_{x\to 0} \left[(1 + x^n)^{\frac{1}{x^n}}\right]^{\frac{x^n}{(\sin x)^n}} = \left[\lim_{x\to 0} (1 + x^n)^{\frac{1}{x^n}}\right]^{\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{(\sin x)^n}}$$

Il limite nell'esponente è manifestamente 1. L'altro invece si calcola con il cambio di variabile

$$t = x^n,$$

onde

$$\lim_{x\to 0} (1+x^n)^{\frac{1}{x^n}} = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

da cui il risultato.

Esercizio 217 *Classificare i punti di discontinuità della funzione*

$$f(x) = (\tan x)^{\tan 2x} \tag{4.274}$$

Soluzione

Dal momento che abbiamo una funzione periodica di periodo $T = \pi$, riferiamoci all'intervallo $[0, \pi]$. Evidentemente

$$\text{In } [0,\pi] \text{ è } \tan x > 0 \text{ per } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dobbiamo poi escludere la discontinuità di $\tan 2x$ nell'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Deve perciò essere:

$$x \neq \frac{\pi}{4} \tag{4.275}$$

In definitiva il campo di esistenza che ci interessa è

$$X = \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.276}$$

Per quanto riguarda il segno, si ha manifestamente

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in X \tag{4.277}$$

In fig. 4.20 la regione in grigio denota la porzione del piano cartesiano non attraversata dal grafico della funzione, mentre i pallini gialli indica i punti di accumulazione non appartenenti a X.

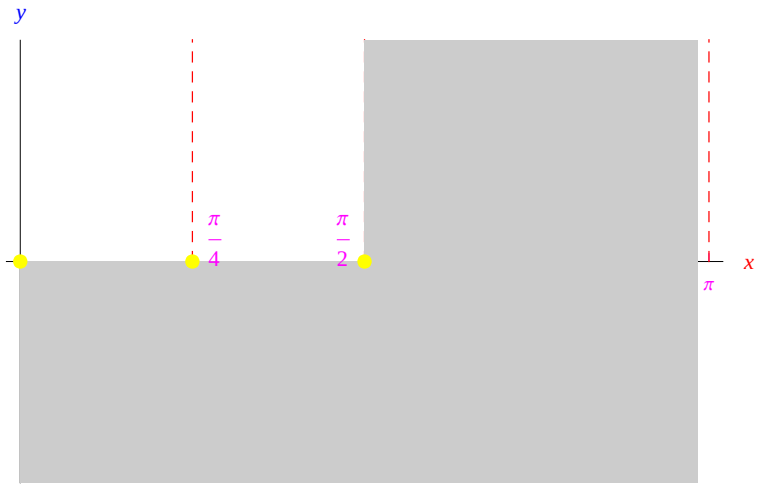


Figura 4.20: Nella regione in grigio "non c'è funzione".

Studiamo il comportamento della funzione in un intorno destro di $x = 0$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan 2x} = 0^0 = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan 2x \ln(\tan x)} \tag{4.278}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0^+} \tan 2x \ln(\tan x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \tag{4.279}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2} = 0^-,$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{0^-} = 1^- \tag{4.280}$$

Ne consegue che $x = 0$ è una discontinuità eliminabile. Passiamo al punto $x = \pi/4$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = 1^\infty \tag{4.281}$$

Applichiamo il procedimento standard:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \left\{[1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\tan x-1}}\right\}^{(\tan x-1)\tan 2x} \tag{4.282}$$
$$= \left\{\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} [1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\tan x-1}}\right\}^{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x-1)\tan 2x}$$

Calcoliamo il primo limite con il cambio di variabile

$$t = \tan x - 1, \tag{4.283}$$

per cui

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} [1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\tan x-1}} = \lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = e \tag{4.284}$$

Il limite nell'esponente

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x - 1)\tan 2x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cot 2x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}}$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}} = -1,$$

onde

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e} \tag{4.285}$$

Infine:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\tan 2x} = \infty^0 = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan 2x \ln(\tan x)} \tag{4.286}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan 2x \ln(\tan x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\cot 2x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} \tag{4.287}$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 2x}{\tan x\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x}$$
$$= -2\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin x\cos x = 0,$$

cioè

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\tan 2x}=\frac{1}{e} \tag{4.288}$$

Ne concludiamo che $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{2}$ sono punti di discontinuità eliminabili per la funzione. Quindi

$$f(x)=\begin{cases}(\tan x)^{\tan 2x}, & \text{se } x\in X,\\ 1, & \text{se } x=0,\frac{\pi}{2}\\ \frac{1}{e} & \text{se } x=\frac{\pi}{4}\end{cases} \tag{4.289}$$

In fig. 4.21 riportiamo il grafico della funzione.

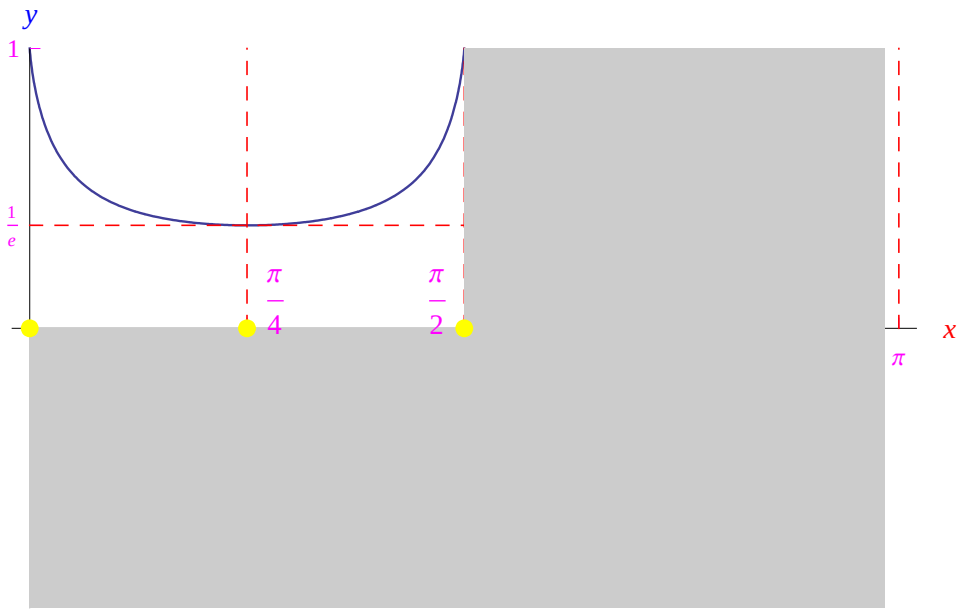


Figura 4.21: Grafico della funzione $f(x)=(\tan x)^{\tan 2x}$.

Esercizio 218 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(1+x)}} \tag{4.290}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma inderterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(1+x)}=\left(\frac{1}{0}\right)^{0}=\infty^0 \tag{4.291}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0^+}e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(1+x)}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(1+x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\\ &= e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\end{aligned} \tag{4.292}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\ln(1+x)}} \tag{4.293}$$
$$= \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{\ln^2(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)\ln^2(1+x)}{x}$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^+}(1+x)}_{=1}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2(1+x)}{x}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln^2(1+x)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1}, \tag{4.294}$$

avendo utilizzato il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{4.295}$$

Tale risultato implica

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \tag{4.296}$$

Finalmente

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(1+x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\ln(1+x)\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = e^0 = 1 \tag{4.297}$$

Esercizio 219 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}} \tag{4.298}$$

Soluzione
Anche qui abbiamo la forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \infty^0 = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \tag{4.299}$$
$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0^+} \tan x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty} \tag{4.300}$$
$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\sin x}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}}_{=1} = 0,$$

onde

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = e^0 = 1 \tag{4.301}$$

Esercizio 220 *Classificare i punti di discontinuità della funzione*

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} \tag{4.302}$$

Soluzione
La funzione proposta è definita per

$$x > 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4.303}$$

Dal momento che si tratta di una funzione periodica di periodo $T = \pi$, restringiamoci all'intervallo $[0, \pi]$, per cui il campo di esistenza è

$$X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \tag{4.304}$$

Dall'esercizio precedente

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1,$$

per cui $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Studiamo ora il comportamento di $f(x)$ in un intorno di $x = \pi/2$ calcolando

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x), \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) \tag{4.305}$$

Calcoliamo il limite sinistro:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} x^{-\tan x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\infty} = 0^+ \tag{4.306}$$

Alternativamente

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{x^{\tan x}} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \tag{4.307}$$

Passiamo al limite destro

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} x^{-\tan x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-(-\infty)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{+\infty} = +\infty \tag{4.308}$$

Alternativamente

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{x^{\tan x}} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\infty}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{4.309}$$

Riepilogando

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0^+, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty \tag{4.310}$$

Ne consegue che $x = \pi/2$ è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione assegnata. In fig. 4.22 riportiamo il grafico della funzione illustrando il comportamento in un intorno di $x = \pi/2$.

***

Proposizione 11

$$\lim_{x \to 0^+} \psi(x) = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{\psi(x)}\right]^{\psi(x)} = 1^+ \tag{4.311}$$

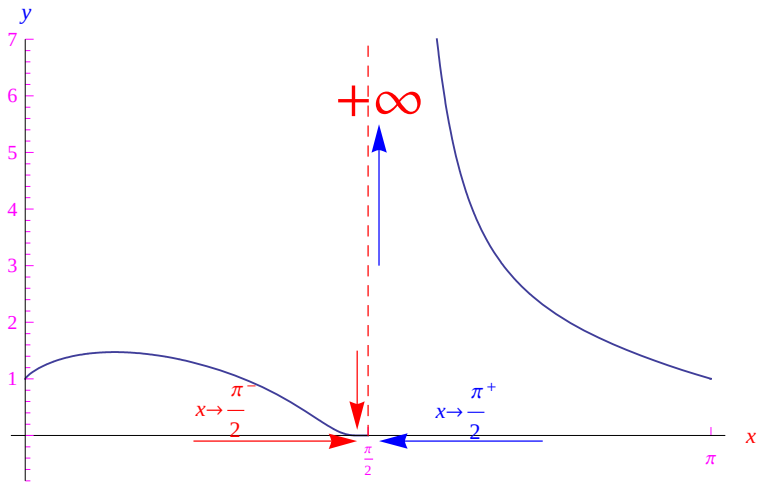


Figura 4.22: Grafico della funzione $f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}$.

Dimostrazione. Il limite si presenta sotto la forma indeterminata

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{\psi(x)}\right]^{\psi(x)} = \infty^0 \tag{4.312}$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{\psi(x)}\right]^{\psi(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]^{\psi(x)}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\psi(x)\ln\left[\frac{1}{\psi(x)}\right]} \tag{4.313}$$

Il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \psi(x)\ln\left[\frac{1}{\psi(x)}\right] = 0\cdot\infty \tag{4.314}$$

può essere calcolato con il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{\psi(x)} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \tag{4.315}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} \psi(x)\ln\left[\frac{1}{\psi(x)}\right] = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0^+, \tag{4.316}$$

onde l'asserto. ■

Ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^{10}\sin\frac{1}{x}}\right)^{x^{10}\sin\frac{1}{x}} = 1 \tag{4.317}$$

Segue immediatamente il corollario.

Corollario 12

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+}[\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = 1^+ \tag{4.318}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)},$$

onde

$$\lim_{x\to 0^+}\psi(x) = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

da cui l'asserto dal teorema precedente. ■

Ad esempio per

$$\varphi(x) = \cot x$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\cot x}} = 1^+$$

Il grafico è in fig. 4.23.

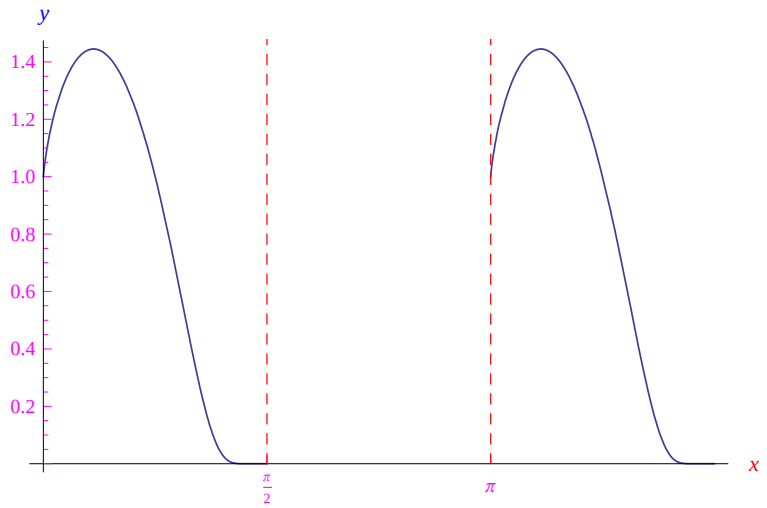


Figura 4.23: Grafico della funzione $f(x) = (\cot x)^{\frac{1}{\cot x}}$..

Esercizio 221 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\log(\sin x)}}} \tag{4.319}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\log(\sin x)}} = (+\infty)^{\frac{1}{\ln(0^+)}} = (+\infty)^{0^-} = \infty^0 \tag{4.320}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\log(\sin x)}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(\cot x)^{\frac{1}{\log(\sin x)}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)}} \tag{4.321}$$

Calcoliamo il limite nell'esponente con la regola di De L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)} = \frac{\infty}{\infty} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x} \\ &= -\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = -1 \end{aligned} \tag{4.322}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\log(\sin x)}} = \frac{1}{e} \tag{4.323}$$

Esercizio 222 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 0^+} (x \ln x)} \tag{4.324}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0 \ln\left(0^+\right) = 0 \cdot (-\infty), \tag{4.325}$$

che può essere ricondotta alla $\frac{\infty}{\infty}$, per poi applicare la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0^- \tag{4.326}$$

Esercizio 223 *Classificare i punti di discontinuità della funzione*

$$\boxed{f(x) = xe^{1/x}} \tag{4.327}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, per cui studiamo il comportamento in un intorno di $x = 0$ calcolando

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = 0 \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot \infty \tag{4.328}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \tag{4.329}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \tag{4.330}$$

Passiamo al limite sinistro

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{1/x} = 0 \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \tag{4.331}$$

Conclusione: $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie. In fig. 4.24 riportiamo il grafico della funzione in un intorno di $x = 0$.

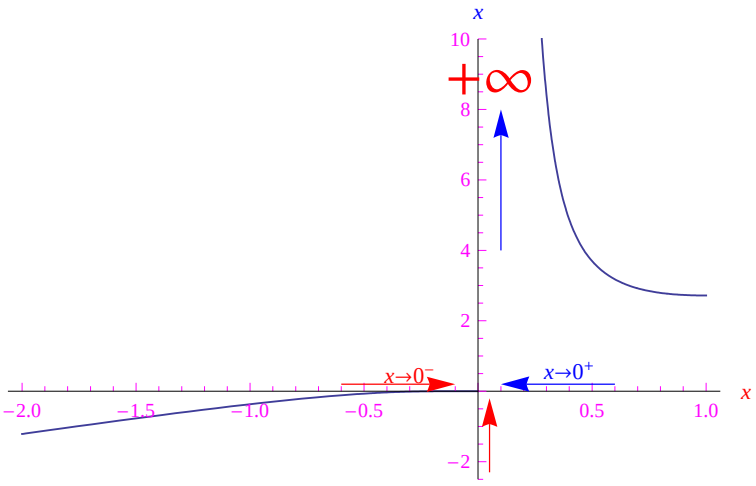


Figura 4.24: Grafico della funzione $f(x) = xe^{1/x}$.

Esercizio 224 *Generalizzare il risultato precedente alla funzione*

$$\boxed{f_n(x) = x^n e^{1/x}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}} \tag{4.332}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, per cui studiamo il comportamento in un intorno di $x = 0$ calcolando

$$\lim_{x \to 0^+} x^n e^{1/x} = 0 \cdot e^{\frac{1}{0^+}} = 0 \cdot e^{+\infty} = 0 \cdot \infty \tag{4.333}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty, \tag{4.334}$$

per cui

$$\lim_{x \to 0^+} x^n e^{1/x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^n} = \frac{\infty}{\infty} \tag{4.335}$$

Applicando ripetutamente la regola di De L'Hospital, si perviene

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^n} = +\infty \tag{4.336}$$

Come vedremo più avanti, tale risultato ci dice che per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale e^x è un infinito di ordine infinitamente grande rispetto all'infinito di riferimento x.

Passiamo al limite sinistro

$$\lim_{x \to 0^-} x^n e^{1/x} = 0 \cdot e^{\frac{1}{0^-}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \tag{4.337}$$

Conclusione: $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie. In fig. 4.25 riportiamo il grafico della funzione in un intorno di $x = 0$.

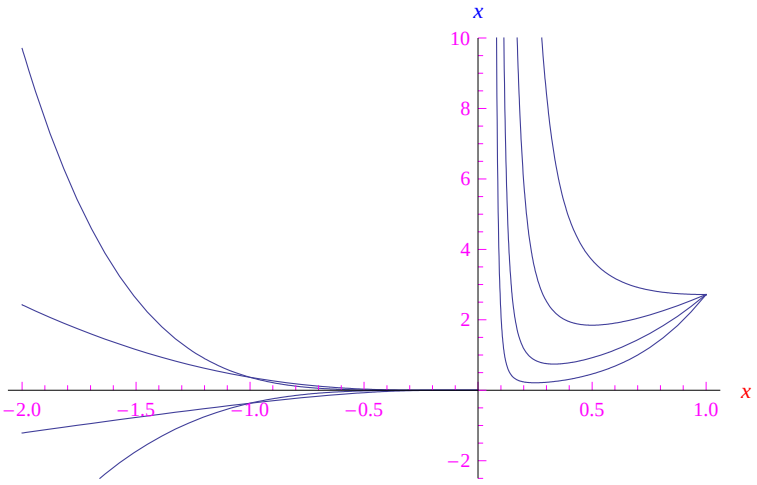


Figura 4.25: Grafico della funzione $f_n(x) = x^n e^{1/x}$ per alcuni valori di n.

Esercizio 225 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}} \tag{4.338}$$

Soluzione
Forma indeterminata 0/0

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\frac{0}{0} \tag{4.339}$$

Anziché applicare subito la regola di De L'Hospital, eseguiamo le seguenti manipolazioni:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}\right] \tag{4.340}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}, \tag{4.341}$$

dododiché sfruttiamo i limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln e=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \tag{4.342}$$

Esercizio 226 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}} \tag{4.343}$$

Soluzione
Forma indeterminta 1^∞

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}=(1+0)^\infty=1^\infty \tag{4.344}$$

Applichiamo il procedimento standard

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}} \tag{4.345}$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}$$

Calcoliamo il primo limite con il cambio di variabile $t=\sin x$, per cui

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e, \tag{4.346}$$

avendo utilizzato il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \tag{4.347}$$

Il limite nell'esponente è manifestamente 1. Conclusione:

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}=e^1=e \tag{4.348}$$

Esercizio 227 *Verificare*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\sqrt[n]{nx^n+1}}=e^{n\sqrt[n]{n}}} \tag{4.349}$$

Soluzione

Il limite si presenta sotto la forma indeterminata 1^{∞}, per cui applichiamo il procedimento standard:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\sqrt[n]{nx^n+1}}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\frac{\sqrt{1+x^2}}{n}}\right]^{\frac{n\sqrt[n]{nx^n+1}}{\sqrt{1+x^2}}}=\lambda_1^{\lambda_2}, \tag{4.350}$$

essendo

$$\lambda_1\overset{def}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\frac{\sqrt{1+x^2}}{n}},\quad \lambda_2\overset{def}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n\sqrt[n]{nx^n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \tag{4.351}$$

Calcoliamo λ_1 con il cambio di variabile

$$t=\frac{\sqrt{1+x^2}}{n}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty, \tag{4.352}$$

per cui

$$\lambda_1=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e \tag{4.353}$$

Calcoliamo λ_2

$$\lambda_2=n\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[n]{n+\frac{1}{x^n}}}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=n\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n+\frac{1}{x^n}}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=n\sqrt[n]{n}, \tag{4.354}$$

quindi il risultato.

Esercizio 228 *Classificare i punti di discontinuità della seguente funzione:*

$$f(x)=\left(\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}\right)^{\cot x} \tag{4.355}$$

Soluzione

Tale funzione non è periodica, giacché non lo è la base. È definita per

$$\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}>0,\quad x\neq k\pi,\quad \forall k\in\mathbb{Z} \tag{4.356}$$

La disequazione non può essere risolta analiticamente, per cui si ricorre alla via numerica, calcolando dapprima la radice dell'equazione

$$\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}=0, \tag{4.357}$$

ottenendo

$$x_0\simeq-0.456625 \tag{4.358}$$

Utilizzando *Mathematica*, tracciamo il grafico di

$$\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x},$$

ottenendo il plot di fig. 4.26, da cui vediamo

$$\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}>0\Longleftrightarrow x\in(x_0,+\infty)$$

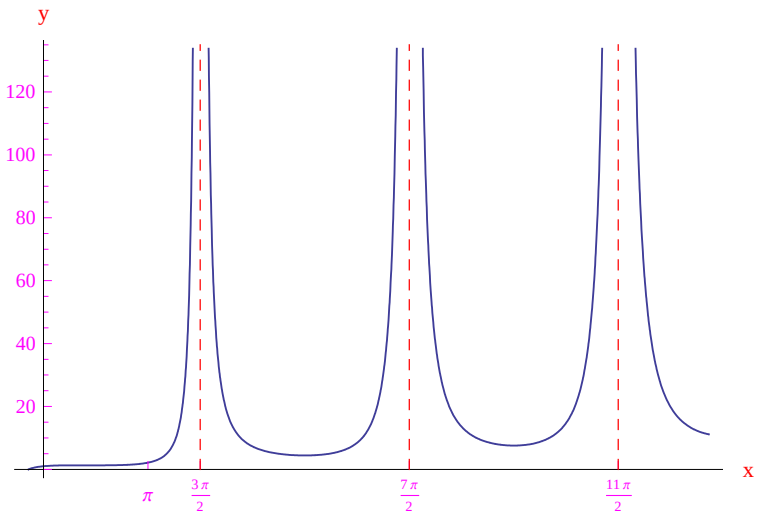


Figura 4.26: Grafico della funzione $\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}$.

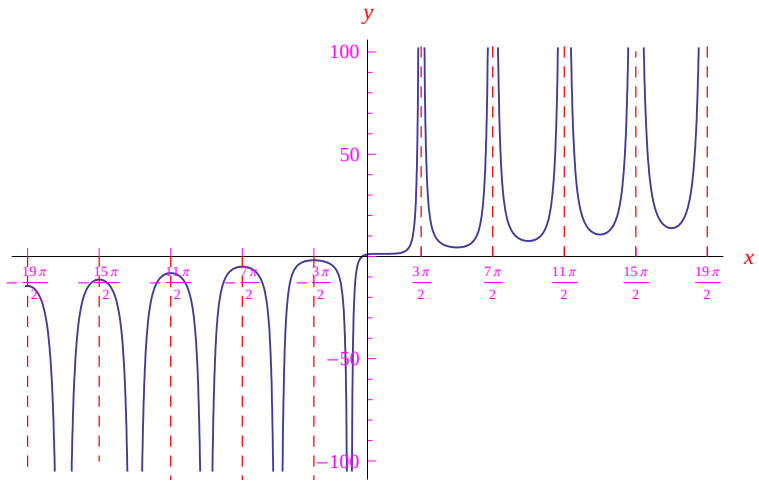


Figura 4.27: Grafico della funzione $\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}$ in $[-30, 30]$.

Tale conclusione è corroborata dal grafico di fig. 4.27.

Ne consegue che la funzione assegnata è definita in

$$X = (x_0, +\infty) - \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{k\pi\} \tag{4.359}$$

Da ciò segue che in $x = 0$ la funzione non è definita. Calcoliamo dunque

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + \cos x + \sin x}{1 + \sin x}\right)^{\cot x} = 1^{\infty}$$

Per rimuovere l'indeterminazione applichiamo il procedimento standard, forzando la base:

$$\frac{x + \cos x + \sin x}{1 + \sin x} = 1 + \chi(x), \tag{4.360}$$

da cui

$$\chi(x) = \frac{x + \cos x - 1}{1 + \sin x} \tag{4.361}$$

Dalla (4.360):

$$\lim_{x\to 0} \chi(x) = 0,$$

mentre il limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + \cos x + \sin x}{1 + \sin x}\right)^{\cot x} = \lim_{x\to 0} \left[(1 + \chi(x))^{\frac{1}{\chi(x)}}\right]^{\chi(x)\cot x} = \lambda_1^{\lambda_2}, \tag{4.362}$$

essendo

$$\lambda_1 = \lim_{x\to 0} (1 + \chi(x))^{\frac{1}{\chi(x)}}; \quad \lambda_2 = \lim_{x\to 0} \chi(x)\cot x \tag{4.363}$$

Il primo limite è immediato. Infatti basta porre

$$t = \chi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

onde

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0} (1 + t)^{1/t} = e,$$

mentre

$$\lambda_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\,(x + \cos x - 1)}{\sin x\,(1 + \sin x)} = \frac{0}{0}$$

Anziché applicare la regola di De L'Hospital, dividiamo numeratore e denominatore per x:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\,(x + \cos x - 1)}{\sin x\,(1 + \sin x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x(x+\cos x-1)}{x}}{\frac{\sin x(1+\sin x)}{x}} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \cos x}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \sin x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{x + \cos x - 1}{x}}_{\lambda'} \end{aligned} \tag{4.364}$$

Calcoliamo

$$\lambda' = \lim_{x\to 0} \frac{x + \cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{1 - \cos x}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 1, \tag{4.365}$$

dove ci siamo serviti del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\left(x+\cos x-1\right)}{\sin x\left(1+\sin x\right)}=1 \tag{4.366}$$

Finalmente

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)=e^{1}=e,$$

cosicché $x=0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Restano da classificare gli infiniti punti di discontinuità

$$\left\{k\pi\right\}_{k\in\mathbb{N}-\{0\}} \tag{4.367}$$

Osservando che le predette discontinuità provengono dall'esponente $\cot x$, occorre e basta studiare il comportamento della funzione in un intorno di π, calcolando

$$\lim_{x\to\pi^{-}} f\left(x\right),\quad \lim_{x\to\pi^{+}} f\left(x\right) \tag{4.368}$$

Calcoliamo il limite sinistro:

$$\lim_{x\to\pi^{-}}\left(\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}\right)^{\cot x}=\left(\pi-1\right)^{-\infty}=0^{+} \tag{4.369}$$

Calcoliamo il limite destro:

$$\lim_{x\to\pi^{+}}\left(\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}\right)^{\cot x}=\left(\pi-1\right)^{+\infty}=+\infty \tag{4.370}$$

Ne concludiamo che $x=\pi$ è un punto di discontinuità di seconda specie e tali saranno gli infiniti punti:

$$2\pi,3\pi,...,k\pi,...$$

Infine:

$$\lim_{x\to x_0^{+}} f\left(x\right)=+\infty \tag{4.371}$$

In fig. 4.28 riportiamo il grafico della funzione in $[0,2\pi]$.

Esercizio 229 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{\arctan x} \tag{4.372}$$

Soluzione
Risulta

$$\begin{aligned}\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{\arctan x}=\frac{0}{0}&\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x^{2}}}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^{2}}{1+x}=1\end{aligned} \tag{4.373}$$

Si noti che il limite si calcola facilmente senza applicare la regola di De L'Hospital. Infatti:

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\arctan x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}} \tag{4.374}$$

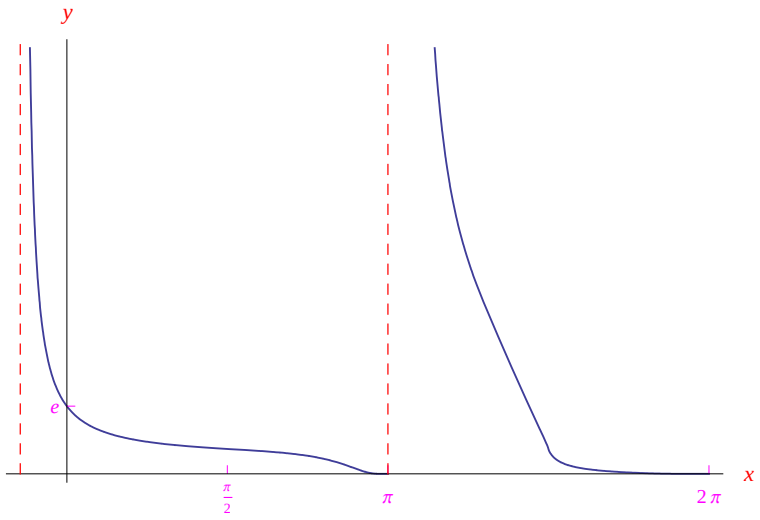


Figura 4.28: Grafico della funzione $f(x) = \left(\frac{x+\cos x+\sin x}{1+\sin x}\right)^{\cot x}$.

A questo punto rammentiamo i limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\lg_a (1+x)}{x} = \lg_a e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1, \tag{4.375}$$

da cui il risultato precedente.

Esercizio 230 *Calcolare*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi - 2x|} \tag{4.376}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi - 2x|} = \frac{\ln(+\infty)}{\ln(0^+)} = \frac{\infty}{\infty} \tag{4.377}$$

Prima di applicare la regola di De L'Hospital, è conveniente eseguire la sostituzione

$$t = \pi - 2x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0, \tag{4.378}$$

da cui

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \Longrightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \cot\frac{t}{2} \tag{4.379}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi - 2x|} &= \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left|\cot\frac{t}{2}\right|}{\ln|t|} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{D_t \ln\left|\cot\frac{t}{2}\right|}{D_t \ln|t|}, \end{aligned} \tag{4.380}$$

essendo

$$D_t = \frac{d}{dt} \tag{4.381}$$

Per calcolare le derivate osserviamo che se $\xi(t)$ è una qualunque funzione derivabile:

$$D_t \ln|\xi(t)| = \frac{1}{\xi(t)} D_t \xi(t), \tag{4.382}$$

per cui la derivata del numeratore

$$\begin{aligned} D_t \ln\left|\cot\frac{t}{2}\right| &= \tan\frac{t}{2}\cdot(-1)\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} \\ &= -\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = -\frac{1}{\sin t}, \end{aligned} \tag{4.383}$$

mentre la derivata del denominatore è semplicemente

$$D_t \ln|t| = \frac{1}{t} \tag{4.384}$$

Segue

$$\lim_{t\to 0}\frac{D_t \ln\left|\cot\frac{t}{2}\right|}{D_t \ln|t|} = -\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = -1, \tag{4.385}$$

ovvero

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi - 2x|} = -1 \tag{4.386}$$

Esercizio 231 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \tag{4.387}$$

Soluzione

La differenza si presenta sotto la forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \infty - \infty \tag{4.388}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1 - x\cot x}{x} = \frac{0}{0}, \tag{4.389}$$

giacché

$$\lim_{x\to 0} x\cot x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1 \tag{4.390}$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1 - x\cot x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cot x + \frac{x}{\sin^2 x}}{1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin^2 x} - \cot x\right) = \infty - \infty \tag{4.391}$$

Tuttavia

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin^2 x} - \cot x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^2 x} = \frac{0}{0}, \tag{4.392}$$

per cui possiamo riapplicare la predetta regola:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} \underset{t=2x}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1 - \cos t}{\sin t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1-\cos t}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned} \tag{4.393}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = 0$$

Esercizio 232 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x \cdot \ln x) \tag{4.394}$$

Soluzione

Il prodotto si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x \cdot \ln x) = 0 \cdot \infty \tag{4.395}$$

Tale forma indeterminata può essere ricondotta alla $0/0$ per poi applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} (\arctan x \cdot \ln x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{D \arctan x}{D\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0^+} x \ln^2 x \end{aligned} \tag{4.396}$$

Tenendo conto del risultato dell'esercizio 241:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln^2 x = 0,$$

onde

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan x \cdot \ln x) = 0 \tag{4.397}$$

Esercizio 233 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = |x|^{\sin x} \tag{4.398}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, per cui calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\sin x} = 0^0, \tag{4.399}$$

cioè la forma indeterminata 0^0. Manipoliamo

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\sin x \ln|x|},$$

onde

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\sin x} = e^{\lim_{x\to 0} \sin x \ln|x|} \tag{4.400}$$

Quindi calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0} \sin x \ln|x| = 0 \cdot \infty = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\ln|x|)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)}$$

Calcoliamo la derivata del logaritmo del valore assoluto di x:

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \begin{cases} \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

ossia

$$\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right) = \frac{1}{x},$$

onde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} \\ &= -\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\sin x}_{=0} \\ &= 0\end{aligned}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Riguardo al comportamento per $x \to \pm\infty$, osserviamo innanzitutto che la funzione non è periodica.

$$f(x + 2k\pi) = |x + 2k\pi|^{\sin(x+2k\pi)} = |x + 2k\pi|^{\sin x}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4.401}$$

Ciò implica

$$f(x + 2k\pi) \neq f(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{4.402}$$

Se Γ_f è il grafico di f, si ha

$$\mathcal{R}_1 \supset \Gamma \supset \mathcal{R}_2, \tag{4.403}$$

dove

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin [-1,1], \quad y < |x|\right\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-1,1), \quad y > |x|\right\},\end{aligned} \tag{4.404}$$

come illustrato nelle figg. 4.29-4.30. Per $x \to +\infty$ la funzione compie infinite oscillazioni tra la retta $y = x$ e l'asse x, per cui non tende ad alcun limite. Analogo risultato per $x \to -\infty$.

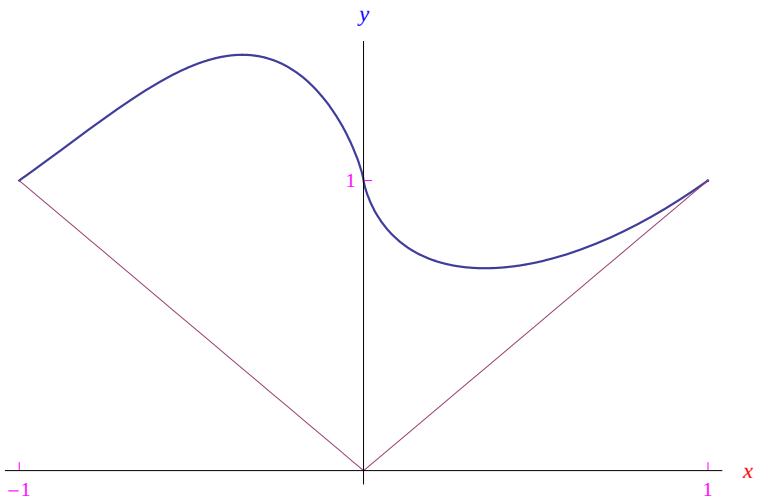


Figura 4.29: Grafico della funzione (4.398) nell'intervallo $[-1, 1]$.

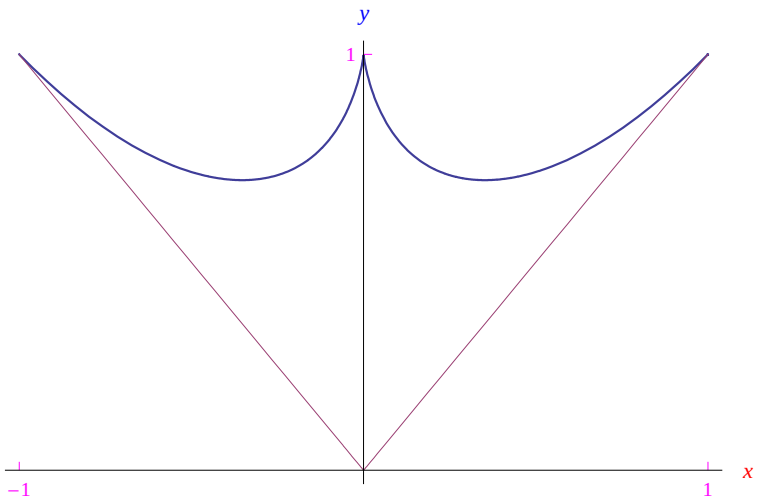


Figura 4.30: Grafico della funzione (4.398) nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

Esercizio 234 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = |x|^{\sin|x|} \tag{4.405}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, per cui calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\sin|x|} = 0^0, \tag{4.406}$$

cioè la forma indeterminata 0^0. Manipoliamo

$$f(x) = e^{\ln f(x)} = e^{\sin|x| \ln|x|},$$

onde

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\sin|x|} = e^{\lim_{x\to 0} \sin|x| \ln|x|} \tag{4.407}$$

Quindi calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0} \sin|x| \ln|x| = 0 \cdot \infty = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{\sin|x|}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\ln|x|)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin|x|}\right)} \tag{4.408}$$

Dall'esercizio precedente:

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \tag{4.409}$$

Calcoliamo a parte la derivata di $1/\sin|x|$. Svincoliamoci dal valore assoluto

$$\frac{1}{\sin|x|} = \begin{cases} \frac{1}{\sin x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{\sin(-x)} = -\frac{1}{\sin x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \tag{4.410}$$

per cui

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin|x|}\right) = \begin{cases} -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{\cos x}{\sin^2 x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{4.411}$$

Tale espressione suggerisce di distinguere $x \to 0^-$ da $x \to 0^+$. In virtù dei risultati dell'esercizio precedente:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin|x|}\right)} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = 0 \tag{4.412}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin|x|}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cos x} = 0$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to 0} \sin|x| \ln|x| = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \tag{4.413}$$

Cioè, anche in questo caso abbiamo una discointinuità eliminabile in $x = 0$. Per quanto riguarda il comportamento all'infinito, valgono considerazioni analoghe a quelle dell'esercizio precedente. Nelle figg. 4.31-4.32 riportiamo il grafico della restrizione della funzione (4.405) rispettivamente agli intervalli $[-1, 1]$ e $[-3\pi, 3\pi]$.

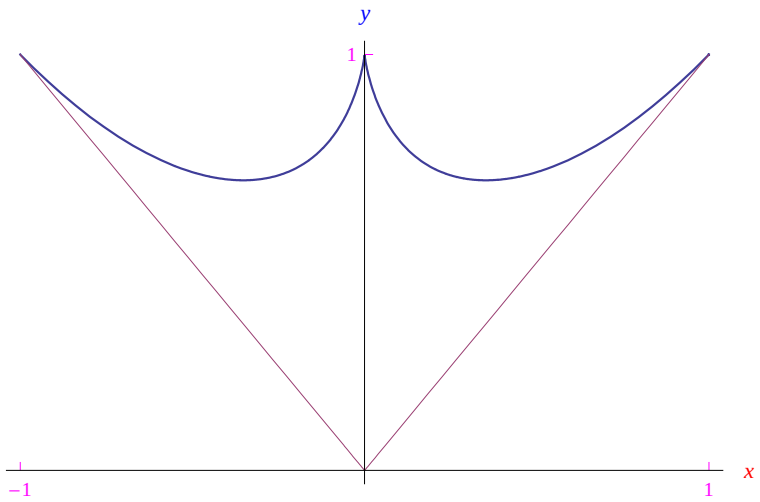


Figura 4.31: Grafico della funzione (4.405) nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 235 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} |x|^{10[1-\cos(10x)]} \tag{4.414}$$

Soluzione

Anche in questo caso abbiamo la forma indeterminata 0^0:

$$\lim_{x\to 0} |x|^{10[1-\cos(10x)]} = 0^0 \tag{4.415}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} |x|^{10[1-\cos(10x)]} = e^{\lim_{x\to 0} \ln|x|^{10[1-\cos(10x)]}} = e^{\lim_{x\to 0} 10[1-\cos(10x)]\ln|x|}$$

Perciò calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0} 10\left[1-\cos(10x)\right]\ln|x|$$

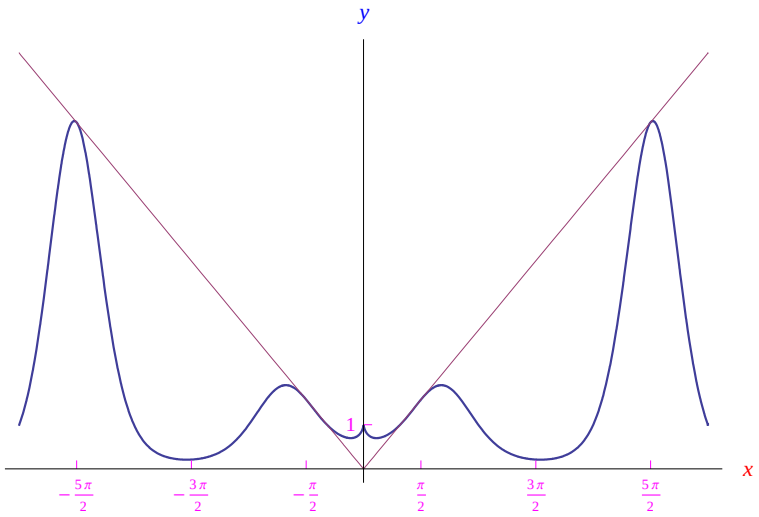


Figura 4.32: Grafico della funzione (4.405) nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

Dal momento che si tratta di una funzione pari, basta riferirsi a $x \to 0^+$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} 10\left[1-\cos\left(10x\right)\right]\ln x &= 10^3 \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\left(10x\right)}{\left(10x\right)^2} x^2 \ln x \\ &= 10^3 \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\left(10x\right)}{\left(10x\right)^2}}_{=1/2} \cdot \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x\end{aligned}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0,$$

onde

$$\lim_{x\to 0^+} 10\left[1-\cos\left(10x\right)\right]\ln x = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} 10\left[1-\cos\left(10x\right)\right]\ln|x| = 0$$

Ne concludiamo

$$\lim_{x\to 0} |x|^{10[1-\cos(10x)]} = e^0 = 1 \tag{4.416}$$

In fig. 4.33 riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizio 236 *Determinare il campo di esistenza della funzione*

$$f\left(x\right) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln\left(x^2-1\right) \tag{4.417}$$

Soluzione
Deve essere

$$\lg_{1/3} \ln\left(x^2-1\right) > 0 \tag{4.418}$$

Cioè

$$\begin{cases} \ln\left(x^2-1\right) > 0 \\ \ln\left(x^2-1\right) < 1 \end{cases} \tag{4.419}$$

Risolviamo la prima

$$\ln\left(x^2-1\right) > 0 \Longleftrightarrow x^2-1 > 1 \Longleftrightarrow x \in X_1 = \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \tag{4.420}$$

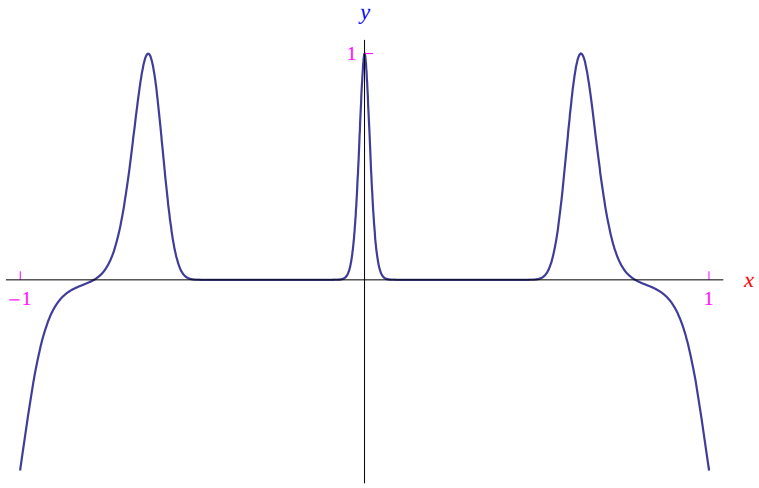


Figura 4.33: Grafico della funzione (4.414) nell'intervallo $[-1, 1]$.

Risolviamo la seconda

$$\ln\left(x^2-1\right) < 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1<e \end{cases} \tag{4.421}$$

Segue

$$\begin{aligned} &x^2-1>0 \Longleftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ &x^2-1<e \Longleftrightarrow x^2-(1+e)<0 \Longleftrightarrow x\in\left(-\sqrt{1+e},\sqrt{1+e}\right) \end{aligned} \tag{4.422}$$

Quindi le soluzioni della disequazione

$$\ln\left(x^2-1\right) < 1 \tag{4.423}$$

sono

$$x\in X_2=\left(-\sqrt{1+e},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{1+e}\right), \tag{4.424}$$

come illustrato nel grafico di fig. 4.34.

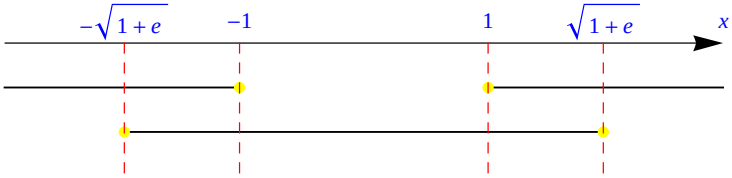


Figura 4.34: Soluzioni della disequazione (4.421).

Il campo di esistenza della funzione assegnata è

$$X=X_1\cap X_2=\left(-\sqrt{1+e},-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},\sqrt{1+e}\right),$$



Figura 4.35: Ricerca del campo di esistenza della funzione assegnata.

come si deduce dal grafico di fig. 4.35.

Esercizio 237 *Determinare il comportamento della funzione dell'esercizio precedente, agli estremi del suo campo di esistenza.*

Soluzione

Dal momento che la funzione è pari, possiamo studiare il comportamento per $x > 0$. Più precisamente, si tratta di calcolare i limiti per $x \to \left(\sqrt{2}\right)^{+}$ e per $x \to \left(\sqrt{1+e}\right)^{-}$. Abbiamo

$$\lim_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^{+}} f(x) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln 1^{+} = \lg_2 \lg_{1/3} \left(0^{+}\right) = \lg_2 \left(+\infty\right) = +\infty \tag{4.425}$$

Quindi

$$\lim_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^{+}} f(x) = +\infty \underset{f(x)\equiv f(-x)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\left(\sqrt{2}\right)^{-}} f(x) = +\infty \tag{4.426}$$

Ne consegue che le rette $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ sono asintoti verticali per il diagramma cartesiano della funzione.

$$\lim_{x\to\left(\sqrt{1+e}\right)^{-}} f(x) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln\left(e^{-}\right) = \lg_2 \lg_{1/3} \left(1^{-}\right) = \lg_2 \left(0^{+}\right) = -\infty \tag{4.427}$$

Quindi

$$\lim_{x\to\left(\sqrt{1+e}\right)^{-}} f(x) = -\infty \underset{f(x)\equiv f(-x)}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\left(\sqrt{1+e}\right)^{+}} f(x) = -\infty, \tag{4.428}$$

onde le rette $x = \sqrt{1+e}$ e $x = -\sqrt{1+e}$ sono asintoti verticali. Notiamo, infine, l'esistenza di una coppia di zeri simmetrici rispetto all'asse y, giacché

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lg_{1/3} \ln\left(x^2-1\right) = 1 \Longleftrightarrow \ln\left(x^2-1\right) = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow x^2 - 1 = \sqrt[3]{e}, \tag{4.429}$$

ovvero

$$x = \pm\sqrt{1-\sqrt[3]{e}} \tag{4.430}$$

In fig. 4.36 riportiamo il grafico completo della funzione assegnata.

Esercizio 238 *Determinare il comportamento della funzione*

$$f(x) = |x|^{\sinh x} \tag{4.431}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

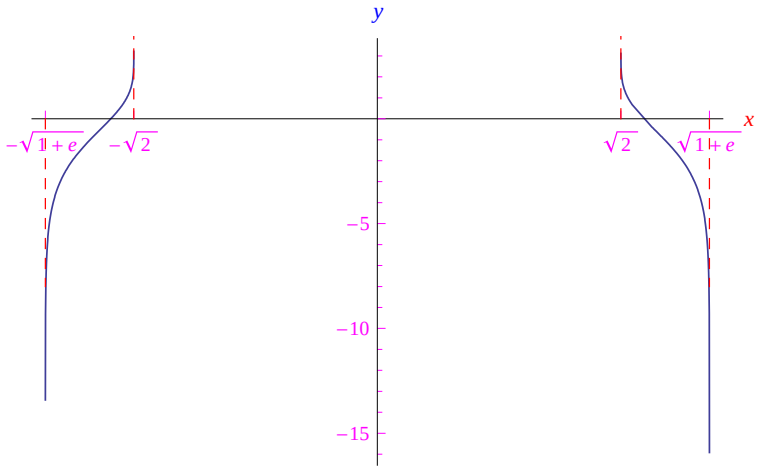


Figura 4.36: Grafico della funzione $f(x) = \lg_2 \lg_{1/3} \ln(x^2 - 1)$.

Soluzione

La funzione è definita in

$$X = \mathbb{R} - \{0\} \tag{4.432}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} |x|^{\sinh x} = 0^0 \tag{4.433}$$

Per risolvere tale forma indeterminata, applichiamo il solito procedimento

$$f(x) = e^{\sinh x \ln|x|}, \tag{4.434}$$

onde

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{\lim_{x\to 0} \sinh x \ln|x|} \tag{4.435}$$

Calcoliamo a parte il limite, applicando la regola di de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \sinh x \ln|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{\sinh x}} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\ln|x|}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right)} \tag{4.436}$$

Riesce

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right) = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} \tag{4.437}$$

Segue

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\ln|x|}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right)} &= -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cosh x}{\sinh^2 x}} \\
&= -\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \sinh x}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cosh x}}_{=1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \sinh x \ln|x| = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1 \tag{4.438}$$

In altri termini, $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile per la funzione.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)^{+\infty} = +\infty,$$

cioè la funzione diverge positivamente per $x \to +\infty$. Per $x \to -\infty$ è infinitesima:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^{+} \tag{4.439}$$

In fig. 4.37 riportiamo il grafico completo della funzione assegnata.

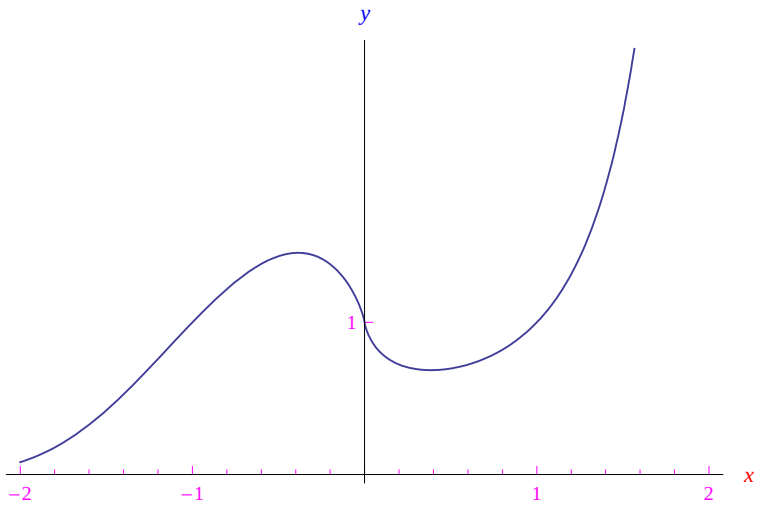


Figura 4.37: Grafico della funzione (4.431).

Esercizio 239 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} \tag{4.440}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} = \frac{1 - 1 + \ln(1-0)}{0} = \frac{0}{0} \tag{4.441}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} &= \lim_{x\to0} \frac{D\left[e^x - 1 + \ln(1-x)\right]}{D(\tan x - x)} \\
&= \lim_{x\to0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} \\
&= \lim_{x\to0} \left[\frac{e^x(1-x) - 1}{\sin^2 x} \cos^2 x\right] \\
&= \lim_{x\to0} \frac{e^x(1-x) - 1}{\sin^2 x} \underbrace{\lim_{x\to0} \cos^2 x}_{=1}
\end{aligned} \tag{4.442}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\sin^2 x}=\frac{0}{0} \tag{4.443}$$

Applichiamo nuovamente la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\sin^2 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-e^x}{2\sin x\cos x}\\&=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{\sin x\cos x}\\&=-\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}}_{=1}\end{aligned} \tag{4.444}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x-x}=-\frac{1}{2} \tag{4.445}$$

Esercizio 240 *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[ex-\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{1}{x}-1}\right)^x\right] \tag{4.446}$$

Soluzione
Osserviamo che

$$\begin{aligned}\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{1}{x}-1}\right)^x&=\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}\right)^x\\&=\left[x^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^x=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\end{aligned} \tag{4.447}$$

per cui il limite proposto si scrive:

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=0\cdot\infty, \tag{4.448}$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

La forma indeterminata $0\cdot\infty$ è riconducibile alla forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0} \tag{4.449}$$

L'ultima espressione suggerisce il cambio di variabile $t=1/x$, con conseguente applicazione della regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{D\left[e-(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]}{Dt} \tag{4.450}$$

Dall'esercizio precedente:

$$D\left[e-(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]=(1+t)^{\frac{1}{t}}\left[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t(1+t)}\right],$$

onde il limite diventa

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\,\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t^2(1+t)} \tag{4.451}$$
$$=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}}{1+t}}_{=e}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t^2(1+t)}$$

Sempre dall'esercizio precedente

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)\ln(1+t)-t}{t^2(1+t)}=\frac{1}{2} \tag{4.452}$$

Conclusione:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{t}=\frac{e}{2}\Longrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}=\frac{e}{2} \tag{4.453}$$

Cioè il limite proposto vale $e/2$.

Esercizio 241 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln^n x=0,\qquad\forall n\in\mathbb{N} \tag{4.454}$$

Soluzione

Il prodotto si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln^n x=0\cdot\infty \tag{4.455}$$

Scriviamo:

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln^n x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^n x}{x^{-1}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x^{-1/n}}\right)^n=\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1/n}}\right)^n \tag{4.456}$$

Calcoliamo il limite tra parentesi con la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1/n}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{D\ln x}{Dx^{-1/n}} \tag{4.457}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1}}=-n\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{x}=-n\lim_{x\to 0^+}x^{1/n}=0,$$

onde

$$\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1/n}}\right)^n=0, \tag{4.458}$$

da cui il risultato.

Esercizio 242 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+}(\arcsin x\cdot\ln x) \tag{4.459}$$

Soluzione

Il prodotto si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+}(\arcsin x\cdot\ln x)=0\cdot\infty \tag{4.460}$$

Tale forma indeterminata può essere ricondotta alla 0/0 per poi applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(\arcsin x\cdot\ln x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\arcsin x}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\arcsin x}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x\end{aligned} \tag{4.461}$$

Tenendo conto del risultato dell'esercizio precedente:

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0,$$

onde

$$\lim_{x\to 0^+}(\arcsin x\cdot\ln x) = 0 \tag{4.462}$$

Capitolo 5

Limiti delle funzioni iperboliche e delle funzioni iperboliche inverse

5.1 Introduzione

Ricordiamo che:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{5.1}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Le (5.1) sono definite in $(-\infty, +\infty)$. Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(e^x - e^{-x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\lim_{x\to+\infty} \sinh x = -\infty$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\sinh x$ è una funzione dispari. Il grafico di $\sinh x$ è riportato in fig. 5.1. Passiamo a $\cosh x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \frac{1}{2} \lim_{x\to+\infty} \left(e^x + e^{-x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$$

L'ultimo passaggio si giustifica osservando che $\cosh x$ è una funzione pari. Il grafico di $\cosh x$ è riportato in fig. 5.2. Passiamo a $\tanh x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Per rimuovere l'indeterminazione, utilizziamo il seguente artificio: $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x\left(1 - e^{-2x}\right)}{e^x\left(1 + e^{-2x}\right)} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, onde:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -\lim_{x\to+\infty} \tanh x = -1$$

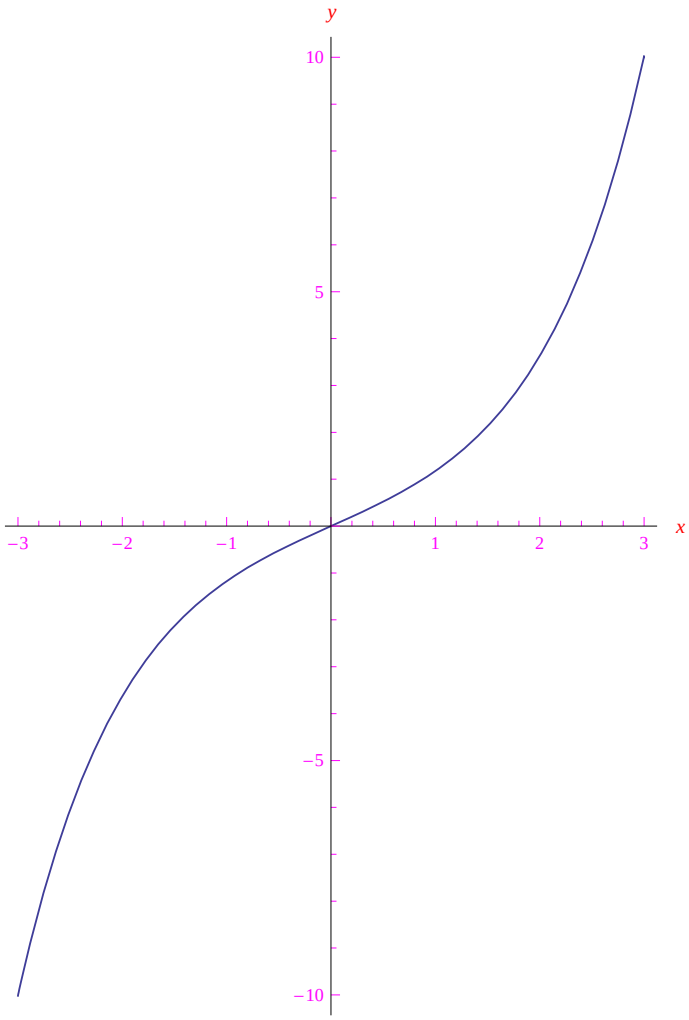


Figura 5.1: Diagramma cartesiano di $\sinh x$

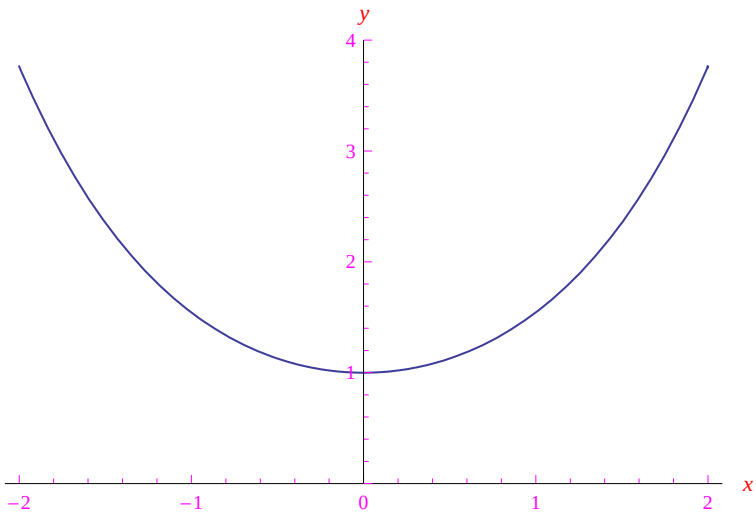


Figura 5.2: Diagramma cartesiano di $\cosh x$

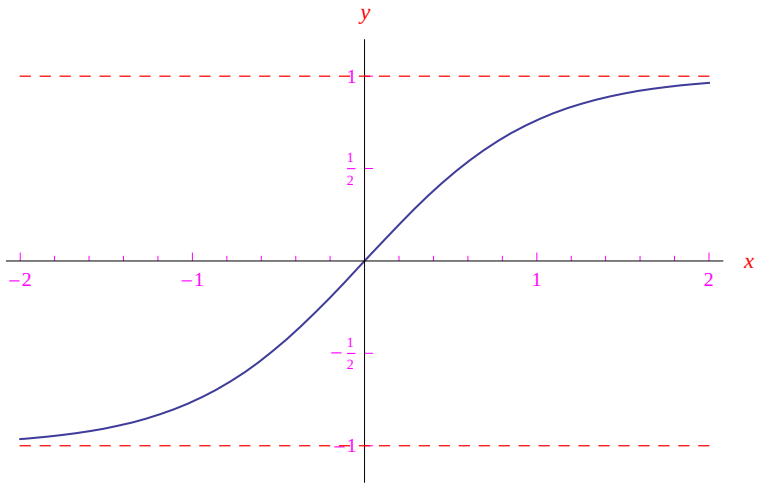


Figura 5.3: Diagramma cartesiano di $\tanh x$

Tale passaggio si giustifica osservando che $\tanh x$ è una funzione dispari. Il grafico di $\tanh x$ è riportato in fig. 5.3.

Le espressioni analitiche delle funzioni iperboliche inverse sono[1],[2]:

$$\operatorname{arc\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad \operatorname{arc\,cosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\operatorname{arc\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$\operatorname{arcsinh} x$ è definita in $(-\infty, +\infty)$, $\operatorname{arccosh} x$ in $[1, +\infty)$[3], $\operatorname{arctanh} x$ in $(-1, 1)$. Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,sinh} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,sinh} x = -\infty$$

Il grafico di $\operatorname{arcsinh} x$ è riportato in fig. 5.4. Passiamo a $\operatorname{arccosh} x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,cosh} x = +\infty$$

Il grafico di $\operatorname{arccosh} x$ è riportato in fig. 5.5. Passiamo a $\operatorname{arctanh} x$:

$$\lim_{x\to1^-} \operatorname{arc\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = \frac{1}{2}\ln(+\infty) = +\infty \tag{5.2}$$
$$\lim_{x\to-1^+} \operatorname{arc\,tanh} x = -\lim_{x\to1^-} \operatorname{arc\,tanh} x = -\infty$$

Il grafico di $\operatorname{arctanh} x$ è riportato in fig. 5.6.

Completiamo questa introduzione, riportando i limiti fondamentali di facile dimostrazione:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sinh x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{5.3}$$

[1] Al solito, per ottenere l'espressione della funzione inversa di una assegnata $f(x)$ invertibile, si risolve (rispetto a x) l'equazione $y = f(x)$.

[2] Alcuni autori denotano le funzioni iperboliche inverse con $\operatorname{settsinh} x, \operatorname{settcosh} x$, $\operatorname{setttanh} x$. Noi utilizzeremo entrambe le notazioni.

[3] Osserviamo che $\cosh x$ è invertibile solo localmente.

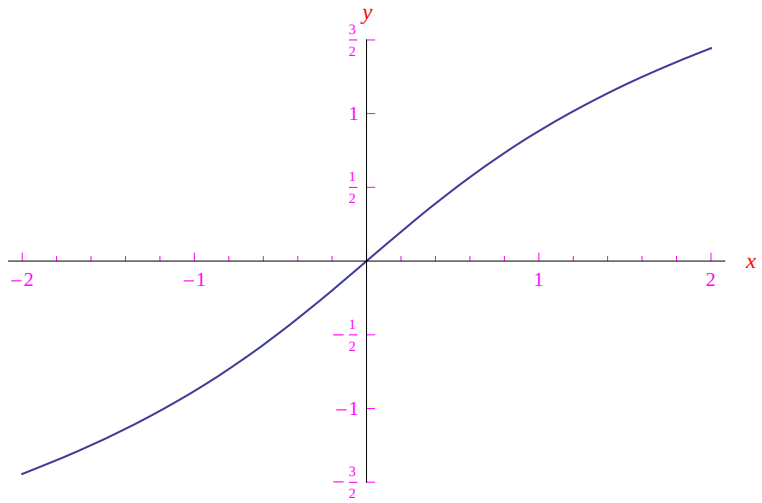


Figura 5.4: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arcsinh} x$.

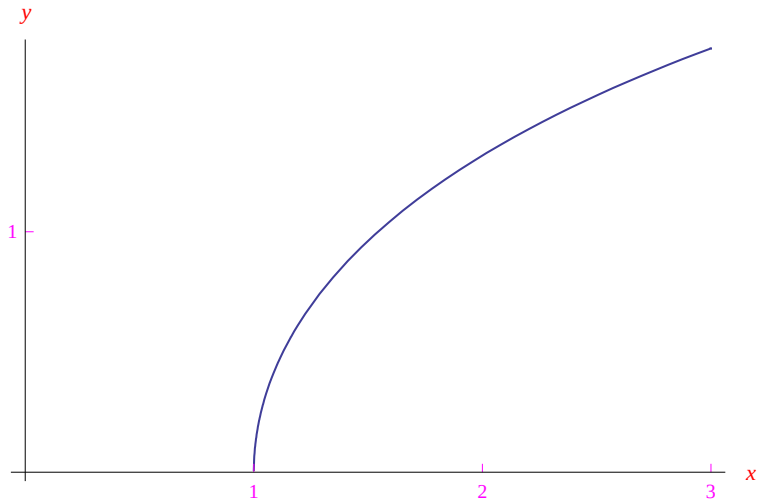


Figura 5.5: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arccosh} x$

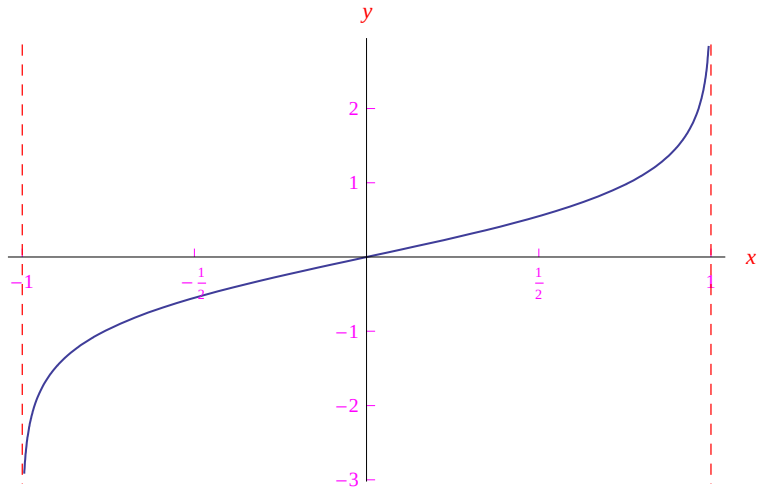


Figura 5.6: Diagramma cartesiano di $\operatorname{arctanh} x$

5.2 Esercizi svolti

Esercizio 243 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to 1} \sinh\left(\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right)} \tag{5.4}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\lim_{x\to 1} \sinh\left(\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right) = \sinh\left(\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right), \tag{5.5}$$

per cui calcoliamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \tag{5.6}$$

Per rimuovere l'indeterminazione razionalizziamo il denominatore:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}{x^2-x} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}{x\,(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = 2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Conclusione

$$\lambda = \sinh 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \frac{e^4-1}{2e^2} \tag{5.8}$$

Esercizio 244 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to -\infty} (x + \ln\cosh x - 2\tanh x + 1)} \tag{5.9}$$

Soluzione
Tenendo conto dei limiti

$$\lim_{x\to -\infty} \tanh x = -1, \quad \lim_{x\to -\infty} \cosh x = +\infty,$$

si ha

$$\lim_{x\to -\infty} (x + \ln\cosh x - 2\tanh x + 1) = (-\infty) + \underbrace{\ln(+\infty)}_{=+\infty} - 2(-1) + 1 = \infty - \infty \tag{5.10}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, decomponiamo il limite

$$\lambda = \underbrace{\lim_{x\to -\infty} (1 - 2\tanh x)}_{=3} + \underbrace{\lim_{x\to -\infty} (x + \ln\cosh x)}_{=\lambda'} \tag{5.11}$$

Per calcolare λ', scriviamo

$$x = \ln e^x,$$

per cui

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lim_{x\to -\infty} (\ln e^x + \ln\cosh x) = \lim_{x\to -\infty} \ln(e^x \cosh x) = \ln \lim_{x\to -\infty} e^x \cosh x \\ &= \ln(0\cdot\infty) = \ln \lim_{x\to -\infty} \left(e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}+1}{2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \end{aligned}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to -\infty} (x + \ln\cosh x - 2\tanh x + 1) = 3 - \ln 2 \tag{5.12}$$

Esercizio 245 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(2+|x|-\frac{1}{2}\ln\cosh x+\tanh x\right)} \tag{5.13}$$

Soluzione
Osserviamo preliminarmente che comunque prendiamo $\delta > 0$:

$$|x| = -x, \quad \forall x \in (-\infty, -\delta), \tag{5.14}$$

per cui

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\left(2-x-\frac{1}{2}\ln\cosh x+\tanh x\right) = 2-(-\infty)-\frac{1}{2}\ln\cosh(-\infty)+\tanh(-\infty) \tag{5.15}$$
$$= 2+(+\infty)-\frac{1}{2}\ln(+\infty)+(-1) = 1+(+\infty)-(+\infty) = \infty-\infty$$

Per risolvere tale forma indeterminata, spezziamo il limite

$$\lambda = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}(2+\tanh x)}_{=1} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\ln\cosh x\right)}_{=\lambda'} \tag{5.16}$$

Per calcolare λ', scriviamo

$$x = \ln e^x,$$

onde

$$\lambda' = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln e^x+\ln\sqrt{\cosh x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^x\sqrt{\cosh x}\right) = \ln\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\sqrt{\cosh x}\right)$$
$$= \ln(0\cdot\infty) = \ln\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{e^{2x}\cosh x}\right) = \ln\sqrt{\lim_{x\to-\infty}e^{2x}\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \ln\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{3x}+e^x}{2}}$$
$$= \ln\sqrt{\frac{0^+ + 0^+}{2}} = \ln\left(0^+\right) = -\infty$$

Conclusione

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+|x|-\frac{1}{2}\ln\cosh x+\tanh x\right) = -\infty, \tag{5.17}$$

cioè la funzione diverge negativamente per $x \to -\infty$.

Esercizio 246 *Calcolare*

$$\boxed{\boxed{\lambda = \lim_{x\to+\infty} arc\cosh\left(\frac{x^5+x^4-2x^3+x^2-x-\sin^5 x}{x^5+x^4-2x^3+x^2-x+\sin^5 x}\right)}} \tag{5.18}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{x^5+x^4-2x^3+x^2-x-\sin^5 x}{x^5+x^4-2x^3+x^2-x+\sin^5 x}\right) \tag{5.19}$$
$$= \operatorname{arc\,cosh}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^4-2x^3+x^2-x-\sin^5 x}{x^5+x^4-2x^3+x^2-x+\sin^5 x}\right)$$
$$= \operatorname{arc\,cosh}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}-\frac{\sin^5 x}{x^5}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{\sin^5 x}{x^5}}\right]$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin^5 x}{x^5}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\right)^5=0,$$

onde

$$\operatorname{arc\,cosh}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}-\frac{\sin^5 x}{x^5}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{\sin^5 x}{x^5}}\right]=\operatorname{arc\,cosh}\frac{1+0}{1+0}=\operatorname{arc\,cosh}1=0$$

Conclusione

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{x^5+x^4-2x^3+x^2-x-\sin^5 x}{x^5+x^4-2x^3+x^2-x+\sin^5 x}\right)=0 \tag{5.20}$$

In fig. 5.7 riportiamo il grafico della funzione.

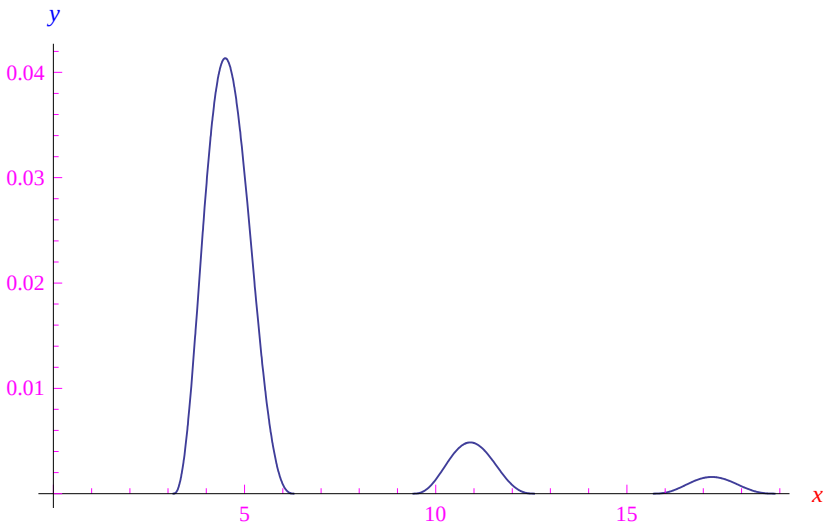


Figura 5.7: Diagramma cartesiano della funzione $\operatorname{arccosh}\left(\frac{x^5+x^4-2x^3+x^2-x-\sin^5 x}{x^5+x^4-2x^3+x^2-x+\sin^5 x}\right)$.

Esercizio 247 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to0}\frac{x-arc\sinh x}{x-arc\tanh x}} \tag{5.21}$$

Soluzione
Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arc\,sinh}x}{x-\operatorname{arc\,tanh}x}=\frac{0}{0}, \tag{5.22}$$

per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{arc\,sinh}x}{x-\operatorname{arc\,tanh}x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sinh}x}{x-\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tanh}x} \tag{5.23}$$

Ricordiamo che

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sinh}x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tanh}x=\frac{1}{x^2-1} \tag{5.24}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{x-\frac{1}{x^2-1}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{-x^2}\cdot\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) \tag{5.25}$$
$$=-\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}}_{=\lambda'}$$

Calcoliamo a parte il limite λ' eseguendo il cambio di variabile $x^2=t$:

$$\lambda'=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-1}{t}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+t)^{1/2}-1}{t}=\frac{1}{2},$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha,\quad \forall\alpha\in\mathbb{R} \tag{5.26}$$

Ne concludiamo

$$\lambda=-\lambda'=-\frac{1}{2} \tag{5.27}$$

Esercizio 248 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to+\infty}x\left[2^{arc\sinh\left(\frac{1}{x}\right)}-1\right]} \tag{5.28}$$

Soluzione
Riesce

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[2^{\operatorname{arc\,sinh}\left(\frac{1}{x}\right)}-1\right]=(+\infty)\left(2^{\operatorname{arc\,sinh}0}-1\right)=(+\infty)\left(2^0-1\right)=0\cdot\infty \tag{5.29}$$

Per risolvere tale forma indeterminata, eseguiamo il cambio di variabile

$$t=\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0^+,$$

onde

$$\lambda=\lim_{t\to 0^+}\frac{2^{\operatorname{arc\,sinh}t}-1}{t}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{d}{dt}\left(2^{\operatorname{arc\,sinh}t}-1\right)}{\frac{d}{dt}t} \tag{5.30}$$

Calcoliamo la derivata del numeratore:

$$\frac{d}{dt}\left(2^{\operatorname{arc\,sinh}t}-1\right)=\frac{d}{dt}2^{\operatorname{arc\,sinh}t}=2^{\operatorname{arc\,sinh}t}\ln 2\cdot\frac{d}{dt}\operatorname{arc\,sinh}t$$
$$=\ln 2\cdot\frac{2^{\operatorname{arc\,sinh}t}}{\sqrt{1+t^2}}$$

Quindi

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{d}{dt}\left(2^{\operatorname{arc\,sinh}t}-1\right)}{\frac{d}{dt}t}=\ln 2\lim_{t\to 0^+}\frac{2^{\operatorname{arc\,sinh}t}}{\sqrt{1+t^2}}=\ln 2\cdot\frac{2^0}{\sqrt{1+0}}=\ln 2 \tag{5.31}$$

Esercizio 249 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} - e^x}{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \tag{5.32}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} - e^x}{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} = \frac{0}{0}$$

Non occorre applicare la regola di De L'Hospital. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} - e^x}{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x \left[e^{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} - 1 \right]}{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} e^x}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} - 1}{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Per calcolare il secondo limite eseguiamo il cambio di variabile

$$t = -x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k, \tag{5.34}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} - 1}{-x + \sum_{k=1}^{n} (\tanh x)^k} = \lim_{x\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1, \tag{5.35}$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \tag{5.36}$$

da cui il risultato.

Capitolo 6

Infinitesimi ed infiniti

6.1 Definizioni

Sia f una funzione reale di una variabile reale definita in $X \subseteq \mathbb{R}$:

$$f : X \to \mathbb{R} \tag{6.1}$$

Se x_0 è un punto di accumulazione per X, sussistono le seguenti definizioni:

Definizione 13 *f è un **infinitesimo** in x_0 (o per $x \to x_0$) se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \tag{6.2}$$

Definizione 14 *f è un **infinito** in x_0 (o per $x \to x_0$) se*

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \tag{6.3}$$

Alcuni esempi di infinitesimi:

Esempio 15 *La funzione $f(x) = \sin x$ è un infinitesimo negli infiniti punti*

$$x_k = k\pi, \qquad (k \in \mathbb{Z}) \tag{6.4}$$

Esempio 16 *La funzione $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ non è definita in $x = 0$, tuttavia:*

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \tag{6.5}$$

per cui $x \sin \frac{1}{x}$ è un infinitesimo nel predetto punto.

Esempio 17 *La funzione $f(x) = 1/x$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, giacché:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \tag{6.6}$$

Alcuni esempi di infiniti:

Esempio 18 *La funzione $f(x) = \csc x$ è un infinito negli infiniti punti (6.4).*

Esempio 19 *La funzione $f(x) = 1/x$ è un infinito in $x = 0$.*

6.2 Infinitesimi confrontabili. Il concetto di ordine

Se x_0 è un qualunque punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$, resta definito l'insieme

$$\mathcal{I}(x_0) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \nexists I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \mid x \in X \cap I_\delta(x_0) - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) = 0 \end{array} \right\}, \tag{6.7}$$

che si identifica con la **classe degli infinitesimi** in x_0 non definitivamente nulli intorno a tale punto.

Ciò premesso, comunque prendiamo $f, g \in \mathcal{I}(x_0)$ il confronto tra f e g si realizza calcolando il limite del rapporto f/g:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \tag{6.8}$$

Si presentano i seguenti casi:

1. Il rapporto è un infinitesimo:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{6.9}$$
Significa che $f(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$.

2. Il rapporto è un infinito:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \tag{6.10}$$
Significa che $g(x)$ tende a zero più rapidamente di $g(x)$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$.

3. Il rapporto converge a un limite non nullo:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.11}$$
Significa che $f(x)$ e $g(x)$ tendono a zero con la medesima rapidità. Diremo allora che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine**. Se $\ell = 1$ gli infinitesimi si dicono *equivalenti* e si scrive:
$$f \sim g, \quad (x \to x_0) \tag{6.12}$$

4. Il rapporto è non regolare
$$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.13}$$

Esempio 20 *Siano*

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}, \;\; g(x) = x,$$

elementi di $\mathcal{I}(0)$*. Abbiamo:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

e tale limite non esiste.

In casi come questi spostiamo la nostra attenzione sul rapporto $|f(x)|/|g(x)|$, calcolando:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{6.14}$$

per cui si presenta uno dei seguenti sottocasi:

4a.
$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=\lambda>0 \tag{6.15}$$
Qui $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

4b.
$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=+\infty \tag{6.16}$$
e diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$.

4c. Il rapporto$|f(x)|/|g(x)|$ è non regolare
$$\nexists \lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{6.17}$$
ma è definitivamente limitato tra $\varepsilon_1,\varepsilon_2>\varepsilon_1>0$ intorno a x_0. Cioè
$$\begin{aligned}&\exists\varepsilon_1,\varepsilon_2>0\mid\exists\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}>0\mid x\in X\cap(x_0-\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2},x_0+\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})-\{x_0\}\\&\implies\varepsilon_1\leq\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\leq\varepsilon_2\end{aligned} \tag{6.18}$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

In tutti i casi esaminati gli infinitesimi assegnati si dicono **confrontabili.** Viceversa, si dicono **non confrontabili** se si verifica la negazione della (6.18) i.e. il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ non è definitivamente limitato intorno a x_0:

$$\begin{aligned}&\nexists\varepsilon_1,\varepsilon_2>0\mid\exists\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}>0\mid x\in X\cap(x_0-\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2},x_0+\delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})-\{x_0\}\\&\implies\varepsilon_1\leq\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\leq\varepsilon_2\end{aligned} \tag{6.19}$$

Fa eccezione il seguente caso:

$$\exists\varepsilon>0\mid\exists\delta_\varepsilon>0\mid x\in X\cap(x_0-\delta_\varepsilon,x_0+\delta_\varepsilon)-\{x_0\}\implies 0\leq\frac{|f(x)|}{|g(x)|}\leq\varepsilon \tag{6.20}$$

Cioè se il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ ha, intorno a x_0, per estremo inferiore lo zero ed è limitato superiormente. In tale circostanza si dice che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine non inferiore** a $g(x)$. In maniera simile:

$$\exists\varepsilon>0\mid\exists\delta_\varepsilon>0\mid x\in X\cap(x_0-\delta_\varepsilon,x_0+\delta_\varepsilon)-\{x_0\}\implies\varepsilon\leq\frac{|f(x)|}{|g(x)|}<+\infty, \tag{6.21}$$

ovvero il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ è definitivamente limitato inferiormente ma non superiormente. Ne consegue che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine non superiore** a $g(x)$.

***

Esempio 21 *Riprendiamo l'esempio 20:*

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \tag{6.22}$$

Il rapporto è non regolare

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin \frac{1}{x} \tag{6.23}$$

Passando ai valori assoluti di singolo infinitesimo, constatiamo che nemmeno ora il rapporto è regolare, giacché:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \sin \frac{1}{x} \right| \tag{6.24}$$

Tuttavia:

$$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.25}$$

Ne consegue che $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ è (in $x = 0$) un infinitesimo di ordine non inferiore a $g(x) = x$. In fig. 6.1 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

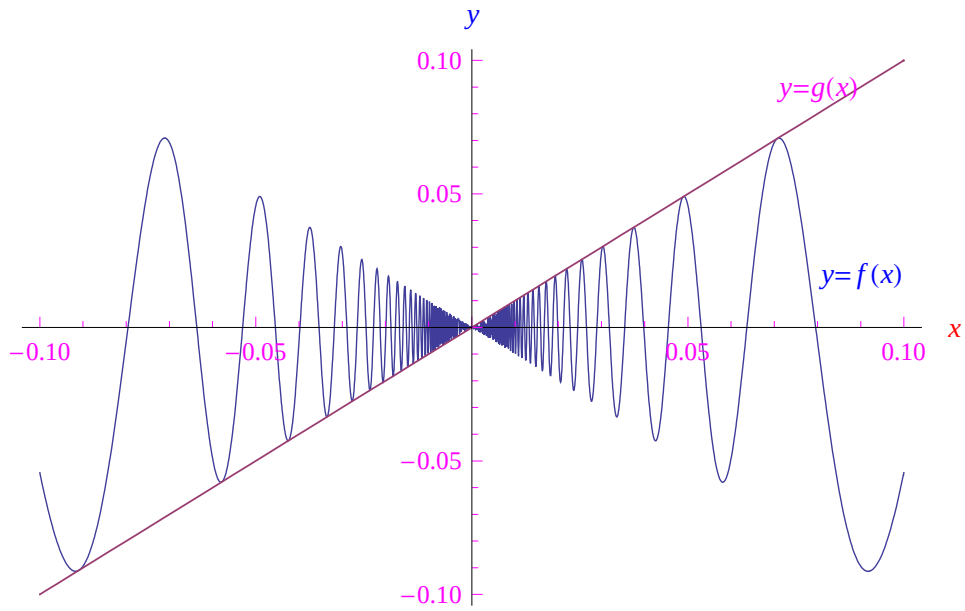


Figura 6.1: Grafico delle funzioni $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$ entrambe infinitesime per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato tra 0 e 1, per cui $f(x)$ è di ordine non inferiore a $g(x)$.

Esempio 22 *Siano*

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x} \tag{6.26}$$

Si tratta di infinitesimi in $x = 0$. Il primo limite è ben noto:

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \tag{6.27}$$

Il secondo è meno immediato, ma facilmente dimostrabile applicando il teorema **??***:*

$$\lim_{x\to 0} x \sin^2 \frac{1}{x} = 0 \tag{6.28}$$

Confrontiamo i due infinitesimi eseguendo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}, \tag{6.29}$$

che è manifestamente non regolare in $x = 0$*. Altrettanto non regolare è il rapporto dei valori assoluti di singolo infinitesimo:*

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} \tag{6.30}$$

Ma

$$1 \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.31}$$

Ne consegue che $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ *è (in* $x = 0$*) un infinitesimo di ordine non superiore a* $g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$*. In fig. 6.2 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di* $x = 0$*.*

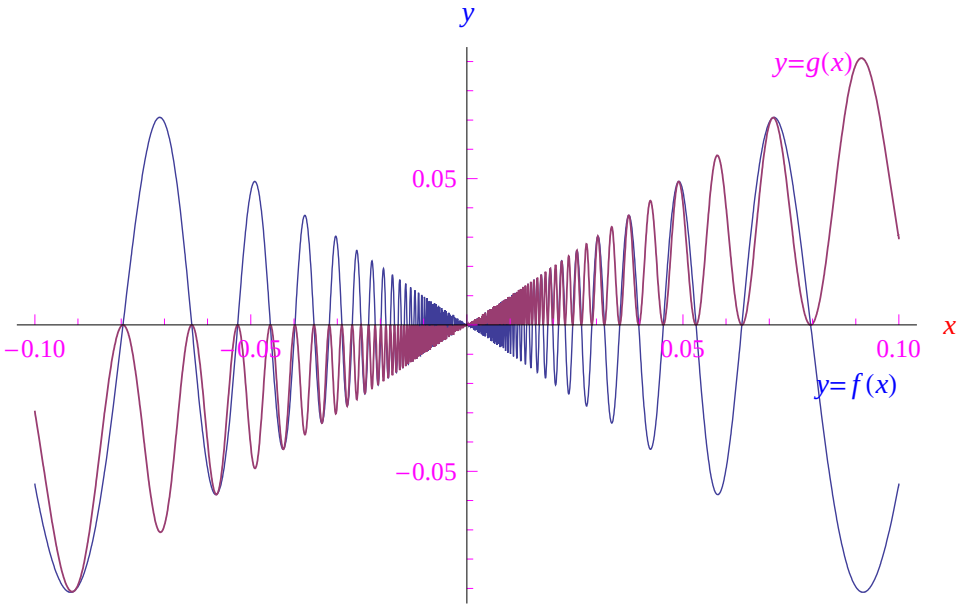


Figura 6.2: Grafico delle funzioni $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}$ entrambe infinitesime per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato inferiormente ma non superiormente, per cui $f(x)$ è di ordine non superiore a $g(x)$.

Un esempio immediato per ciò che riguarda la confrontabilità di infinitesimi è offerto dalla coppia di limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Ne consegue che $\sin x$ e x sono (per $x \to 0$) infinitesimi dello stesso ordine. Per quanto precede $\sin x$ e x sono infinitesimi equivalenti:

$$\sin x \sim x \qquad (x \to 0), \tag{6.32}$$

mentre $1-\cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore a x. Tali risultati hanno una notevole interpretazione geometrica che può essere dedotta dall'esame della fig. 6.3. Dal momento che $2\sin x$ è la lunghezza della corda PP' sottesa dall'arco di estremi P e P' (la cui lunghezza è $2x$), si ha che per $x \to 0$ la lunghezza della corda è un infinitesimo dello stesso ordine della lunghezza dell'arco. Diversamente, $1-\cos x$ è la lunghezza della "freccia" $\overline{QA}$ dell'arco di estremi P e P' e per quanto precede, è un infinitesimo di ordine superiore a x (per $x \to 0$). In parole povere, mentre la lunghezza della corda tende a zero con la stessa rapidità con cui si annulla la lunghezza dell'arco, la lunghezza della freccia va a zero più rapidamente.

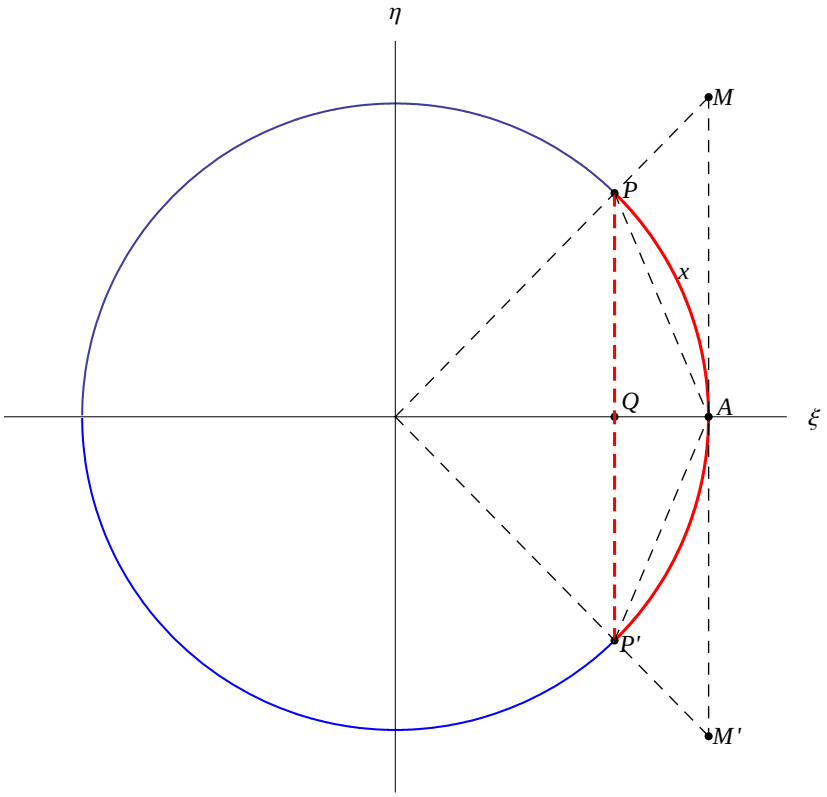


Figura 6.3: Circonferenza trigonometrica.

6.3 Infiniti confrontabili. Il concetto di ordine

Se x_0 è un qualunque punto di accumulazione per $X \subseteq \mathbb{R}$, resta definito l'insieme

$$\mathcal{J}(x_0) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \right\}, \tag{6.33}$$

che si identifica con la **classe degli infiniti** in x_0.

Ciò premesso, comunque prendiamo $f, g \in \mathcal{J}(x_0)$ il confronto tra f e g si realizza calcolando il limite del rapporto f/g:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \tag{6.34}$$

Si presentano i seguenti casi:

1. Il rapporto è un infinitesimo:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{6.35}$$
Significa che $|g(x)|$ tende a $+\infty$ più rapidamente di $|f(x)|$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$.

2. Il rapporto è un infinito:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty \tag{6.36}$$
Significa che $|f(x)|$ tende $+\infty$ più rapidamente di $|g(x)|$. Diremo allora che $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$.

3. Il rapporto converge a un limite non nullo:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.37}$$
Significa che $|f(x)|$ e $|g(x)|$ tendono a $+\infty$ con la medesima rapidità. Diremo allora che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine**.

4. Il rapporto è non regolare
$$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.38}$$

Esempio 23 *Siano*
$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$
elementi di $\mathcal{J}(0)$. *Abbiamo:*
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$$
e tale limite non esiste.

In casi come questi spostiamo la nostra attenzione sul rapporto $|f(x)| / |g(x)|$, calcolando:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{6.39}$$
per cui si presenta uno dei seguenti sottocasi:

4a.
$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \lambda > 0 \tag{6.40}$$
Qui $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine.

4b.
$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty \tag{6.41}$$
e diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore a $g(x)$.

4c. Il rapporto$|f(x)|/|g(x)|$ è non regolare

$$\nexists \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, \tag{6.42}$$

ma è definitivamente limitato intorno a x_0. Più precisamente

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ &\quad \Longrightarrow \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{6.43}$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello stesso ordine.

In tutti i casi esaminati gli infiniti assegnati si dicono **confrontabili.** Viceversa, si dicono **non confrontabili** se si verifica la negazione della (6.18) i.e. il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ non è definitivamente limitato intorno a x_0:

$$\begin{aligned} &\nexists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \mid \exists \delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}, x_0 + \delta_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) - \{x_0\} \\ &\quad \Longrightarrow \varepsilon_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{6.44}$$

Fa eccezione il seguente caso:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \Longrightarrow 0 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \varepsilon \tag{6.45}$$

Cioè se il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ ha, intorno a x_0, per estremo inferiore lo zero ed è limitato superiormente. In tale circostanza si dice che $f(x)$ è un infinito di **ordine non superiore** a $g(x)$. In maniera simile:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in X \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\} \Longrightarrow \varepsilon \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < +\infty, \tag{6.46}$$

ovvero il rapporto $|f(x)|/|g(x)|$ è definitivamente limitato inferiormente ma non superiormente. Ne consegue che $f(x)$ è un infinito di **ordine non inferiore** a $g(x)$.

Esempio 24 *Riprendiamo l'esempio 23:*

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x} \tag{6.47}$$

Il rapporto è non regolare

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} \tag{6.48}$$

Passando ai valori assoluti di singolo infinitesimo, constatiamo che nemmeno ora il rapporto è regolare, giacché:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} \tag{6.49}$$

Tuttavia:

$$0 < \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{x}\right|} \leq +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.50}$$

Ne consegue che $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{-1}$ *è (in* $x = 0$*) un infinito di ordine non inferiore a* $g(x) = x^{-1}$*. In fig. 6.4 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di* $x = 0$*.*

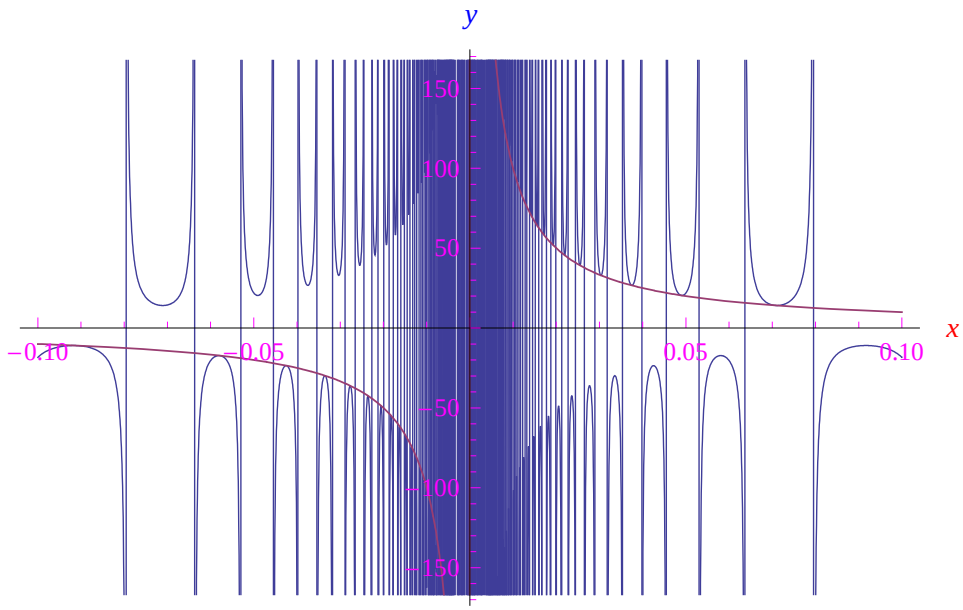


Figura 6.4: Grafico delle funzioni $f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$ entrambe infinite per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ non è limitato superiormente, per cui $f(x)$ è di ordine non inferiore a $g(x)$.

Esempio 25 *Siano dati gli infiniti (per $x \to 0$):*

$$f(x) = \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}, \quad g(x) = \frac{1}{x \sin^2 \frac{1}{x}} \tag{6.51}$$

Eseguiamo il rapporto:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sin \frac{1}{x}, \tag{6.52}$$

che è manifestamente non regolare in $x = 0$. Altrettanto non regolare è il rapporto dei valori assoluti di singolo infinitesimo:

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left| \sin \frac{1}{x} \right| \tag{6.53}$$

Ma

$$0 \leq \left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.54}$$

Ne consegue che $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{-1}$ è (in $x = 0$) un infinitesimo di ordine non superiore a $g(x) = \left(x \sin^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$. In fig. 6.5 riportiamo i grafici di tali funzioni in un intorno di $x = 0$.

6.4 Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]

Dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 26 ***(Principio di sostituzione degli infinitesimi)***
Ipotesi:

1. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ infinitesimi (per $x \to x_0$) che ammettono una decomposizione del tipo*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad g(x) = g_1(x) + g_2(x), \tag{6.55}$$

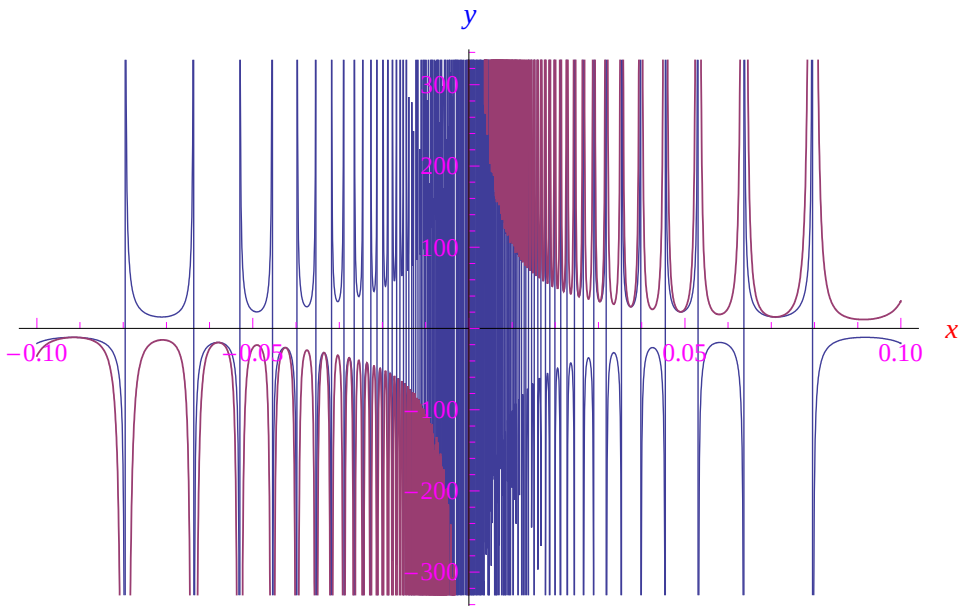


Figura 6.5: Grafico delle funzioni $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{-1}$ e $g(x) = \left(x \sin^2 \frac{1}{x}\right)^{-1}$ entrambe infinite per $x \to 0$. Il rapporto $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ è limitato tra 0 e 1, per cui $f(x)$ è di ordine non superiore a $g(x)$.

con $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ *tali che* $f_2(x)$ *è di ordine superiore a* $f_1(x)$, *e* $g_2(x)$ *è di ordine superiore a* $g_1(x)$.

2. *Il rapporto* $f(x)/g(x)$ *è regolare in* x_0.

Tesi:
Il rapporto $f_1(x)/g_1(x)$ *è regolare in* x_0 *e si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{6.56}$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste il limite (finito o infinito):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{6.57}$$

Segue

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}} \right] \tag{6.58}$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{1 + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}}$$

Per ipotesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g_2(x)}{g_1(x)},$$

onde l'asserto. ■

Da tale teorema segue che nel calcolo del limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}$$

è lecito trascurare a numeratore e a denominatore gli infinitesimi di ordine superiore.

Per quanto riguarda gli infiniti si dimostra immediatamente il seguente teorema:

Teorema 27 ***(Principio di sostituzione degli infiniti)***
Ipotesi:

1. *Siano $f(x)$ e $g(x)$ infiniti (per $x\to x_0$) che ammettono una decomposizione del tipo*

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ \ g(x)=g_1(x)+g_2(x), \tag{6.59}$$

con $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ tali che $f_2(x)$ è di ordine inferiore a $f_1(x)$, e $g_2(x)$ è di ordine inferiore a $g_1(x)$.

2. *Il rapporto $f(x)/g(x)$ è regolare in x_0.*

Tesi:
Il rapporto $f_1(x)/g_1(x)$ è regolare in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{6.60}$$

Da tale teorema segue che nel calcolo del limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)}$$

è lecito trascurare a numeratore e a denominatore gli infiniti di ordine inferiore.

***

Per poter quantificare il concetto di ordine di un infinitesimo (o di un infinito) è necessario definire un infinitesimo (o un infinito) di riferimento. Per fissare le idee, iniziamo con gli infinitesimi. Nella classe $\mathcal{I}(x_0)$ di tutti e soli gli infinitesimi in x_0, scegliamo ad arbitrio un *infinitesimo di riferimento* (o *infinitesimo campione*) $u(x)$. La scelta più semplice è

$$u(x)=\begin{cases}|x-x_0|, & \text{se } |x_0|<+\infty\\ \frac{1}{|x|}, & \text{se } |x_0|=+\infty\end{cases} \tag{6.61}$$

Osserviamo che comunque prendiamo $\alpha>0$, riesce:

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^\alpha=\lim_{x\to x_0}|x-x_0|^\alpha=0 \tag{6.62}$$

Cioè

$$[u(x)]^\alpha\in\mathcal{I}(x_0),\ \ \forall\alpha>0 \tag{6.63}$$

Inoltre, per ogni $\beta>0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{[u(x)]^\alpha}{[u(x)]^\beta}=\lim_{x\to x_0}|x-x_0|^{\alpha-\beta}=\begin{cases}0, & \text{se } \alpha>\beta\\ 1, & \text{se } \alpha=\beta\\ +\infty, & \text{se } \alpha<\beta\end{cases} \tag{6.64}$$

In altri termini, se $\alpha>\beta$ l'infinitesimo $[u(x)]^\alpha$ è di ordine superiore a $[u(x)]^\beta$, e viceversa se $\alpha<\beta$. Se $\alpha=\beta$ gli infinitesimi $[u(x)]^\alpha$ e $[u(x)]^\beta$ sono equivalenti. Ne consegue:

Definizione 28 *Il numero reale $\alpha > 0$ si dice* ***ordine*** *dell'infinitesimo $[u(x)]^{\alpha}$.*

Ciò premesso, sussiste la seguente definizione:

Definizione 29

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ è un infinitesimo} \\ \textbf{dotato di ordine} \end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha > 0 \mid \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.65}$$

Il numero reale $\alpha > 0$ si dice ordine di $f(x)$ rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x)$.

In maniera del tutto analoga si definisce l'ordine di un infinito $f \in \mathcal{J}(x_0)$. Più precisamente, se $u(x)$ è l'infinitesimo di riferimento nella classe $\mathcal{I}(x_0)$, si assume come infinito di riferimento nella classe $\mathcal{J}(x_0)$, l'infinito:

$$v(x) = \frac{1}{u(x)} = \begin{cases} \frac{1}{|x - x_0|}, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ |x|, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases} \tag{6.66}$$

Naturalmente:

Definizione 30

$$\left.\begin{array}{c} f(x) \text{ è un infinito} \\ \textbf{dotato di ordine} \end{array}\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha > 0 \mid \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^{\alpha}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.67}$$

Il numero reale $\alpha > 0$ si dice ordine di $f(x)$ rispetto all'infinito di riferimento $v(x)$.

Per quanto visto in precedenza, esempi immediati di infinitesimi confrontabili sono offerti dai limiti fondamentali:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{6.68}$$

da cui vediamo che per $x \to 0$, l'infinitesimo $\sin x$ è del primo ordine rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$, mentre l'infinitesimo $1 - \cos x$ è del secondo ordine. Graficamente ciò equivale a dire che in un intorno di $x = 0$ i diagrammi cartesiani di $\sin x$ e $1 - \cos x$ possono essere approssimati rispettivamente dalla retta $y = x$ e dall'arco di parabola $y = x^2$, come illustrato nelle figg. 6.6

Esercizio 250 *Determiniamo i valori del parametro reale λ per i quali la funzione*

$$f(x) = \frac{\arctan x - x}{\cos x - \lambda} \tag{6.69}$$

è un infinitesimo (in $x = 0$) del primo ordine rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$.

Soluzione

Dobbiamo imporre

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x}{x(\cos x - \lambda)} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.70}$$

Il limite restitusce la forma indeterminata $0/0$ per cui applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - x}{x(\cos x - \lambda)} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{\cos x - \lambda - x \sin x} \\ &= -\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{(1 + x^2)(\cos x - \lambda - x \sin x)} \\ &= -\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + x^2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x - \lambda - x \sin x} \end{aligned}$$

Il limite interessante è il secondo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x - \lambda - x \sin x} = \begin{cases} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\cos x - 1}{x^2} - \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{-\frac{1}{2} - 1} = -\frac{2}{3}, & \text{se } \lambda = 1 \\ \frac{0}{1 - \lambda} = 0, & \text{se } \lambda \neq 1 \end{cases} \tag{6.71}$$

Conclusione: deve essere $\lambda = 1$.

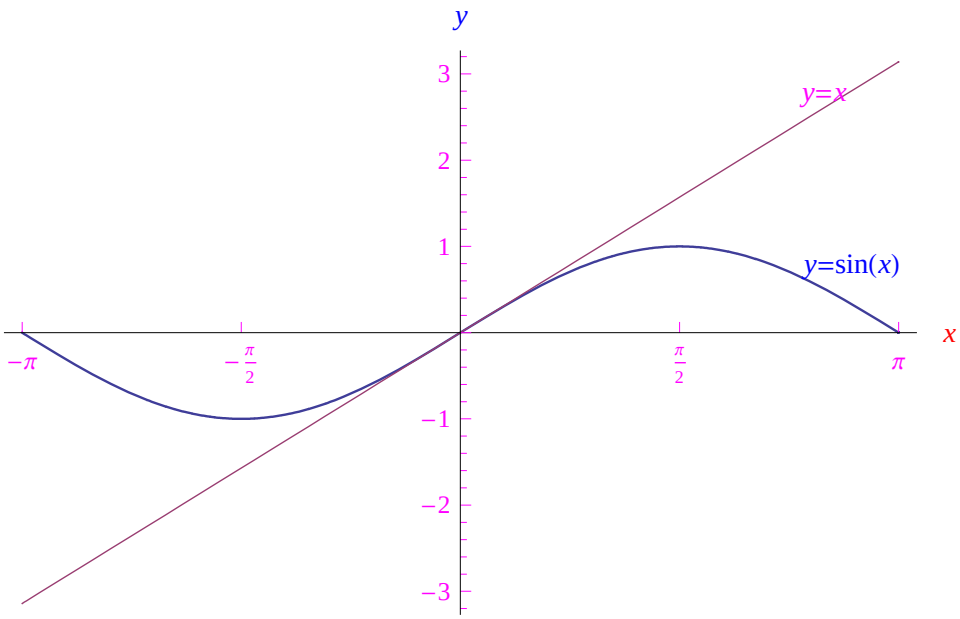


Figura 6.6: In un intorno di $x = 0$ la funzione $f(x) = \sin x$ può essere approssimata dalla funzione lineare $g(x) = x$.

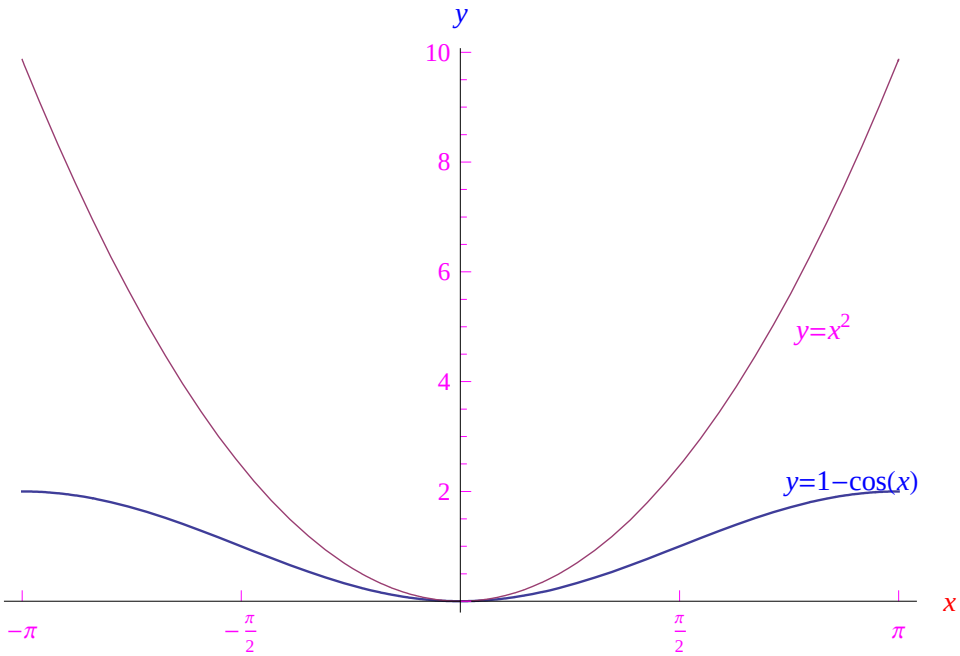


Figura 6.7: In un intorno di $x = 0$ la funzione $f(x) = 1 - \cos x$ può essere approssimata dalla funzione potenza di esponente reale 2 $g(x) = x^2$.

6.5 Infinitesimi ed infiniti non dotati di ordine

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la nozione di infinitesimo [infinito] dotato di ordine. Osserviamo ora che non tutti gli infinitesimi [infiniti] sono dotati di ordine. Ad esempio nel caso degli infinitesimi, assegnata la classe $\mathcal{I}(x_0)$ degli infinitesimi in x_0 e non definitivamente nulli intorno a tale punto, e l'infinitesimo di riferimento:

$$u(x) = \begin{cases} |x - x_0|, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ \frac{1}{|x|}, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases}, \tag{6.72}$$

può accadere

$$\exists f \in \mathcal{I}(x_0) \mid \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0 \tag{6.73}$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine infinitamente grande** (rispetto a $u(x)$). Si badi che $f(x)$ e $u(x)^\alpha$ sono comunque confrontabili. Pertanto, la confrontabilità è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza dell'ordine di infinitesimo. Se invece:

$$\exists f \in \mathcal{I}(x_0) \mid \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \pm\infty, \quad \forall \alpha > 0, \tag{6.74}$$

diremo che $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine infinitamente piccolo** (rispetto a $u(x)$).

Esempio 31 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = e^{-x} \tag{6.75}$$

si ha

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{I}(+\infty), \tag{6.76}$$

essendo $\mathcal{I}(+\infty)$ la classe degli infinitesimi per $x \to +\infty$, non identicamente nulli intorno a $x = +\infty$. Assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = \frac{1}{x}, \tag{6.77}$$

per cui calcoliamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \tag{6.78}$$

Applicando ripetutamente la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^x} = ... = \alpha! \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{[u(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0,$$

onde e^{-x} è (per $x \to +\infty$) un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

Esempio 32 *Assegnata la funzione*

$$f(x) = e^{-1/x} \tag{6.79}$$

riesce

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{I}(0) \tag{6.80}$$

Assumendo come infinitesimo di riferimento

$$u(x) = |x|, \tag{6.81}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \frac{0}{0} \tag{6.82}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = 1/x$ *e tenendo conto del risultato dell'esempio precedente.*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata è un infinitesimo (per $x \to 0^+$*) di ordine infinitamente grande. La funzione è graficata in fig. 6.8.*

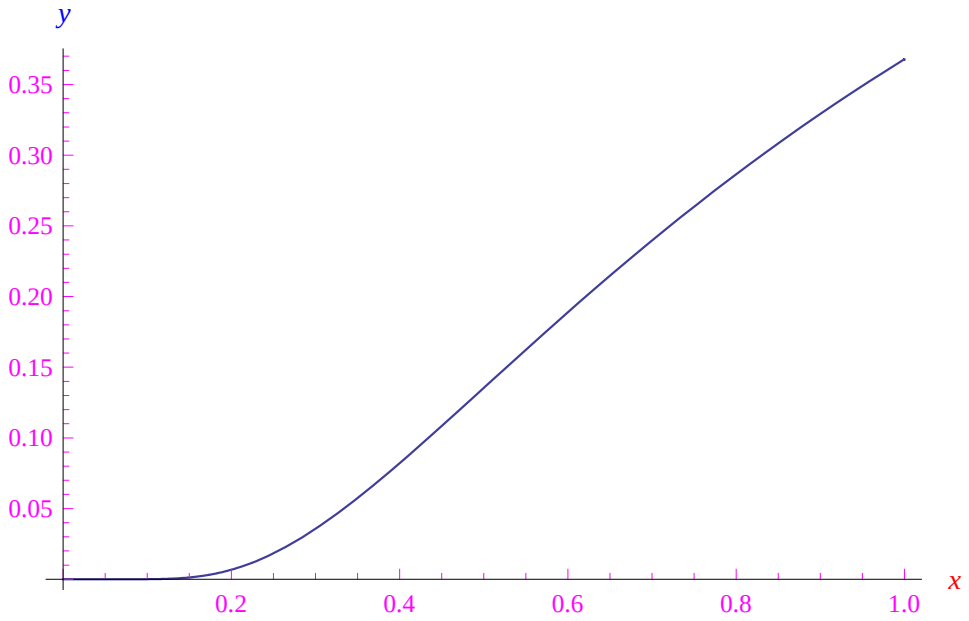


Figura 6.8: Grafico di $f(x) = e^{-1/x}$ in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \to 0^+$ la funzione si annulla più rapidamente di qualsiasi potenza x^α.

Esempio 33 *Sia data la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \tag{6.83}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln|x|} = \frac{1}{\ln(0^+)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-, \tag{6.84}$$

cosicché f *è un infinitesimo in* $x = 0$*. Per determinare l'eventuale ordine assumiamo come infinitesimo di riferimento la seguente funzione:*

$$u(x) = |x| \tag{6.85}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|^\alpha \ln|x|} \tag{6.86}$$

Dal momento che la funzione è pari, limitiamoci a calcolare il limite destro:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|^\alpha \ln|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha \ln x} = \frac{1}{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \tag{6.87}$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-\alpha}}{\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(-\alpha)\, x^{-\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = -\alpha \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \underset{\alpha>0}{=} -\infty \tag{6.88}$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = -\infty, \quad \forall \alpha > 0$$

Abbiamo così stabilito che la funzione assegnata è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine infinitamente piccolo. Ciò implica che detta funzione si annulla (per $x \to 0$) meno rapidamente di ogni potenza $|x|^\alpha$. In fig. 6.9 riportiamo il grafico della funzione in un intorno di $x = 0$.

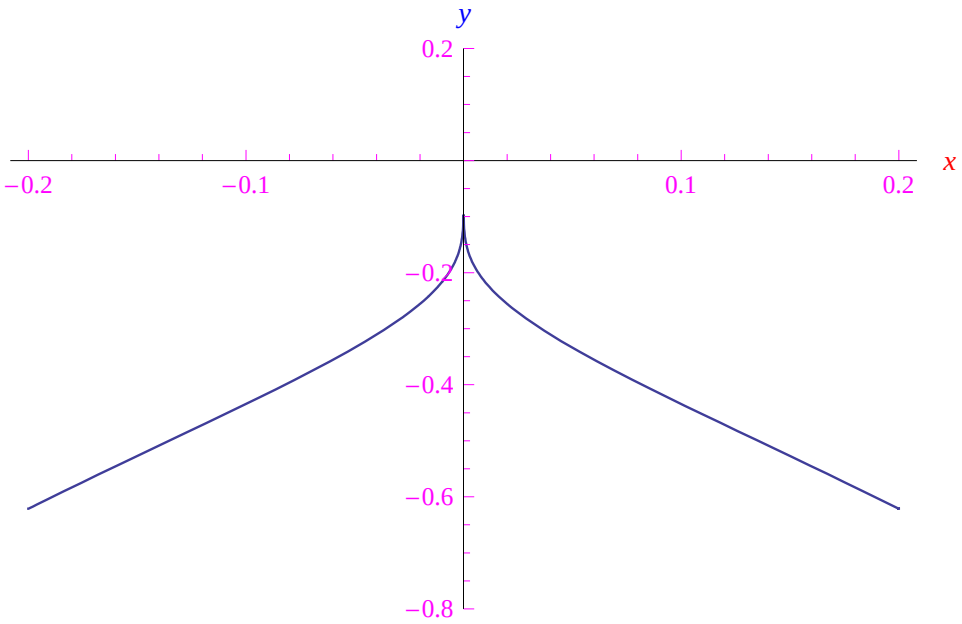


Figura 6.9: Grafico di $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ in un intorno destro di $x = 0$. Per $x \to 0$ la funzione si annulla meno rapidamente di qualsiasi potenza x^α.

Definizioni analoghe per quanto riguarda gli infiniti. Precisamente, assegnata la classe $\mathcal{J}(x_0)$ degli infiniti in x_0 e l'infinito di riferimento:

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-x_0|}, & \text{se } |x_0| < +\infty \\ |x|, & \text{se } |x_0| = +\infty \end{cases}, \tag{6.89}$$

può accadere

$$\exists f \in \mathcal{J}(x_0) \mid \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \pm\infty, \quad \forall \alpha > 0 \tag{6.90}$$

In tale circostanza diremo che $f(x)$ è un infinito di **ordine infinitamente grande** (rispetto a $v(x)$). Si badi che $f(x)$ e $v(x)^\alpha$ sono comunque confrontabili. Pertanto, la confrontabilità è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza dell'ordine di infinito. Se invece:

$$\exists f \in \mathcal{J}(x_0) \mid \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0, \tag{6.91}$$

diremo che $f(x)$ è un infinito di **ordine infinitamente piccolo** (rispetto a $v(x)$).

Esempio 34 *Consideriamo la funzione esponenziale:*

$$f(x) = e^x \tag{6.92}$$

Segue:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \Longrightarrow f \in \mathcal{J}(+\infty), \tag{6.93}$$

essendo $\mathcal{J}(+\infty)$ la classe degli infiniti per $x \to +\infty$. Assumiamo come infinito di riferimento la funzione:

$$v(x) = x \tag{6.94}$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\infty}{\infty} \tag{6.95}$$

Applicando ripetutamente la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} = ... = \frac{1}{\alpha!} \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \tag{6.96}$$

Cioè

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{[v(x)]^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0, \tag{6.97}$$

onde e^x è (per $x \to +\infty$) un infinito di ordine infinitamente grande.

Esempio 35 *Consideriamo la funzione logaritmo:*

$$f(x) = \ln x \tag{6.98}$$

Segue

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \Longrightarrow f \in \mathcal{J}(0) \cap \mathcal{J}(+\infty) \tag{6.99}$$

Determiniamo l'eventuale ordine di infinito. Per $x \to 0^+$ assumiamo come infinito di riferimento la funzione

$$v(x) = \frac{1}{x} \tag{6.100}$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to0^+} x^\alpha = 0, \quad \forall \alpha > 0 \tag{6.101}$$

Ne consegue che la funzione logaritmo è per $x \to 0^+$ un infinito di ordine infinitamente piccolo. Per $x \to +\infty$ assumiamo come infinito di riferimento la seguente funzione:

$$w(x) = x \tag{6.102}$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[w(x)]^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha > 0 \tag{6.103}$$

Da ciò segue che la funzione logaritmo è per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo. Ciò è simboleggiato in fig. 6.10.

Osservazione 36 *Gli esempi ?? e 34 si generalizzano nel modo seguente: assegnato $\lambda > 0$, le funzioni*

$$e^{\lambda x}, \quad e^{-\lambda x} \tag{6.104}$$

sono per $x \to +\infty$, rispettivamente un infinito di ordine infinitamente grande e un infinitesimo di ordine infinitamente grande.

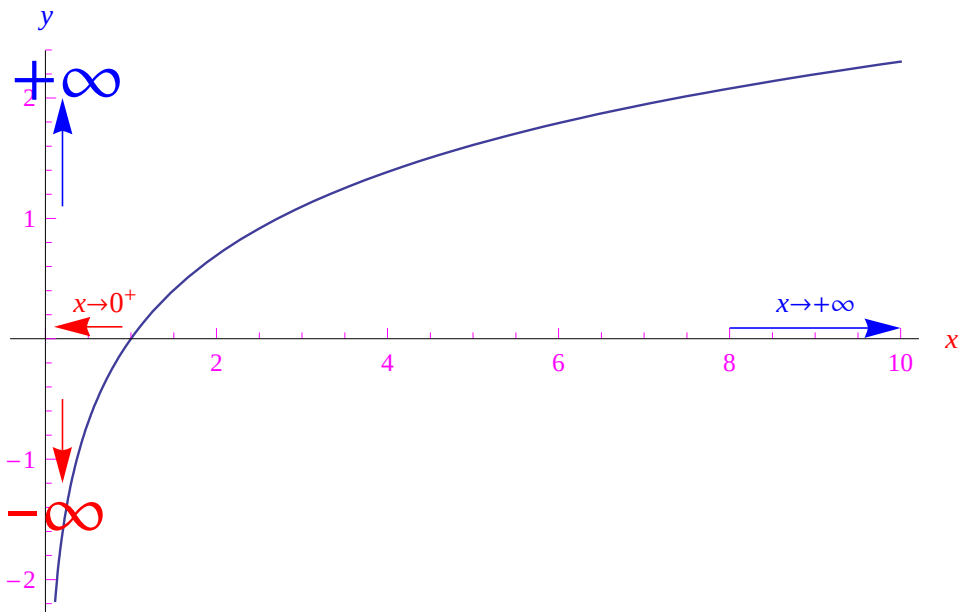


Figura 6.10: Per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$, la funzione $\log x$ è un infinito di ordine infinitamente piccolo.

Ordine indeterminato

Sussiste la seguente definizione

Definizione 37 *Se $u(x) \in \mathcal{I}(x_0)$ è l'infinitesimo di riferimento, diremo che $f \in \mathcal{I}(x_0)$* ***non ha un ordine determinato****, se il rapporto $\frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha}$ è regolare per ogni $\alpha > 0$, riuscendo convergente per alcuni valori di α, divergente per i rimanenti.*

Esempio 38 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x \ln x \tag{6.105}$$

Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 0$. Dal momento che $x \to 0^+$, assumiamo come infinitesimo di riferimento la funzione:

$$u(x) = x \tag{6.106}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} \tag{6.107}$$

Distinguiamo i casi:

1. $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(1-\alpha)\, x^{-2+\alpha}} \\ &= -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = -\frac{1}{1-\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} = 0,\end{aligned}$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore ad α per ogni $0 < \alpha < 1$.

2. $\alpha \geq 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} \frac{-\infty}{0^+} = -\infty, & se\ \alpha > 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty, & se\ \alpha = 1 \end{cases} \tag{6.108}$$

Cioè $f(x)$ è un infinito di ordine inferiore a 1.

Ne consegue che $x \ln x$ è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine inferiore a 1, ma maggiore di un qualunque $0 < \alpha < 1$.

Studiamo ora il comportamento per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x \ln x = +\infty, \tag{6.109}$$

onde $x \ln x$ è un infinito per $x \to +\infty$. Determiniamone l'ordine, assumendo come infinito di riferimento la funzione

$$v(x) = x \tag{6.110}$$

Ciò implica il calcolo del limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} \tag{6.111}$$

Distinguiamo i casi:

1. $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \tag{6.112}$$

2. $\alpha = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \tag{6.113}$$

3. $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = 0 \tag{6.114}$$

Ne consegue che $x \ln x$ è un infinito (per $x \to +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. In fig. 6.11 riportiamo il grafico della funzione.

Scala di infiniti di ordine indeterminato

In questo numero introduciamo la nozione di *scala di infiniti* [1].

Per quanto precede, per $x \to +\infty$ la funzione $x \ln x$ è un infinito di ordine indeterminato. Precisamente, è un infinito di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. Consideriamo ora la seguente funzione

$$f(x) = x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x \tag{6.115}$$

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x = +\infty \tag{6.116}$$

Al solito, determiniamo l'ordine di infinito assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = x$. Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x \cdot \ln \ln x}{x^{\alpha-1}} \tag{6.117}$$

Per calcolare tale limite distinguiamo i casi:

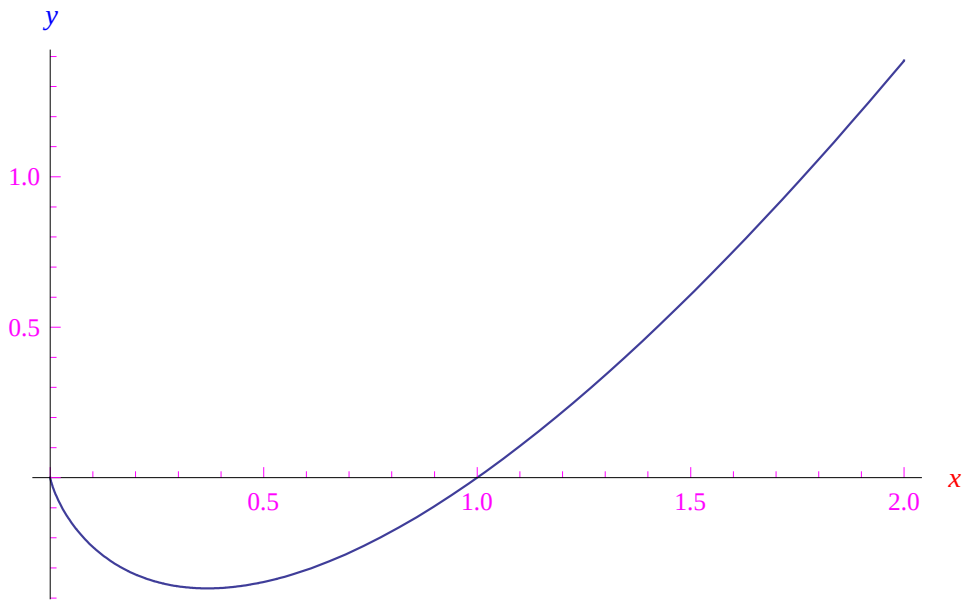


Figura 6.11: Per $x \to 0^+$ la funzione $x \ln x$ è un infinitesimo di ordine inferiore a 1, ma maggiore di un qualunque $0 < \alpha < 1$. Per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$.

1. $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x \cdot \ln\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x \cdot \ln\ln x}{x^{-(1-\alpha)}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \tag{6.118}$$

2. $\alpha = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x \cdot \ln\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \ln x \cdot \ln\ln x = +\infty \tag{6.119}$$

3. $\alpha > 1$

   Eseguiamo il cambio di variabile $t = \ln x$, per cui

$$x = e^t \Longrightarrow x^{\alpha-1} = e^{\lambda t}, \qquad (\lambda = \alpha - 1 > 0) \tag{6.120}$$

   Segue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x \cdot \ln\ln x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t \ln t}{e^{\lambda t}} = 0, \tag{6.121}$$

   giacché $e^{\lambda t}$ è un infinito di ordine infinitamente grande.

Ne consegue che $x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x$ è un infinito (per $x \to +\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha > 1$. È istruttivo confrontare gli infiniti

$$x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x, \quad x \cdot \ln x \tag{6.122}$$

Risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}{x \cdot \ln x} = \lim_{x\to+\infty} \ln\ln x = +\infty, \tag{6.123}$$

cosicché $x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x$ è di ordine superiore a $x \cdot \ln x$.

Lo step successivo consiste nel "costruire" l'infinito:

$$x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x \cdot \ln\ln\ln x, \tag{6.124}$$

giungendo ai medesimi risultati precedente. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln x}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\ln\ln x=+\infty, \tag{6.125}$$

onde

$$x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln x \tag{6.126}$$

è di ordine superiore a

$$x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x \tag{6.127}$$

L'iterazione del procedimento restituisce la seguente *scala di infiniti di ordine indeterminato*:

$$\{x\cdot\ln x, x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x, x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln x, ...\} \tag{6.128}$$

Tale insieme è infinito numerabile e ogni suo elemento è un infinito di ordine superiore al precedente.

Scala di infinitesimi di ordine indeterminato

In questo numero introduciamo la nozione di *scala di infinitesimi* [1]. Premettiamo il teorema:

Teorema 39

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ \text{è un infinitesimo (in } x_0\text{)} \\ \text{di ordine } \alpha \text{ rispetto a } u(x) \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \frac{1}{f(x)}\ \text{è un infinito di ordine } \alpha \\ \text{rispetto a } \frac{1}{u(x)} \end{array}\right. \tag{6.129}$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha}}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{[u(x)]^{\alpha}}}=\frac{1}{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha}}}=\frac{1}{\ell}\in\mathbb{R}-\{0\},$$

onde l'asserto. ■

Consideriamo ora l'insieme i cui elementi sono le funzioni reciproche delle funzioni appartenenti alla scala di infiniti (**??**):

$$\left\{\frac{1}{x\cdot\ln x},\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x},\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x\cdot\ln\ln\ln x},...\right\} \tag{6.130}$$

Per il teorema appena dimostrato si ha che ogni elemento di (6.130) è un infinitesimo (per $x\to+\infty$) di ordine superiore a 1, ma minore di un qualunque $\alpha>1$. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln\ln x}}{\frac{1}{x\cdot\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln\ln x}=0,$$

che si generalizza a ogni coppia di elementi successivi di (6.130). Ne consegue che ogni infinitesimo del predetto insieme è di ordine superiore al precedente. Chiamiamo tale insieme *scala di infinitesimi di ordine indeterminato.*

6.6 Parte principale di un infinitesimo

Siano dati gli infinitesimi (in x_0) $f(x)$ e $g(x)$ non identicamente nulli intorno a tale punto. Se $f(x)$ è di ordine α rispetto a $g(x)$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.131}$$

In tale ipotesi poniamo

$$\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} - \ell \tag{6.132}$$

Riesce

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} - \lim_{x\to x_0} \ell = \ell - \ell = 0, \tag{6.133}$$

cosicché $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo (in x_0). Da ciò segue che la funzione

$$r(x) \stackrel{def}{=} \varepsilon(x)\,[g(x)]^\alpha \tag{6.134}$$

è un infinitesimo di ordine maggiore di α rispetto a $g(x)$. Infatti:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{[g(x)]^\alpha} = \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0 \tag{6.135}$$

Tenendo conto della (6.132):

$$r(x) = f(x) - \ell\,[g(x)]^\alpha, \tag{6.136}$$

da cui

$$f(x) = \ell\,[g(x)]^\alpha + r(x) \tag{6.137}$$

Abbiamo così ricavato la *formula di decomposizione* di un infinitesimo. Sussiste la definizione

$$\ell\,[g(x)]^\alpha \stackrel{def}{=} \left(\begin{array}{c} \textbf{parte principale dell'infinitesimo } f(x) \\ \text{rispetto a } g(x) \end{array} \right. \tag{6.138}$$

In particolare se $g(x)$ è l'infinitesimo di riferimento $u(x)$, la formula di decomposizione diventa:

$$f(x) = \ell\,[u(x)]^\alpha + r(x) \tag{6.139}$$

Proposizione 40 *La parte principale di un infinitesimo di ordine α è a sua volta un infinitesimo di ordine α.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di parte principale. ■

Ne consegue che un qualunque infinitesimo di ordine α si decompone nella somma di una parte principale (di ordine α) e di un termine di ordine maggiore di α. In un intorno "sufficientemente piccolo" di x_0 è lecito trascurare il termine di ordine superiore $r(x)$. Cioè

$$f(x) \simeq \ell\,[u(x)]^\alpha, \qquad x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \tag{6.140}$$

essendo X l'insieme di definizione della funzione $f(x)$. Se $f(x)$ e $u(x)$ sono equivalenti, ovvero se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{u(x)} = 1 \Longrightarrow \alpha = 1,\ \ell = 1, \tag{6.141}$$

la formula di decomposizione si scrive:

$$f(x) = u(x) + r(x),$$

onde

$$f(x) \simeq u(x), \qquad x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{6.142}$$

In tal caso è consuetudine (specie nelle applicazioni) asserire che in un intorno di x_0 la funzione $f(x)$ "va come" $u(x)$.

Esempio 41 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right), \tag{6.143}$$

il cui insieme di definizione è

$$X = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \tag{6.144}$$

Riesce

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right) = \ln 1 = 0, \tag{6.145}$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 1$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x - 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right)}{(x-1)^\alpha} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 1} \frac{1+2x}{(x^2+x)(x-1)^{\alpha-1}}$$

Segue

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+2x}{(x^2+x)(x-1)^{\alpha-1}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 1 = 0$$

Cioè $f(x)$ è un infinitesimo di ordine 1. Abbiamo poi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+2x}{(x^2+x)(x-1)^{\alpha-1}} \underset{\alpha=1}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1+2x}{(x^2+x)} = \frac{3}{2},$$

cosicché gli infinitesimi $f(x)$ e $u(x)$ non sono equivalenti. L'infinitesimo assegnato si decompone in

$$\ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right) = \frac{3}{2}(x-1) + r(x),$$

dove $r(x)$ è un termine di ordine superiore. Inoltre:

$$\ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right) \simeq \frac{3}{2}(x-1), \qquad x \in (1-\delta, 1+\delta)$$

Geometricamente significa che in un intorno del punto del diagramma cartesiano di $f(x)$, di ascissa

$$x \in (1-\delta, 1+\delta),$$

il diagramma medesimo può essere approssimato dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}(x-1)$, come illustrato in fig. 6.12.

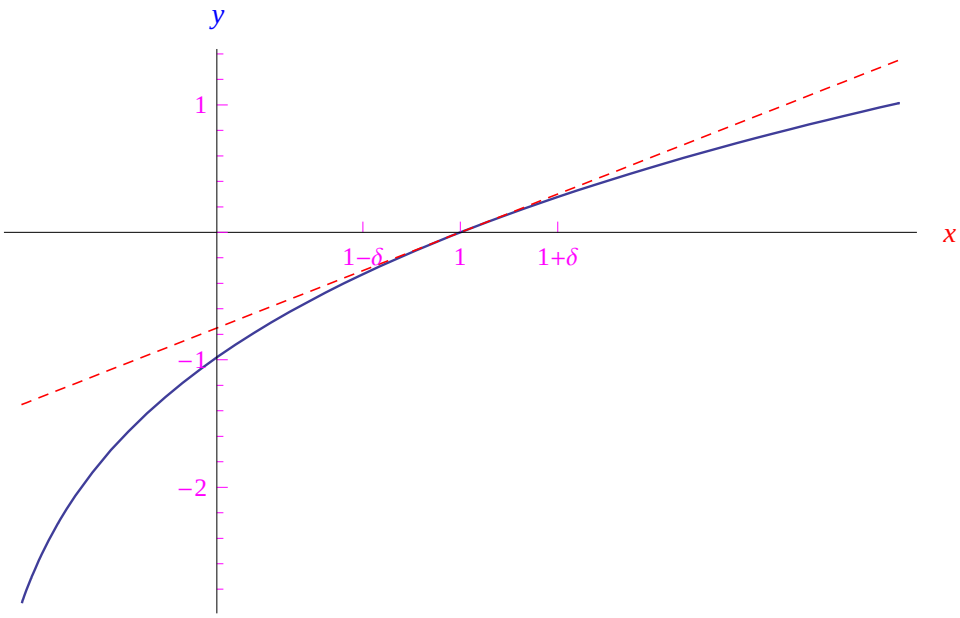


Figura 6.12: Per $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$ può essere approssimato dalla retta $y = \frac{3}{2}(x-1)$.

Esempio 42 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = x \sin x \tag{6.146}$$

Riesce

$$\lim_{x\to 0} x \sin x = 0, \tag{6.147}$$

onde $f(x)$ è un infinitesimo in $x = 0$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^{\alpha-1}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 1 = 1 \Longleftrightarrow \alpha = 2 \tag{6.148}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo del second'ordine. Risulta:

$$\alpha = 2 \Longrightarrow \ell = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{6.149}$$

per cui la parte principale è

$$\ell\,[u(x)]^\alpha = x^2 \tag{6.150}$$

Pertanto l'infinitesimo assegnato si decompone in

$$x \sin x = x^2 + r(x), \tag{6.151}$$

ove $r(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 2. La predetta decomposizione ha un'immediata interpretazione geometrica: in un intorno dell'origine il diagramma cartesiano della funzione è approssimato dalla parabola $y = x^2$, come illustrato in fig. 6.13

Esempio 43 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \cos^2 x + x^2 - 1 \tag{6.152}$$

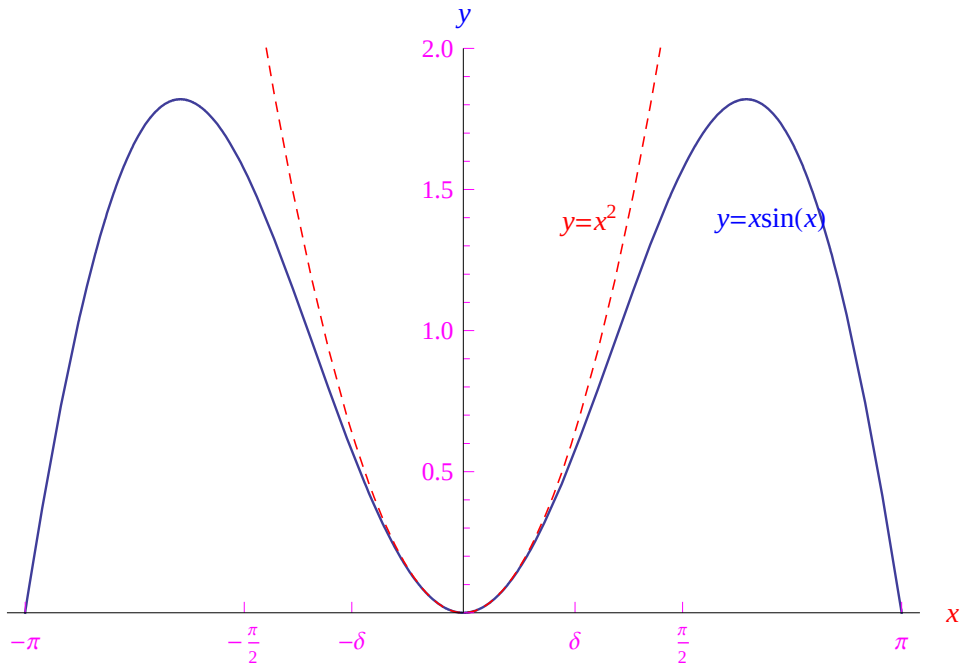


Figura 6.13: Per $x \in (-\delta, \delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = x \sin x$ può essere approssimato dalla parabola $y = x^2$.

Riesce

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos^2 x + x^2 - 1\right) = 0, \tag{6.153}$$

onde $f(x)$ *è un infinitesimo in* $x = 0$. *Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione* $u(x) = x$*:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x + x^2 - 1}{x^{\alpha-1}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin 2x + 2x}{\alpha x^{\alpha-1}} \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos 2x + 2}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}} \\ &= \frac{2}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^{\alpha-2}} \end{aligned} \tag{6.154}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 2x$*:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha-2}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha - 2 = 2 \iff \alpha = 4$$

Quindi $f(x)$ *è un infinitesimo del quart'ordine. Risulta:*

$$\alpha = 4 \Longrightarrow \ell = \frac{2^3}{4\cdot 4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \tag{6.155}$$

per cui la parte principale è

$$\ell\,[u(x)]^\alpha = \frac{1}{3}x^4 \tag{6.156}$$

Pertanto l'infinitesimo assegnato si decompone in

$$\cos^2 x + x^2 - 1 = \frac{1}{3}x^4 + r(x), \tag{6.157}$$

ove $r(x)$ *è un infinitesimo di ordine maggiore di 4. La predetta decomposizione ha un'immediata interpretazione geometrica: in un intorno dell'origine il diagramma cartesiano della funzione è approssimato dalla curva* $y = \frac{1}{3}x^4$*, come illustrato in fig. 6.14*

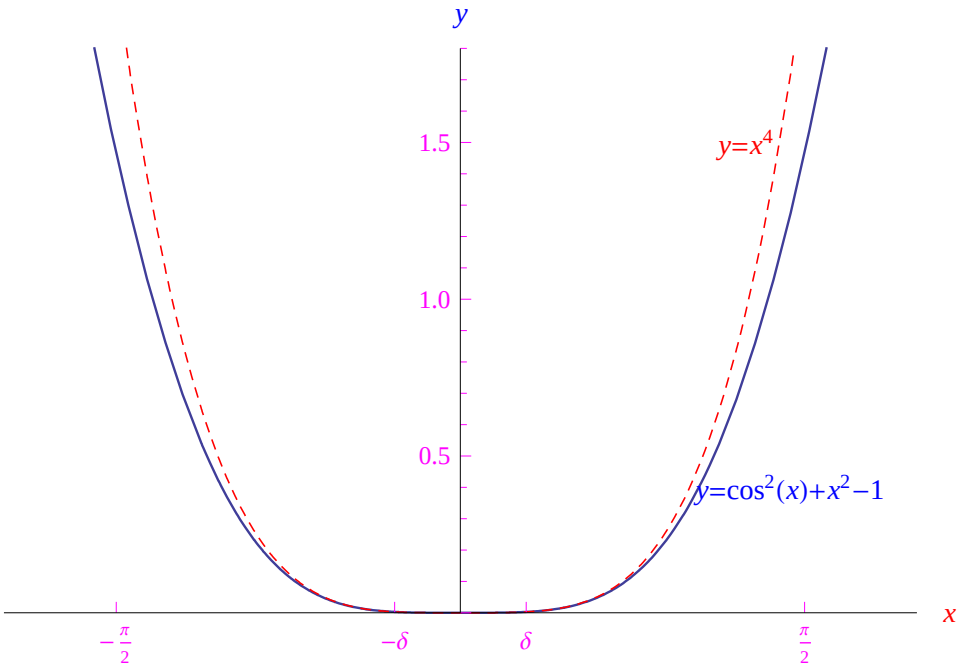


Figura 6.14: Per $x \in (-\delta, \delta)$ il diagramma cartesiano di $f(x) = x \sin x$ può essere approssimato dalla curva $y = x^4$.

6.7 Parte principale di un infinito

Siano dati gli infiniti (in x_0) $f(x)$ e $g(x)$. Se $f(x)$ è di ordine α rispetto a $g(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.158}$$

In tale ipotesi poniamo

$$\varepsilon(x) \stackrel{def}{=} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} - \ell \tag{6.159}$$

Riesce

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0, \tag{6.160}$$

cosicché $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo (in x_0). Definiamo

$$r(x) \stackrel{def}{=} \varepsilon(x) [g(x)]^\alpha \tag{6.161}$$

Quindi

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = 0 \cdot \infty \tag{6.162}$$

Se

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = +\infty \tag{6.163}$$

segue che $r(x)$ è un infinito di ordine minore di α (rispetto a $g(x)$). Infatti:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{[g(x)]^\alpha} = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Tenendo conto della (6.159):

$$r(x) = f(x) - \ell [g(x)]^\alpha, \tag{6.164}$$

da cui

$$f(x) = \ell [g(x)]^{\alpha} + r(x) \tag{6.165}$$

Abbiamo così ricavato la *formula di decomposizione* di un infinito. Sussiste la definizione

$$\ell [g(x)]^{\alpha} \overset{def}{=} \left(\begin{array}{c} \textbf{parte principale dell'infinito } f(x) \\ \text{rispetto a } g(x) \end{array} \right. \tag{6.166}$$

In particolare se $g(x)$ è l'infinito di riferimento $v(x)$, la formula di decomposizione diventa:

$$f(x) = \ell [v(x)]^{\alpha} + r(x) \tag{6.167}$$

Proposizione 44 *La parte principale di un infinito di ordine α è a sua volta un infinito di ordine α.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ell [v(x)]^{\alpha}}{[v(x)]^{\alpha}} = \ell \tag{6.168}$$

Per la (6.158):

$$\ell \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Ne consegue che un qualunque infinito di ordine α si decompone nella somma di una parte principale (di ordine α) e di un termine $r(x)$ che se è un infinito, è di ordine maggiore di α. Se $f(x)$ e $v(x)$ sono equivalenti, ovvero se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{v(x)} = 1 \Longrightarrow \alpha = 1, \ \ell = 1, \tag{6.169}$$

la formula di decomposizione si scrive:

$$f(x) = v(x) + r(x) \tag{6.170}$$

Esempio 45 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \tag{6.171}$$

Riesce

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = +\infty, \tag{6.172}$$

onde $f(x)$ è un infinito in $x = 0$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = 1/|x|$. Sfruttando la parità $(+1)$ di $f(x)$ e $u(x)$ riferiamoci al limite destro:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{[v(x)]^{\alpha}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^{\alpha}}} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - 2} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 2 \tag{6.173}$$

Cioé $f(x)$ è un infinito del second'ordine. Risulta:

$$\alpha = 2 \Longrightarrow \ell = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1, \tag{6.174}$$

per cui la parte principale è

$$\ell [v(x)]^{\alpha} = \frac{1}{x^2}, \tag{6.175}$$

cosicchè la parte principale di $f(x)$ è la funzione medesima. Ciò implica che il termine $r(x)$ è la funzione identicamente nulla, come illustrato in fig. 6.15.

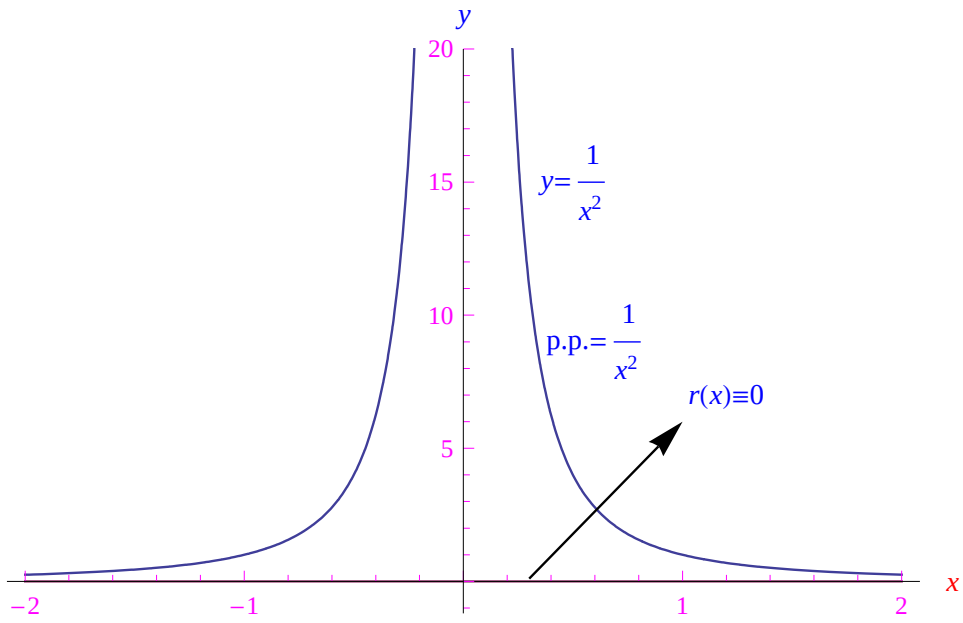


Figura 6.15: La parte principale dell'infinito $f(x) = 1/x^2$ è la funzione medesima.

Esempio 46 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \tan x \tag{6.176}$$

Riesce

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty, \tag{6.177}$$

onde $f(x)$ è un infinito per $x \to \frac{\pi}{2}^-$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$. Abbiamo

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cot x} \tag{6.178}$$

Anziché applicare la regola di De L'Hospital, eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{\pi}{2} - x \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} 0^+,$$

cosicché

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^\alpha}{\cot x} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} \tag{6.179}$$

Studiamone il comportamento al variare di α:

$$\alpha = 1 \Longrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = 1 \tag{6.180}$$

$$\alpha > 1 \Longrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\alpha - 1} \frac{t}{\tan t} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{t^\alpha}{\tan t} = \lim_{t \to 0^+} \left(t^{\alpha - 1} \frac{t}{\tan t} \right) = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{t^{1-\alpha}} \frac{t}{\tan t} \right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

Ne consegue che deve essere $\alpha = 1$ *i.e. la funzione assegnata è un infinito del primo ordine, riuscendo:*

$$\alpha = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = 1, \tag{6.181}$$

onde $f(x)$ *e* $u(x)$ *sono infiniti equivalenti. La parte principale di* $f(x)$ *è*

$$\ell\,[v(x)]^\alpha = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}, \tag{6.182}$$

per cui la decomposizione si scrive

$$\tan x = \underbrace{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}}_{p.p.} + \underbrace{\left(\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\right)}_{=r(x)} \tag{6.183}$$

Segue

$$\tan x \simeq \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.184}$$

L'andamento dei vari termini della decomposizione è illustrato in fig. 6.16.

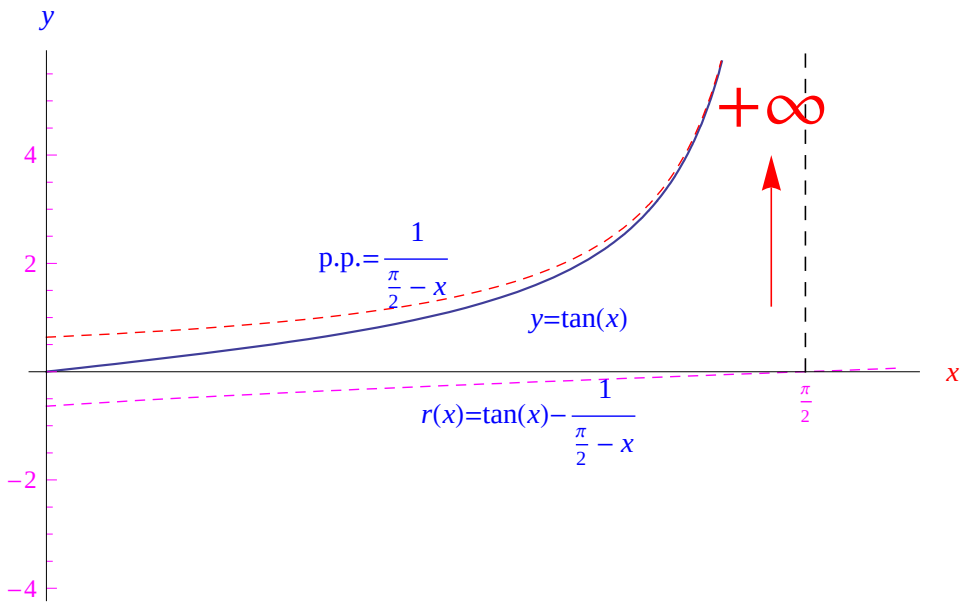


Figura 6.16: In un intorno sinistro di $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione $f(x) = \tan x$ è approssimata dalla sua parte principale $\frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$.

Esempio 47 *Consideriamo la funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \tag{6.185}$$

Riesce

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \tag{6.186}$$

onde $f(x)$ è un infinito per $x \to +\infty$. Ricerchiamone l'ordine assumendo come infinito di riferimento la funzione $v(x) = x$. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \frac{1}{0 \cdot \infty} \tag{6.187}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{\pi}{2} - \arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+, \tag{6.188}$$

da cui

$$x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t, \tag{6.189}$$

onde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{[v(x)]^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(\tan t)^\alpha}{t^{1/2}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \tag{6.190}$$

Ciò implica che $f(x)$ è un infinito di ordine $1/2$. Inoltre

$$\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \ell = 1 \tag{6.191}$$

Quindi la parte principale è

$$\ell\,[v(x)]^\alpha = \sqrt{x} \tag{6.192}$$

Segue

$$r(x) = f(x) - \ell\,[v(x)]^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} - \sqrt{x}, \tag{6.193}$$

che è un infinito di ordine minore di $1/2$. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}} - 1 \right) = 0 \tag{6.194}$$

La formula di decomposizione si scrive:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \underbrace{\sqrt{x}}_{p.p.} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} - \sqrt{x} \right)}_{r(x)} \tag{6.195}$$

Quindi

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \simeq \sqrt{x}, \qquad x \in (\delta, +\infty) \tag{6.196}$$

In altri termini, per $x \gg 1$ la funzione va come $\sqrt{x}$. Ciò è illustrato in fig. 6.17.

6.8 Proprietà e teoremi

Proposizione 48 *Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infinitesimi equivalenti (per $x \to x_0$).*

Se $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ è dotato di parte principale rispetto a $g(x)$, si ha che $f_{h\neq k}(x)$ è dotato di parte principale (rispetto a $g(x)$) e le due parti principali coincidono.

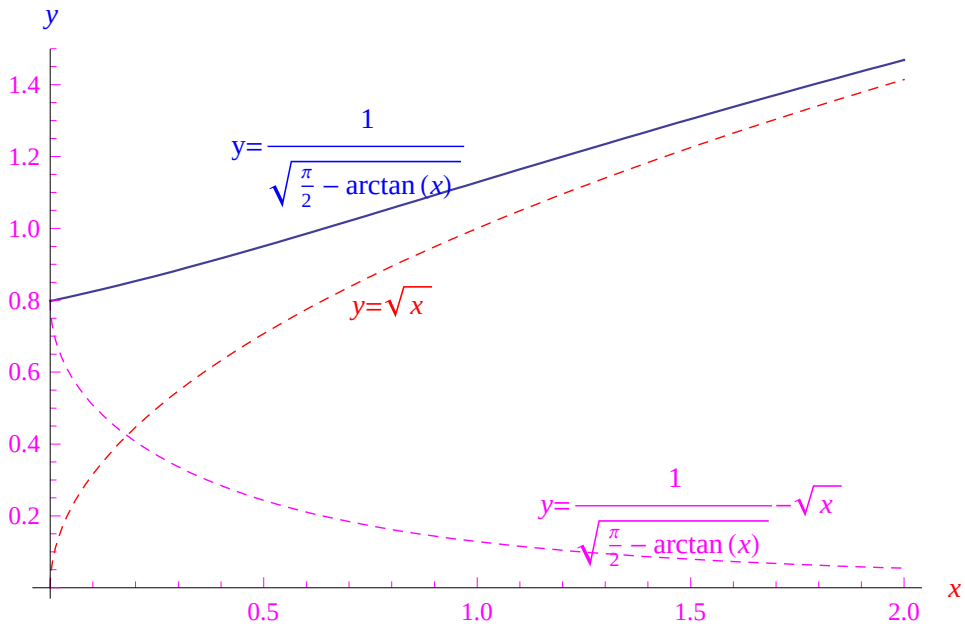


Figura 6.17: Decomposizione dell'infinito $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}$ per $x \to +\infty$.

Dimostrazione. Sia

$$f_1(x) = \ell_1 [g(x)]^{\alpha_1} + r_1(x), \tag{6.197}$$

cosicché

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \ell_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.198}$$

Per ipotesi $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono equivalenti:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1 \tag{6.199}$$

Segue

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \lim_{x\to x_0} \left\{ \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} \right\} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \ell_1 \tag{6.200}$$

Pertanto

$$f_2(x) = \ell_1 [g(x)]^{\alpha_1} + r_2(x), \tag{6.201}$$

onde l'asserto. ■

Esempio 49 *Consideriamo gli infinitesimi in $x = 0$:*

$$f_1(x) = 2(1 - \cos x), \quad f_2(x) = x^2 \tag{6.202}$$

Tenendo conto del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

segue immediatamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1, \tag{6.203}$$

onde l'equivalenza degli infinitesimi assegnati. Determiniamo la parte principale di $f_1(x)$ *rispetto all'infinitesimo* $g(x) = \sin x$*. Innanzitutto calcoliamone l'ordine:*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} &= 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^{\alpha_1}} = 2\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{(\sin x)^{\alpha_1}}\right]\\ &= 2\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{=1/2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^{2/\alpha_1}}{\sin x}\right)^{\alpha_1}\\ &= \ell_1 \in \mathbb{R}-\{0\} \Longleftrightarrow \alpha_1 = 2,\end{aligned}$$

cosicché $f_1(x)$ *è del second'ordine rispetto a* $g(x)$*, ed ammette la seguente decomposizione:*

$$2(1-\cos x) = \sin^2 x + r_1(x), \tag{6.204}$$

per cui

$$2(1-\cos x) \simeq \sin^2 x, \qquad x \in (-\delta, \delta) \tag{6.205}$$

Per la proposizione precedente:

$$x^2 = \sin^2 x + r_2(x) \tag{6.206}$$

Cioè

$$x^2 \simeq \sin^2 x \Longleftrightarrow \sin^2 x \simeq x^2, \qquad x \in (-\delta, \delta) \tag{6.207}$$

I vari andamenti sono illustrati in fig. 6.18.

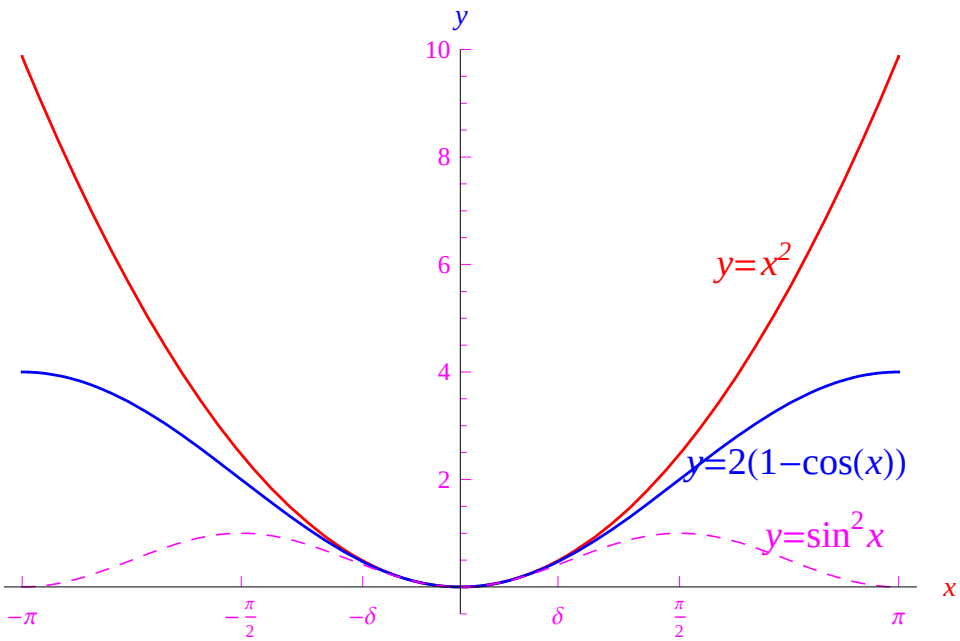


Figura 6.18: Le funzioni $f_1(x) = 2(1-\cos x)$ e $f_2(x) = x^2$ sono infinitesimi equivalenti per $x \to 0$. Pertanto hanno la stessa parte principale rispetto all'infinitesimo $g(x) = \sin x$. Geometricamente significa che i rispettivi grafici tendono a sovrapporsi in un intorno di $x = 0$.

***

Per gli infiniti si dimostra una proposizione analoga:

Proposizione 50 *Siano $f_1(x)$ e $f_2(x)$ due infiniti equivalenti (per $x \to x_0$).*

Se $f_k(x)$ $(k = 1, 2)$ è dotato di parte principale rispetto a $g(x)$, si ha che $f_{h\neq k}(x)$ è dotato di parte principale (rispetto a $g(x)$) e le due parti principali coincidono.

Esempio 51 *Consideriamo gli infiniti per $x \to +\infty$*

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}}, \quad f_2(x) = \sqrt{x} \tag{6.208}$$

Per quanto visto nell'esempio 47:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1,$$

onde l'equivalenza degli infiniti assegnati. Determiniamo la parte principale di $f_1(x)$ rispetto all'infinito

$$g(x) = x + \sin\frac{1}{x}$$

Innanzitutto calcoliamone l'ordine:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{[g(x)]^{\alpha_1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(x + \sin\frac{1}{x}\right)^{\alpha_1}\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \ell_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2},$$

cosicché $f_1(x)$ è di ordine $1/2$ rispetto a $g(x)$, riuscendo

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \ell_1 = 1 \tag{6.209}$$

Abbiamo pertanto la decomposizione:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} = \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}} + r_1(x), \tag{6.210}$$

con

$$\lim_{x\to+\infty} r_1(x) = 0 \tag{6.211}$$

Ciò implica

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - \arctan x}} \simeq \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}}, \qquad x \in (\delta, +\infty) \tag{6.212}$$

Per la proposizione precedente:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}} + r_2(x), \tag{6.213}$$

con

$$\lim_{x\to+\infty} r_2(x) = 0 \tag{6.214}$$

Cioè

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}}, \qquad x \in (\delta, +\infty) \tag{6.215}$$

I vari andamenti sono illustrati in fig. 6.19.

***

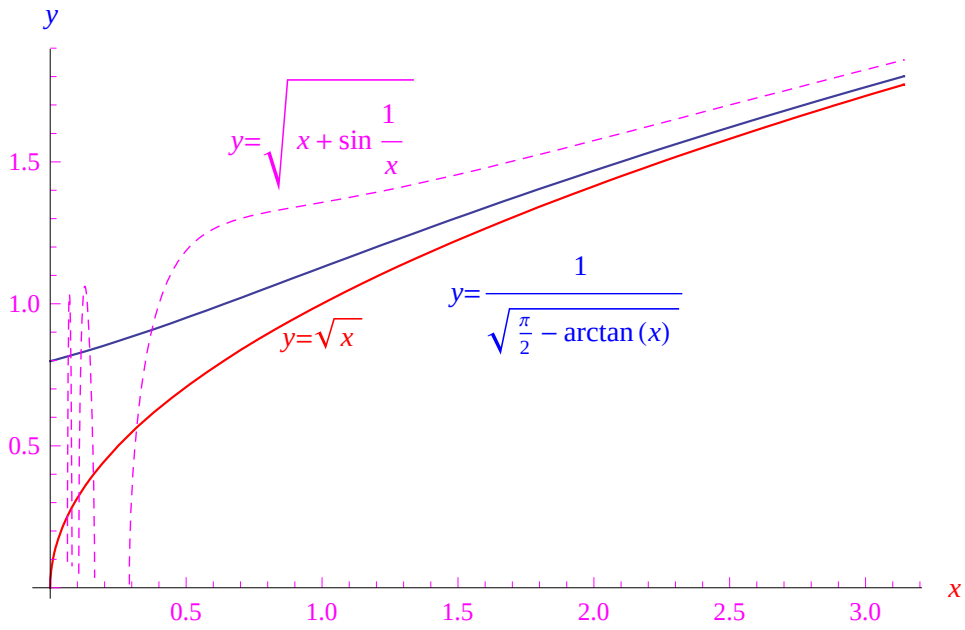


Figura 6.19: Le funzioni $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}$ e $f_2(x) = \sqrt{x}$ sono infiniti equivalenti per $x \to +\infty$. Pertanto hanno la stessa parte principale rispetto all'infinito $g(x) = \sqrt{x + \sin\frac{1}{x}}$. Geometricamente significa che i rispettivi grafici tendono a sovrapporsi in un intorno di $+\infty$.

Proposizione 52 *Siano dati $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ infinitesimi (in x_0) di ordine differente $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ rispetto a un infinitesimo di riferimento $u(x)$. La funzione*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \tag{6.216}$$

è un infinitesimo (in x_0) di ordine

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \tag{6.217}$$

Dimostrazione. La prima parte della proposizione è una conseguenza del teorema sul limite della somma di funzioni:

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lim_{x\to x_0} f_k(x)}_{=0} = 0, \tag{6.218}$$

per cui $f(x)$ è un infinitesimo in x_0. Per dimostrare la seconda parte poniamo

$$\min\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} = \alpha_h, \quad h \in \{1, 2, ..., n\}$$

Segue

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} \tag{6.219}$$

Ma

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \begin{cases} \ell_h \in \mathbb{R} - \{0\}, & \text{se } k = h \\ 0, & \text{se } k \neq h \end{cases}, \tag{6.220}$$

giacché $f_{k\neq h}(x)$ è di ordine maggiore di α_h. L'equazione precedente può essere inglobata nella delta di Kronecker:

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = h \\ 0, & \text{se } k \neq h \end{cases}, \tag{6.221}$$

ottenendo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \ell_k \delta_{hk} \tag{6.222}$$

Quindi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha_h}} = \sum_{k=1}^{n} \ell_k \delta_{hk} = l_h \in \mathbb{R} - \{0\},$$

onde l'asserto. ■

Siano

$$f_1(x) = \sin x, \;\; f_2(x) = \tan^2 x$$

Come è noto, si tratta di infinitesimi di ordine $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 2$ rispettivamente. Per la proposizione appena dimostrata si ha che

$$f(x) = \sin x + \tan^2 x$$

è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$. La fig. 6.20 riporta i vari andamenti.

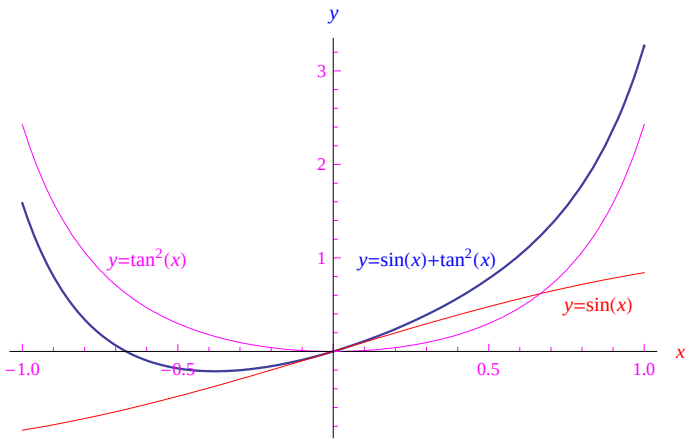


Figura 6.20: Le funzioni $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \tan^2 x$ sono iinfinitesimi in $x = 0$, di ordine rispettivamente 1 e 2. Pertanto la somma $f_1(x) + f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine 1.

Si badi che l'ipotesi del teorema precedente richiede

$$\alpha_k = \alpha_{k'}, \qquad \forall k, k' \in \{1, 2, ..., n\}, \;\; k \neq k' \tag{6.223}$$

In altri termini gli infinitesimi $f_1(x), ..., f_n(x)$ hanno tutti ordine diverso. Ciò implica il seguente corollario:

Corollario 53 *La somma di n infinitesimi dello stesso ordine α è un infinitesimo di ordine non minore di α.*

Dimostrazione. Siano $f_1(x), ..., f_n(x)$ infinitesimi in x_0, per cui:

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha}} = \ell_k \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (k = 1, ..., n), \tag{6.224}$$

dove $u(x)$ è l'infinitesimo di riferimento. Posto

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \tag{6.225}$$

si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^\alpha} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \ell_k$$

Ne consegue

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_k \neq 0 \Longrightarrow f(x) \text{ è di ordine } \alpha$$
$$\sum_{k=1}^{n} \ell_k = 0 \Longrightarrow f(x) \text{ è di ordine } \beta > \alpha,$$

onde l'asserto. ■

Esempio 54 *Siano dati gli infinitesimi (in $x = 0$)*

$$f_1(x) = 2(1 - \cos x), \ f_2(x) = x \sin x, \tag{6.226}$$

entrambi di ordine $\alpha = 2$. Consideriamo la loro somma

$$f(x) = 2(1 - \cos x) + x \sin x \tag{6.227}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) + x\sin x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2, \end{aligned} \tag{6.228}$$

onde $f(x)$ è dello stesso ordine di $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Se invece eseguiamo la differenza

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x), \tag{6.229}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

per cui $f_1(x) - f_2(x)$ è di ordine maggiore di 2. Per esplicitare l'ordine calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^\beta} &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x) - x\sin x}{x^\beta} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\beta x^{\beta-1}} \\ &= \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\beta(\beta-1)x^{\beta-2}} \\ &= \frac{1}{\beta(\beta-1)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^{\beta-3}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \beta - 3 = 1, \end{aligned} \tag{6.230}$$

onde $g(x)$ è di ordine $\beta = 4$. Tali risultati sono graficati in fig. 6.21.

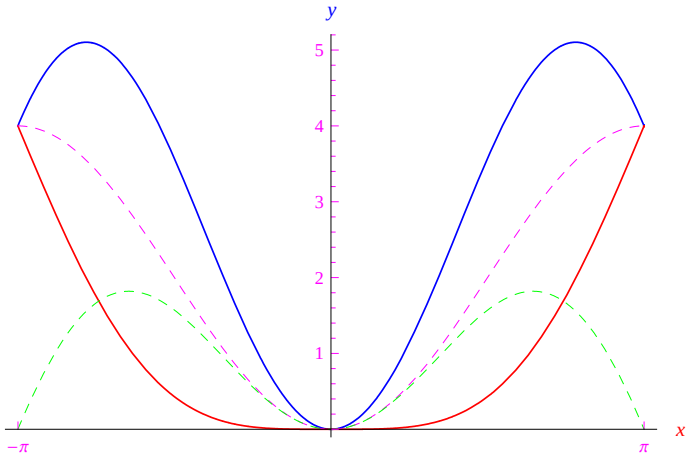


Figura 6.21: Le curve in tratteggio sono i grafici di $f_1(x) = 2(1-\cos x)$ e $f_2(x) = x \sin x$. La curva in blue è il grafico della somma $f_1(x) + f_2(x)$, da cui vediamo che tale funzione è un infinitesimo dello stesso ordine di f_1 e f_2. La curva in rosso, invece, è il grafico della differenza, e vediamo che si tratta di un infinitesimo di ordine superiore a f_1 e f_2.

Proposizione 55 *Assegnate le funzioni $f_1(x), ..., f_n(x)$ tali che*

$$\lim_{x\to x_0} f_k(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_k}} = \ell_k \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad (k = 1, ..., n), \tag{6.231}$$

si ha

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x) \Longrightarrow \alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \tag{6.232}$$

essendo α l'ordine di infinitesimo di $f(x)$. In altri termini, l'ordine del prodotto di n infinitesimi è pari alla somma degli ordini dei singoli fattori.

Dimostrazione. Abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_k(x)}{[u(x)]^{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\prod_{k=1}^{n} f_k(x)}{\prod_{k=1}^{n} [u(x)]^{\alpha_k}} \tag{6.233}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \lim_{x\to x_0} \frac{f_k(x)}{[u(x)]^{\alpha_k}} = \prod_{k=1}^{n} \ell_k \neq 0,$$

onde l'asserto. ■

Esempio 56 *Siano*

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = 1 - \cos x, \tag{6.234}$$

per cui rispetto all'infinitesimo di riferimento $u(x) = x$, $f_1(x)$ è un infinitesimo (in $x = 0$) di ordine $\alpha_1 = 3$, mentre $f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha_2 = 2$. Per la proposizione precedente, l'infinitesimo

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) = x^3(1 - \cos x) \tag{6.235}$$

è di ordine $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 5$.

6.9 Calcolo di limiti con il Principio di sostituzione degli infinitesimi [infiniti]

Il Principio di sostituzione degli infinitesimi può essere utilizzato nel calcolo di limiti di funzioni che presentano indeterminazione.

Esempio 57 *Calcoliamo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arctan^2 \sqrt{5^{2x}-1} + \left(1-\cos^3 x\right)^2}{\tan^3(\arcsin x) + \left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x)} \tag{6.236}$$

Numeratore e denominatore sono manifestamente infinitesimi in $x = 0$*, onde il loro rapporto da luogo alla forma indeterminata* $0/0$*. Determiniamo l'ordine dei singoli addendi. A tale scopo osserviamo che tenendo conto del limite fondamentale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \tag{6.237}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^{2x}-1}{x} \underset{t=2x}{=} 2 \lim_{t\to 0} \frac{5^t - 1}{t} = 2 \ln 5, \tag{6.238}$$

per cui $5^{2x} - 1$ *è del primo ordine rispetto a* x*. Più specificatamente, sussiste l'equivalenza tra infinitesimi:*

$$5^{2x} - 1 \sim 2x \ln 5 \tag{6.239}$$

Per quanto riguarda la funzione arctan *sappiamo che*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1 \Longrightarrow \arctan x \sim x \tag{6.240}$$

Perciò

$$\arctan^2 \sqrt{5^{2x}-1} \underset{t=\sqrt{5^{2x}-1}}{=} (\arctan t)^2 \sim t^2 = 5^{2x} - 1 \sim 2x \ln 5 \tag{6.241}$$

Segue

$$x \arctan^2 \sqrt{5^{2x}-1} \sim 2x^2 \ln 5 \tag{6.242}$$

In altri termini il primo addendo a numeratore è un infinitesimo del secondo ordine. Passiamo al secondo addendo

$$\left(1-\cos^3 x\right)^2 = (1-\cos x)^2 \left(1 + \cos x + \cos^2 x\right)^2 \tag{6.243}$$

È chiaro che dobbiamo calcolare l'ordine di $1 - \cos^3 x$ *per poi applicare il teorema del prodotto di infinitesimi. Quindi scriviamo*

$$1 - \cos^3 x = (1-\cos x)\left(1 + \cos x + \cos^2 x\right) \tag{6.244}$$

Ossia $1-\cos^3 x$ *si fattorizza nel prodotto dell'infinitesimo* $1-\cos x$ *(del second'ordine) per un termine che converge a* 3*. Perciò* $1 - \cos^3 x$ *è del second'ordine e il suo quadrato è del quart'ordine. Tutto ciò implica che a numeratore possiamo trascurare* $\left(1-\cos^3 x\right)^2$*. Passiamo ora al denominatore, il cui primo addendo è*

$$\tan^3(\arcsin x) \tag{6.245}$$

Cambiamo la variabile in $t = \arcsin x$*:*

$$\tan^3(\arcsin x) = (\tan t)^3$$

Ma $\tan t$ *è del primo ordine* $\Longrightarrow \tan^3(\arcsin x)$ *è del terzo ordine. Il secondo addendo è apparentemente più complicato*

$$\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x) \tag{6.246}$$

Dal limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = \lambda \tag{6.247}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}}{x} = -\frac{4}{5},$$

onde $1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}$ *è del primo ordine. L'altro termine*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} \underset{t=3x}{=} 3 \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \tag{6.248}$$

Quindi $\ln(1+3x)$ *è del primo ordine. Per il teorema del prodotto*

$$\underbrace{\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right]}_{ordine\ 1} \underbrace{\ln(1+3x)}_{ordine\ 1} \Longrightarrow \text{ è di ordine } 2 \tag{6.249}$$

Questo significa che a denominatore possiamo trascurare $\tan^3(\arcsin x)$*. Allora per il Principio di sostituzione degli infinitesimi si ha:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1}}{\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x)} \tag{6.250}$$

Si tratta ora di sostituire i singoli infinitesimi con le rispettive parti principali. Abbiamo visto che

$$x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1} \sim 2x^2 \ln 5$$

Inoltre

$$\left.\begin{array}{c} 1 - \sqrt[5]{(1+x)^4} \sim -\frac{4}{5}x \\ \ln(1+3x) \sim 3x \end{array}\right) \Longrightarrow \left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x) \sim -\frac{12}{5}x^2$$

Finalmente

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arctan^2 \sqrt{5^{2x} - 1}}{\left[1 - \sqrt[5]{(1+x)^4}\right] \ln(1+3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \ln 5}{-\frac{12}{5}x^2} = -\frac{5}{6} \ln 5 \tag{6.251}$$

Esempio 58 *Calcoliamo*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x \arctan x + \sin x}{x\sqrt{x^2+5x+6} + x^2 - 3x} \tag{6.252}$$

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$*. A numeratore abbiamo* x^2 *che è un infinito del secondo ordine rispetto all'infinito di riferimento* $u(x) = x$*. Determiniamo l'ordine di infinito* $x \arctan x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \arctan x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

per cui $x \arctan x$ *è del primo ordine e come tale trascurabile rispetto a* x^2*. L'altro addendo* $\sin x$ *è non regolare per* $x \to +\infty$*, ma è limitato, cosicché possiamo trascurararlo. Passiamo a denominatore. Qui vediamo che*

$$\sqrt{x^2 + 5x + 6},\ x^2 \tag{6.253}$$

sono manifestamente infiniti del secondo ordine, per cui possiamo trascurare l'addendo $-3x$*. Possiamo poi svincolarci dalla radice osservando che*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 5x + 6}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}}{x^2} = 1 \tag{6.254}$$

Cioè

$$x\sqrt{x^2 + 5x + 6} \sim x^2 \tag{6.255}$$

In definitiva il limite proposto diventa:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \tag{6.256}$$

6.10 Esercizi svolti

Esercizio 251 *Determinare i valori del parametro reale* λ *per i quali la funzione*

$$f_\lambda(x) = \lambda\sqrt{x^3 + 2x^2} + (1 - \lambda)\tan\sqrt{x} \cdot \sqrt{\sin x}, \tag{6.257}$$

è un infinitesimo (per $x \to 0^+$*) di ordine maggiore di 1 (assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione* $u(x) = x$*).*

Soluzione
Dobbiamo imporre

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f_\lambda(x)}{x} = 0 \tag{6.258}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} \frac{f_\lambda(x)}{x} &= \lim_{x\to0^+} \frac{\lambda\sqrt{x^3 + 2x^2} + (1 - \lambda)\tan\sqrt{x} \cdot \sqrt{\sin x}}{x} \\ &= \lambda \lim_{x\to0^+} \sqrt{x + 2} + (1 - \lambda) \lim_{x\to0^+} \frac{\tan\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}{x}\end{aligned} \tag{6.259}$$

Risulta

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x + 2} = \sqrt{2}, \tag{6.260}$$

mentre

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\tan\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}} = 1 \tag{6.261}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_\lambda(x)}{x} = \sqrt{2}\lambda + 1 - \lambda = \lambda\left(\sqrt{2}-1\right) + 1 \tag{6.262}$$

La nostra richiesta è

$$\lambda\left(\sqrt{2}-1\right) + 1 = 0,$$

da cui il valore di λ per il quale la funzione assegnata è un infinitesimo di ordine maggiore di 1, è

$$\lambda_* = \frac{1}{1-\sqrt{2}} \tag{6.263}$$

Osservazione 59 *Per* $\lambda = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_0(x)}{x} = 1,$$

per cui $f_0(x)$ *è un infinitesimo del primo ordine. Anzi, si tratta di infinitesimi equivalenti:*

$$f_0(x) \sim x, \quad (x \to 0^+)$$

In fig. 6.22 confrontiamo il grafico di $f_{\lambda_*}(x)$ con quello di $f_0(x)$.

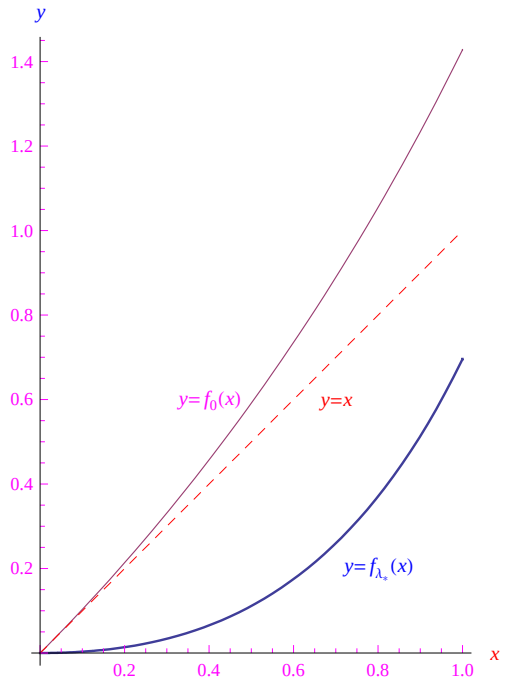


Figura 6.22: La funzione $f_{\lambda_*}(x)$ è (per $x \to 0^+$) un infinitesimo maggiore di 1, e come tale tende a zero più velocemente di $f_0(x)$ giacché quest'ultima è un infinitesimo di ordine 1.

Esercizio 252 *Dopo aver stabilito che la funzione*

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}} \tag{6.264}$$

è un infinitesimo in $x = 0$*, se ne calcoli l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione* $u(x) = x$*. Determinare infine la parte principale.*

Soluzione
Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^{-2/3}x} \tag{6.265}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2}}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}_{=1}=0,$$

dove abbiamo tenuto conto del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a} \tag{6.266}$$

Ora per determinare l'ordine di $f(x)$, calcoliamo applicando la regola di De L'Hospital il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{[u(x)]^{\alpha}}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha+\frac{1}{3}}}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)x^{\alpha-\frac{2}{3}}} \tag{6.267}$$
$$=\frac{1}{\alpha+\frac{1}{3}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}x^{\frac{2}{3}-\alpha}=\ell\in R-\{0\}\Longleftrightarrow\alpha=\frac{2}{3}$$

Ne consegue che l'ordine è $\alpha=\frac{2}{3}$. Per rispondere all'ultimo quesito calcoliamo il limite ℓ per $\alpha=\frac{2}{3}$:

$$\ell=\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=1 \tag{6.268}$$

Cioè $f(x)$ e $x^{2/3}$ sono infinitesimi equivalenti:

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x}}\sim x^{2/3},\quad(x\to 0) \tag{6.269}$$

Esercizio 253 *Determinare l'ordine dell'infinitesimo $f(x)=\ln x$ (per $x\to 1^+$) assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x)=x-1$.*

Soluzione

$$\alpha\in(0,+\infty)\mid\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{(x-1)^{\alpha}}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{6.270}$$

Eseguendo il cambio di variabile

$$t=x-1\underset{x\to 1^+}{\longrightarrow}0^+, \tag{6.271}$$

si ha

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{(x-1)^{\alpha}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t^{\alpha}}=\ell\in\mathbb{R}-\{0\}\Longleftrightarrow\alpha=1, \tag{6.272}$$

in virtù del limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{\lg_a(1+x)}{x}=\lg_a e \tag{6.273}$$

Segue che $\ln x$ è un infinitesimo (per $x\to 1^+$) del primo ordine. Più precisamente, dal momento che $\ell=1$ si ha

$$\ln x\sim x-1,\quad(x\to 1) \tag{6.274}$$

Esercizio 254 *Assegnato l'infinitesimo (per $x \to 0^+$)*

$$f(x) = \sqrt{x} + \tan x \cdot \sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x, \tag{6.275}$$

se ne determini l'ordine assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$.

Soluzione

$$\alpha > 0 \mid \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \tan x \cdot \sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.276}$$

Esplicitiamo il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \tan x \cdot \sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}-\alpha} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x \cdot \sqrt{\tan x}}{x^\alpha} + \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} \tag{6.277}$$

Riesce

$$\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}-\alpha} = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x \cdot \sqrt{\tan x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} = 0 \end{cases} \tag{6.278}$$

Ne concludiamo che l'infinitesimo assegnato è di ordine 1/2. Più precisamente

$$\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \tan x \cdot \sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} = 1, \tag{6.279}$$

per cui la sua parte principale è $x^{1/2}$ o, ciò che è lo stesso

$$\frac{\sqrt{x} + \tan x \cdot \sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} \sim \sqrt{x}, \quad (x \to 0^+) \tag{6.280}$$

Alternativamente, si applica il principio di sostituzione degli infinitesimi nel calcolo del limite. Infatti a numeratore il secondo e terzo addendo sono manifestamente di ordine superiore rispetto a $\sqrt{x}$, per cui è lecito trascurarli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \tan x \cdot \sqrt{\tan x} + \sqrt{x}\sin^2 x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha}$$

e questo limite esiste finito se e solo se $\alpha = 1/2$. Completiamo l'esercizio graficando le due funzioni in un intorno destro di $x = 0$ (cfr. fig. 6.23)

Esercizio 255 *Determinare l'ordine di infinitesimo (in $x = 0$) della funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2+2}} \tag{6.281}$$

assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u(x) = x$. Qual è la sua parte principale?

Soluzione

$$\alpha > 0 \mid \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.282}$$

Esplicitiamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha}\sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2+2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \frac{16x^{5-3\alpha}}{x^2+2}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow 5 - 3\alpha = 0,$$

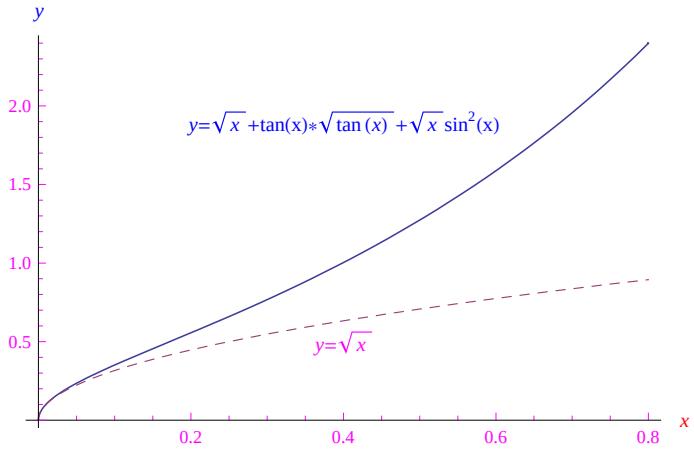


Figura 6.23: Grafico delle funzioni (6.275) e $u\left(x\right)^{1/2}=\sqrt{x}$.

da cui $\alpha=5/3$. Per determinare la parte principale dobbiamo calcolare il limite

$$\alpha=\frac{5}{3}\Longrightarrow\ell=\sqrt[3]{\lim_{x\to0}\frac{16}{x^2+2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=2, \tag{6.283}$$

da cui la parte principale

$$\ell x^{5/3}=2\sqrt[3]{x^5} \tag{6.284}$$

o ciò che è lo stesso:

$$\sqrt[3]{\frac{16x^5}{x^2+2}}\sim2\sqrt[3]{x^5},\quad(x\to0) \tag{6.285}$$

In fig. 6.24 riportiamo i grafici di $f\left(x\right)$ e della sua parte principale in un intorno di $x=0$.

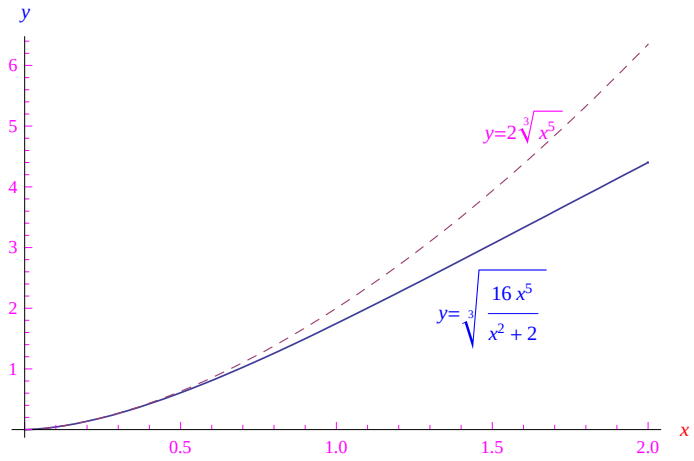


Figura 6.24: Grafico delle funzioni (6.281) e $2u\left(x\right)^{5/3}=2\sqrt[3]{x^5}$.

Esercizio 256 *Determinare l'ordine di infinitesimo (in $x=0$) della funzione*

$$f\left(x\right)=\sqrt[3]{\frac{x^3+x^5}{x+\sin x}} \tag{6.286}$$

assumendo come infinitesimo di riferimento la funzione $u\left(x\right)=x$. Qual è la sua parte principale?

Soluzione

$$\alpha > 0 \mid \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{6.287}$$

Esplicitiamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} \sqrt[3]{\frac{x^3+x^5}{x+\sin x}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^5}{x^{3\alpha}(x+\sin x)}} =$$
$$= \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+x^2)}{x^{3\alpha+1}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \frac{x^{2-3\alpha}(1+x^2)}{1+\frac{\sin x}{x}}} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \iff 2-3\alpha = 0,$$

da cui $\alpha = 2/3$. Per determinare la parte principale dobbiamo calcolare il limite

$$\alpha = \frac{2}{3} \Longrightarrow \ell = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0} \frac{1+x^2}{1+\frac{\sin x}{x}}} = \sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 0}(1+x^2)}{1+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}}} = \sqrt[3]{\frac{1+0}{1+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \tag{6.288}$$

da cui la parte principale

$$\ell x^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} \tag{6.289}$$

o ciò che è lo stesso:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+x^5}{x+\sin x}} \sim \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}, \quad (x \to 0) \tag{6.290}$$

In fig. 6.25 riportiamo i grafici di $f(x)$ e della sua parte principale in un intorno di $x = 0$.

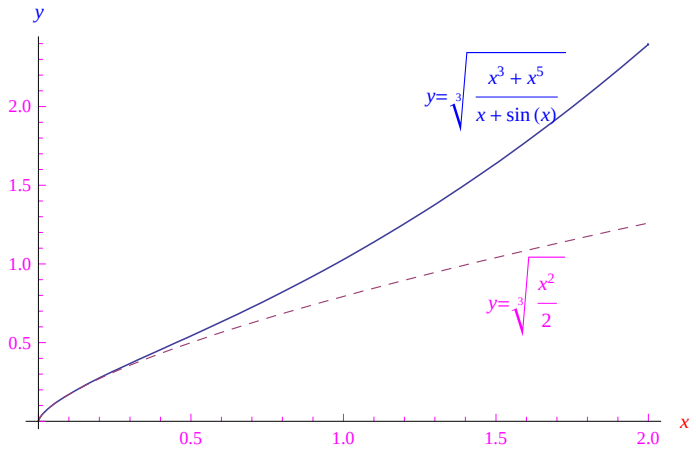


Figura 6.25: Grafico delle funzioni (6.286) e $\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$.

Capitolo 7

Esercizi di riepilogo

Esercizio 257 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$L = \lim_{x\to 0}\left[(1-\cos 3x)\,\frac{5^{x^2}-1}{x^4-2x^3+x^2}\right] \tag{7.1}$$

Facoltativo:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[(1-\cos 3x)\,\frac{5^{x^2}-1}{x^4-2x^3+x^2}\right],\ \lim_{x\to 1}\left[(1-\cos 3x)\,\frac{5^{x^2}-1}{x^4-2x^3+x^2}\right] \tag{7.2}$$

Soluzione
Posto $f(x) = (1-\cos 3x)\,\frac{5^{x^2}-1}{x^4-2x^3+x^2}$ si ottiene $f(x) = (1-\cos 3x)\,\frac{5^{x^2}-1}{x^2(x^2-2x+1)}$, cioè:

$$f(x) = (1-\cos 3x)\,\frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2} \tag{7.3}$$

Segue

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to 0}(1-\cos 3x)}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{5^{x^2}-1}{x^2}}_{=L'}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)^2}}_{=+1}$$

Calcoliamo a parte L', ponendo $t = x^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{5^t-1}{t} = \ln 5$$

giacché è un limite notevole. Finalmente

$$L = 0\cdot\ln 5\cdot 1 = 0$$

Calcoliamo i limiti (7.2). Il secondo è immediato:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to 1}(1-\cos 3x)}_{>0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{5^{x^2}-1}{x^2}}_{=4}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}}_{=+\infty} = +\infty$$

Per l'altro limite, osserviamo dalla (7.3) che $\frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2}$ si comporta da inviluppo di modulazione per $f(x)$, poiché il grafico della funzione compie infinite oscillazioni tra le due curve $y = \pm\frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2}$. È

facile verificare che la funzione $\frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2}$ diverge positivamente per $x \to \pm\infty$:

$$\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2} = +\infty \end{array} \quad \text{per confronto tra infiniti}$$

Ne segue che il grafico della funzione per $x \to \pm\infty$ compie infinite oscillazioni tra le curve $y = \pm\frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2}$. In realtà, siccome $1 - \cos 3x$ è non negativa, le oscillazioni si realizzano tra l'asse x e la curva $y = +\frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2}$. Ne segue che non esiste il limite della funzione $f(x) = \frac{5^{x^2}-1}{x^2(x-1)^2}(1 - \cos 3x)$ per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 258 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Determinare il comportamento della funzione

$$f(x) = x^3 e^{-3x}\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \tag{7.4}$$

agli estremi del campo di esistenza.

Soluzione

La funzione assegnata è definita in $\mathbb{R} - \{0\}$, onde gli estremi del campo di esistenza sono rispettivamente $0, -\infty, +\infty$. Calcoliamo il comportamento di f in un intorno di $x = 0$:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to0} x^3 e^{-3x}}_{=0} - \lim_{x\to0} x^3 e^{-3x}\cos\frac{1}{x} \tag{7.5}$$

D'altra parte, applicando il teorema dei carabinieri:

$$\lim_{x\to0} x^3 e^{-3x}\cos\frac{1}{x} = 0, \tag{7.6}$$

cosicché

$$\lim_{x\to0} f(x) = 0 \tag{7.7}$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Studiamo il comportamento per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)\, e^{-\infty}(1-1) = 0 \cdot \infty \tag{7.8}$$

Per rimuovere tale forme indeterminata, scriviamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} xe^{-3x}\right)\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right) \tag{7.9}$$

Il primo limite a secondo membro è immediato. Infatti si calcola per confronto tra infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{3x}} = 0 \tag{7.10}$$

Il secondo limite si calcola ponendo $\xi = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{\xi\to0^+} \frac{1-\cos\xi}{\xi^2} = \frac{1}{2} \tag{7.11}$$

Segue

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Cioè per $x \to +\infty$ la funzione è infinitesima. Alternativamente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-3x}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)}_{=0} = 0$$

Studiamo ora il comportamento per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty)(1-1) = 0 \cdot \infty \tag{7.12}$$

Con lo stesso procedimento di prima:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to-\infty} xe^{-3x}\right)\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}\right) \tag{7.13}$$

Il primo limite è

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-3x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty \tag{7.14}$$

Il secondo è $1/2$, cosicché

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-3x} = (-\infty)\cdot\frac{1}{2} = -\infty \tag{7.15}$$

Ossia la funzione diverge negativamente per $x \to -\infty$. Il diagramma della funzione è riportato in fig. 7.1

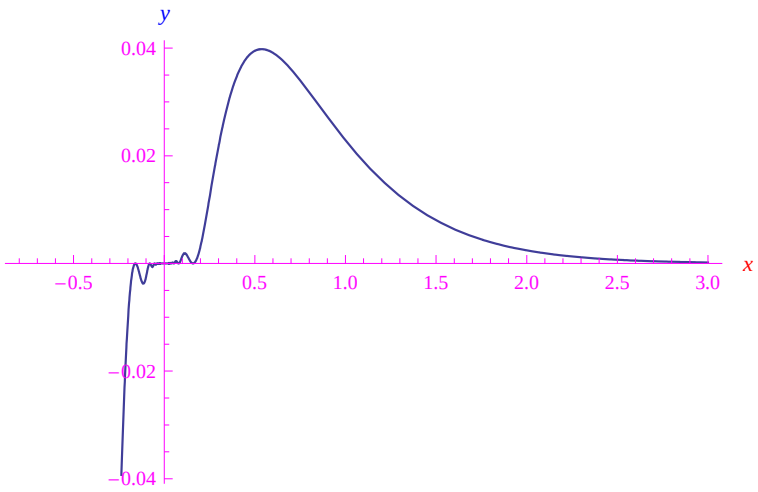


Figura 7.1: Grafico della funzione (7.4). La funzione compie infinite oscillazioni intorno a $x = 0$, che ivi si smorzano. È infinitesima per $x \to +\infty$, mentre diverge negativamente per $x \to -\infty$.

Esercizio 259 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3 - x\sin x}{3x^3 + 2}$$

Soluzione

Conviene applicare la proprietà additiva dell'operatore limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-x\sin x}{3x^3+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{3x^3+2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{3x^3+2}$$

Il primo limite è banale: si calcola per confronto tra infiniti o con il solito artificio:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{3x^3+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{3+2x^{-3}}=1$$

Passiamo al secondo. Osserviamo che

$$|\sin x|\le 1\Longrightarrow -\frac{x}{3x^3+2}\le\frac{x\sin x}{3x^3+2}\le\frac{x}{3x^3+2}$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pm x}{3x^3+2}=0\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{3x^3+2}=0$$

L'ultima implicazione segue dal teorema dei carabinieri. Alternativamente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{3x^3+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{3x^3+2}{x^2}}=\frac{0}{+\infty}$$

giacché $\frac{\sin x}{x}$ è infinitesima per $|x|\to+\infty$. Ne concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-x\sin x}{3x^3+2}=1$$

Il diagramma della funzione è riportato in fig. 7.2

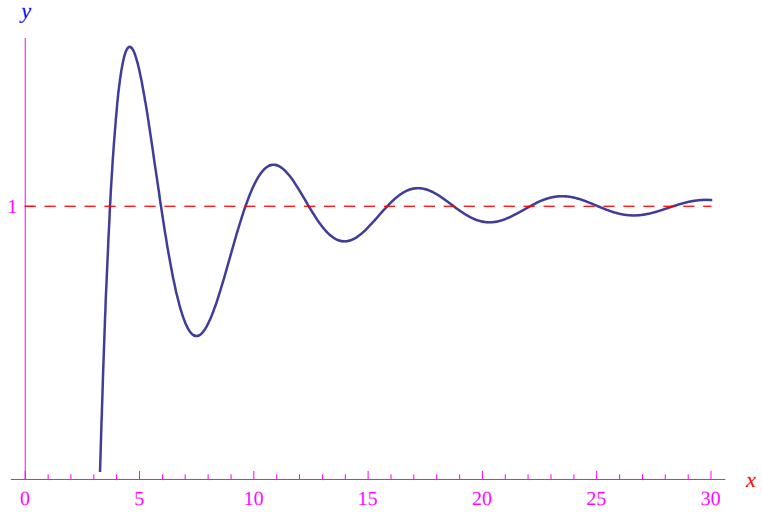


Figura 7.2: Grafico della funzione $\frac{3x^3-x\sin x}{3x^3+2}$. Per $x\to+\infty$, la funzione converge a 1, compiendo infinite oscillazioni che si smorzano asintoticamente.

Esercizio 260 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*

Studiare il comportamento della funzione

$$f(x)=\sqrt{2^{2/x}-3\cdot 2^{1/x}+4}-2^{1/x} \tag{7.16}$$

in un intorno del punto $x=0$.

Soluzione

Poniamo $t = 2^{1/x}$:

$$t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty, & \text{se } x \to 0^+ \\ 0^+, & \text{se } x \to 0^- \end{cases}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{t^2-3t+4} - t\right) = \infty - \infty = \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{t^2-3t+4} - t\right)\left(\sqrt{t^2-3t+4} + t\right)}{\sqrt{t^2-3t+4}+t} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{4-3t}{\sqrt{t^2-3t+4}+t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\left(\frac{4}{t}-3\right)}{|t|\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}+t} \underset{t>0}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{4}{t}-3}{\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}+1} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Il limite sinistro si calcola direttamente:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt{0-0+4} - 0 = 2$$

Ne concludiamo che $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie (fig. 7.3).

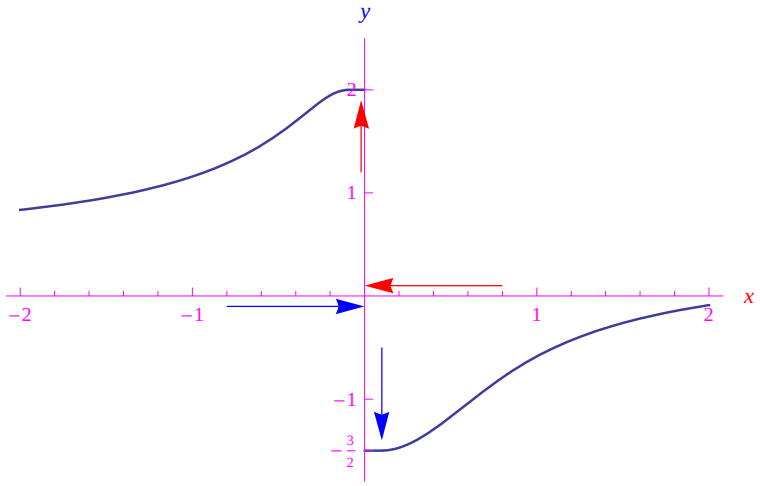


Figura 7.3: Andamento della funzione (7.16).

Esercizio 261 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*

Calcolare:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \left(\sin 5x \frac{5^{\sin 7x} - 1}{\sin^2 7x}\right) \tag{7.17}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Scriviamo

$$\lambda = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}}_{=5/7} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{5^{\sin 7x} - 1}{\sin 7x}$$

Per calcolare il secondo limite poniamo $t = \sin 7x$ per ricondurlo a un limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^{\sin 7x} - 1}{\sin 7x} = \lim_{t\to 0} \frac{5^t - 1}{t} = \ln 5$$

Ne concludiamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\sin 5x\frac{5^{\sin 7x}-1}{\sin^2 7x}\right)=\frac{5}{7}\ln 5$$

In fig. 7.4 riportiamo il grafico della funzione in un intorno destro di $x=0$.

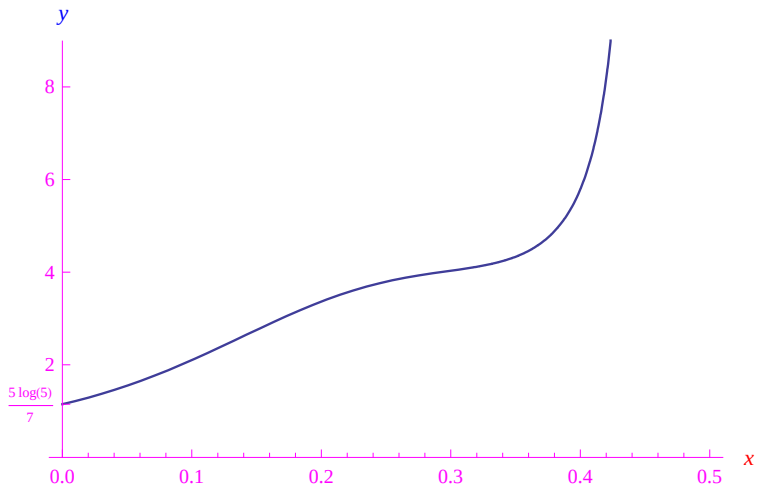


Figura 7.4: Andamento della funzione $\sin 5x\frac{5^{\sin 7x}-1}{\sin^2 7x}$ in un intorno destro dell'origine.

Esercizio 262 *Studiare il comportamento della seguente funzione agli estremi del suo campo di esistenza:*

$$f(x)=(5^x+3^x)^{1/x}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X=\mathbb{R}-\{0\}$, per cui calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=(1+1)^{+\infty}=2^{+\infty}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=(1+1)^{-\infty}=2^{-\infty}=0^+$$

cosicché la funzione è divergente positivamente a destra di $x=0$, e infintesima a sinistra. Ne segue che in tale punto la funzione ha una discontinuità di seconda specie. Studiamo il comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty^0&=\lim_{x\to+\infty}\left\{5^x\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right]\right\}^{\frac{1}{x}}=5\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}\\&=5(1+0)^0=5\\\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty^0&=\lim_{x\to-\infty}\left\{3^x\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x+1\right]\right\}^{\frac{1}{x}}=3\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^x+1\right]^{\frac{1}{x}}\\&=3(0+1)^0=3\end{aligned}$$

Ne concludiamo che la funzione è convergente per $|x|\to+\infty$, presentando due asintoti orizzontali a sinistra e a destra, rispettivamente, di equazione:

$$y=3,\quad y=5$$

come illustrato nel grafico di fig. 7.5.

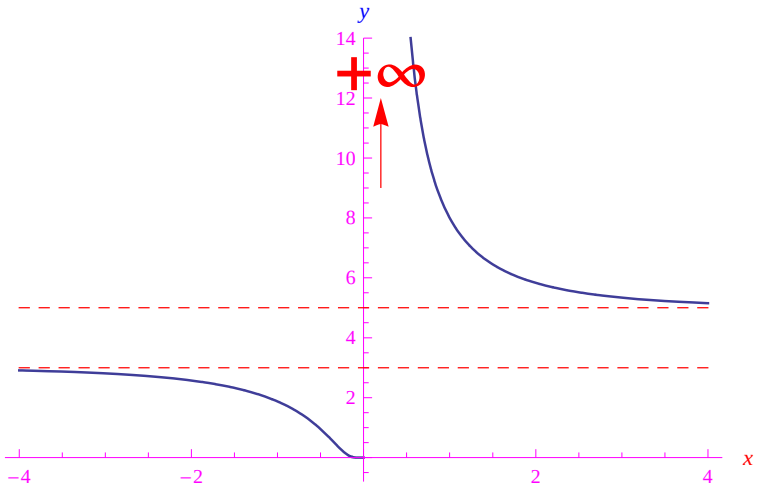


Figura 7.5: Esercizio 262

Esercizio 263 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4 \operatorname{arcsinh} x} - e^{\sin x \cos^2 x}}{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4 \operatorname{arcsinh} x} - e^{\sin x \cos^2 x}}{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4 \operatorname{arcsinh} x} - e^{\sin x \cos^2 x}}{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x \cos^2 x}\left(e^{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x} - 1\right)}{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} e^{\sin x \cos^2 x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x} - 1\right)}{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x}\end{aligned}$$

Per calcolare il secondo limite poniamo:

$$t = x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

onde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x} - 1\right)}{x^4 \operatorname{arcsinh} x - \sin x \cos^2 x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

Ne concludiamo che il limite proposto vale 1.

Esercizio 264 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 5} \left[\frac{e^{5(x-5)} - 1}{x^2 - 10x + 25}\left(\sqrt{x} - \sqrt{5}\right)\right] \tag{7.18}$$

Per rimuovere la forma indeterminata $0/0$ scriviamo:

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{e^{5(x-5)-1}}{(x-5)^2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\right] = \lim_{x\to 5}\left[\frac{e^{5(x-5)}-1}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)^2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to 5}\left[\frac{e^{5(x-5)}-1}{x-5}\right]\cdot \underbrace{\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}}_{=\frac{1}{2\sqrt{5}}}$$

L'altro limite si riconduce a un limite fondamentale, con il seguente cambio di variabile $t = 5\,(x-5)$, per cui

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{e^{5(x-5)}-1}{x-5}\right] = 5\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 5\cdot 1 = 5$$

Ne segue

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{e^{5(x-5)-1}}{(x-5)^2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\right] = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Esercizio 265 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+1}{x^3}\right)^x \tag{7.19}$$

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+1}{x^3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x^2+1}{x^3}\right)^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3x^2+1}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3x^2+1}}\right]^{x\cdot\frac{3x^2+1}{x^3}}$$
$$= \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x^2+1}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3x^2+1}}\right]^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}}$$

Il limite nell'esponente è manifetamente pari a 3. Calcoliamo l'altro:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x^2+1}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3x^2+1}} \underset{t=\frac{x^3}{3x^2+1}}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+1}{x^3}\right)^x = e^3$$

Esercizio 266 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra).*

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\sin\frac{1}{x}\right)$$

Soluzione
Innanzitutto osserviamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

Ne segue che abbiamo il prodotto di una funzione non regolare ($\sin\frac{1}{x}$) ma limitata, per una funzione infinitesima. Quindi il limite è zero. Alternativamente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}}\right)\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}_{=0}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 0=0$$

Più precisamente, in un intorno di $x=0$ la funzione compie infinite oscillazioni che si smorzano per $x\to 0$ (fig. 7.6).

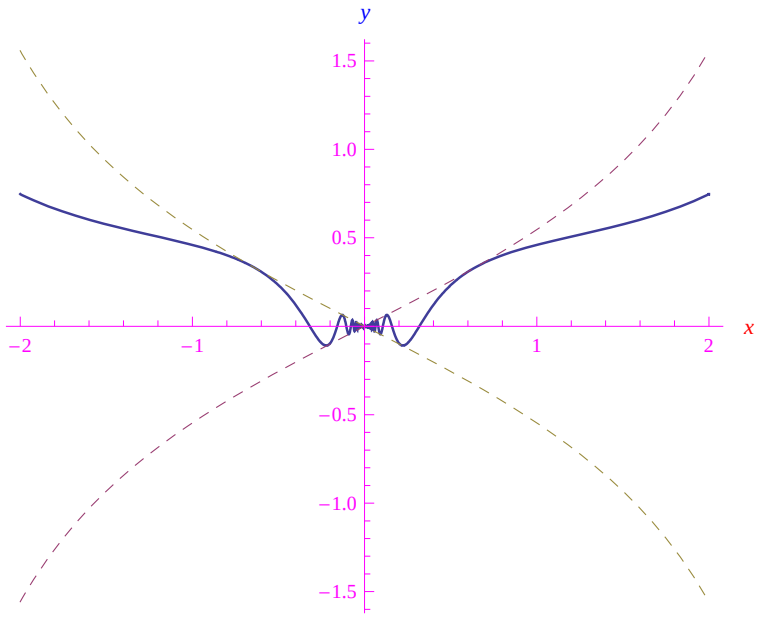


Figura 7.6: Esercizio 266

Esercizio 267 *Per $x\to 1$ si confrontino gli infinitesimi:*

$$f(x)=x\ln x,\quad g(x)=x-1 \tag{7.20}$$

Soluzione
Calcoliamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}=\frac{0}{0}\underset{t=x-1}{=}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}=\underbrace{\lim_{t\to 0}(1+t)}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}_{=1}=1$$

Ne concludiamo che gli infinitesimi assegnati sono equivalenti. Ciò implica che in un intorno di $x=1$, possiamo approssimare la funzione $x\ln x$ con la funzione lineare $x-1$ (fig. 7.7).

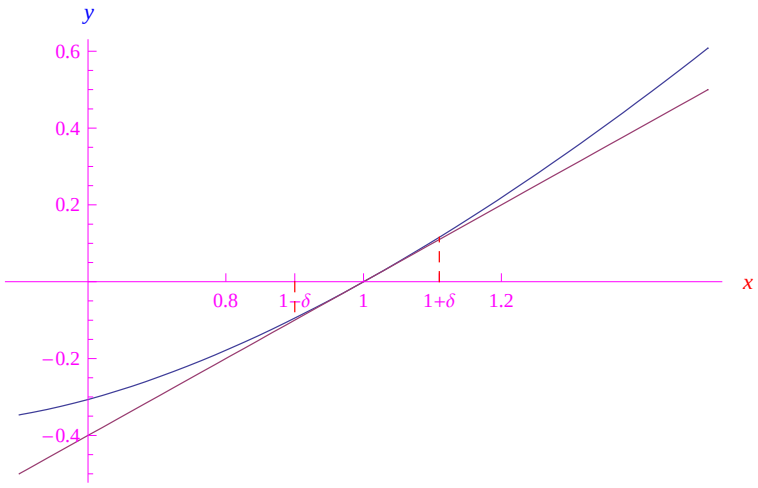


Figura 7.7: Esercizio 267

Esercizio 268 *Per $x \to +\infty$ si confrontino gli infiniti:*

$$f(x) = x \ln x, \quad g(x) = x - 1 \tag{7.21}$$

Soluzione
Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \ln x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \ln x}_{=+\infty} = +\infty$$

Ne concludiamo che per $x \to +\infty$, la funzione $x \ln x$ è un infinito di ordine maggiore di 1 (assumendo come infinito di riferimento $x - 1$). (fig. 7.8).

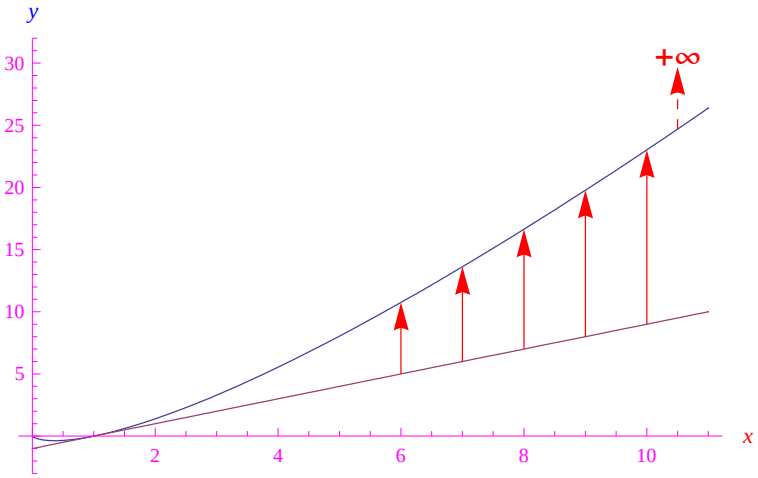


Figura 7.8: Esercizio 268

Esercizio 269 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra). Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2} - x\right) \tag{7.22}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right) = \tanh \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right)$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right) = (-\infty)-(+\infty) = (-\infty)+(-\infty) = -\infty$$

Tenendo conto del comportamento all'infinito della funzione tangente iperbolica, si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right) = \tanh(-\infty) = -1$$

Per $x \to -\infty$ il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right) = (-\infty)-(-\infty) = \infty-\infty$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}}-1\right) = (-\infty)(0-1) = +\infty$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right) = \tanh(+\infty) = 1$$

come vediamo dal grafico di fig. 7.9.

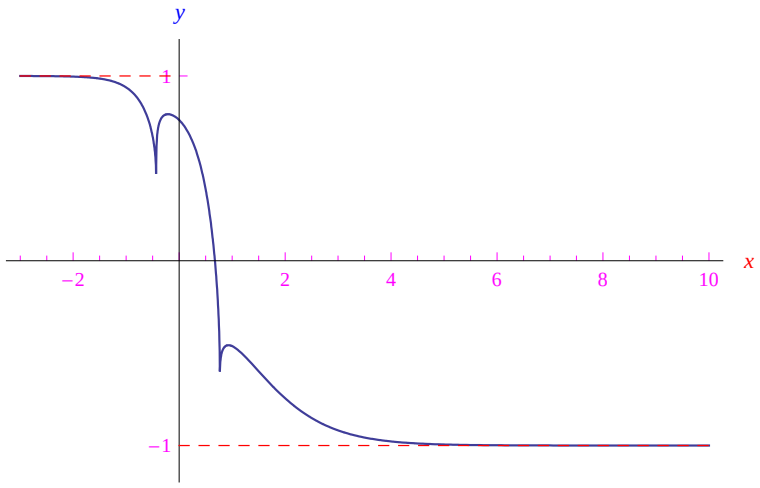


Figura 7.9: Esercizio 269

Esercizio 270 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to\pi} \frac{2^{\cos^2 x+\cos x}-1}{1+\cos x-\sin^2 x} \tag{7.23}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sviluppiamo il denominatore

$$\lambda = \lim_{x\to\pi} \frac{2^{\cos^2 x+\cos x} - 1}{1 + \cos x - 1 + \cos^2 x} = \lim_{x\to\pi} \frac{2^{\cos^2 x+\cos x} - 1}{\cos^2 x + \cos x} \tag{7.24}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \cos^2 x + \cos x, \tag{7.25}$$

cosicché

$$x \to \pi \Longrightarrow t \to 0 \tag{7.26}$$

Pertanto

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2 \tag{7.27}$$

Esercizio 271 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} (1 - \cos 3x) \frac{3^{x^2} - 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} \tag{7.28}$$

Soluzione
Qui la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ è prodotta dal rapporto

$$\frac{3^{x^2} - 1}{x^4 - 2x^3 + x^2}, \tag{7.29}$$

per cui calcoliamo a parte

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2 (x - 2x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2 (x - 1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x - 1} \end{aligned} \tag{7.30}$$

Il secondo limite a secondo membro è immediatao

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x - 1} = -1 \tag{7.31}$$

Il primo limite, invece, si riconduce al limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \tag{7.32}$$

con la sostituzione $t = x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3^t - 1}{t} = \ln 3 \tag{7.33}$$

Segue

$$\lambda' = -\ln 3 \tag{7.34}$$

Ne concludiamo che il limite assegnato vale:

$$\lambda = (1 - 1)(-\ln 3) = 0 \tag{7.35}$$

Esercizio 272 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \log_a (1 + x^n)}{x^{n+1}} = \frac{1}{\ln a}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{7.36}$$

Soluzione
Risulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\log_a(1+x^n)}{x^{n+1}}=\frac{0}{0} \tag{7.37}$$

Quindi scriviamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\log_a(1+x^n)}{x^{n+1}}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x^n)}{x^n}\right) \tag{7.38}$$

Il primo limite è 1, mentre il secondo si calcola con il cambio di variabile $t=x^n$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x^n)}{x^n}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}, \tag{7.39}$$

giacché è un limite fondamentale.

Esercizio 273 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x\right)^{-\tan^2 x} \tag{7.40}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata 1^∞:

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x\right)^{-\tan^2 x}=1^\infty \tag{7.41}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=x-\frac{\pi}{2}$, per cui

$$\sin x=\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos t,\quad \tan x=\frac{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=-\cot t \tag{7.42}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{t\to 0}\left(\cos^2 t\right)^{-\cot^2 t}=\lim_{t\to 0}\left(1-\sin^2 t\right)^{-\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} \\ &=\left[\lim_{t\to 0}\left(1-\sin^2 t\right)^{-\frac{1}{\sin^2 t}}\right]^{\underbrace{\lim_{t\to 0}\cos^2 t}_{=1}}\end{aligned} \tag{7.43}$$

Il limite tra parantesi quadre può essere calcolato con il cambio di variabile $\xi=-\sin^2 t$:

$$\lim_{t\to 0}\left(1-\sin^2 t\right)^{-\frac{1}{\sin^2 t}}=\lim_{\xi\to 0}(1+\xi)^{\frac{1}{\xi}}=e \tag{7.44}$$

Ne concludiamo

$$\lambda=e \tag{7.45}$$

Alternativamente

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x\right)^{-\tan^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\left(\sin^2 x\right)^{\tan^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{\tan^2 x} \tag{7.46}$$

Ma

$$\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x=1+\frac{1}{\tan^2 x}, \tag{7.47}$$

onde

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\tan^2 x} \tag{7.48}$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = \tan^2 x$:

$$\lambda = \lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} = e \tag{7.49}$$

Esercizio 274 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 - x - 2}{x^3 - 1}\right)^{\frac{x^3-1}{x+1}} \tag{7.50}$$

Soluzione
Dal momento che risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 - x - 2}{x^3 - 1}\right) = 1,$$

si ha che il limite proposto si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Eseguendo la divisione:

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^3 - 1} = 1 - \frac{x+1}{x^3 - 1}, \tag{7.51}$$

per poi cambiare la variabile

$$t = -\frac{x^3 - 1}{x + 1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \tag{7.52}$$

Segue

$$\lambda = \lim_{t\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to-\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-1} = \frac{1}{e} \tag{7.53}$$

Esercizio 275 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}}, \tag{7.54}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
La funzione è definita per

$$\frac{\cos x + x}{\cos x} > 0, \;\; x \neq 0, \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \;\; \forall k \in \mathbb{Z} \tag{7.55}$$

La disequazione

$$\frac{\cos x + x}{\cos x} > 0 \tag{7.56}$$

può essere risolta solo per via numerica, per cui la lasciamo inespressa. In ogni caso, se

$$x_0 \in \mathbb{R} \mid \cos x_0 + x_0 = 0, \tag{7.57}$$

si ha

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = +\infty \tag{7.58}$$

Determiniamo il comportamento in un intorno di $x = 0$:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = 1^{\infty}, \tag{7.59}$$

che si riconduce a un limite notevole, ponendo

$$t = \frac{x}{\cos x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{7.60}$$

Più precisamente

$$\lambda = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \tag{7.61}$$

Ne consegue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Inoltre

$$\lambda' = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \infty^0 \tag{7.62}$$

Scriviamo

$$\lambda' = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} e^{\ln\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}}} \tag{7.63}$$

Quindi calcoliamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} \ln\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right) \\ &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)}{\frac{x}{\cos x}}\end{aligned} \tag{7.64}$$

Utilizzando la sostituzione precedente

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)}{\frac{x}{\cos x}} = \lim_{|t|\to+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Allo stesso modo:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} f(x) = 1 \tag{7.65}$$

Per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} \tag{7.66}$$

Questa volta poniamo

$$\tau = \frac{\cos x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{7.67}$$

cosicché

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{\tau\to 0}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)^{\tau} = 1 \tag{7.68}$$

In maniera analoga

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = 1 \tag{7.69}$$

In fig. 7.10 riportiamo il grafico della funzione assegnata.

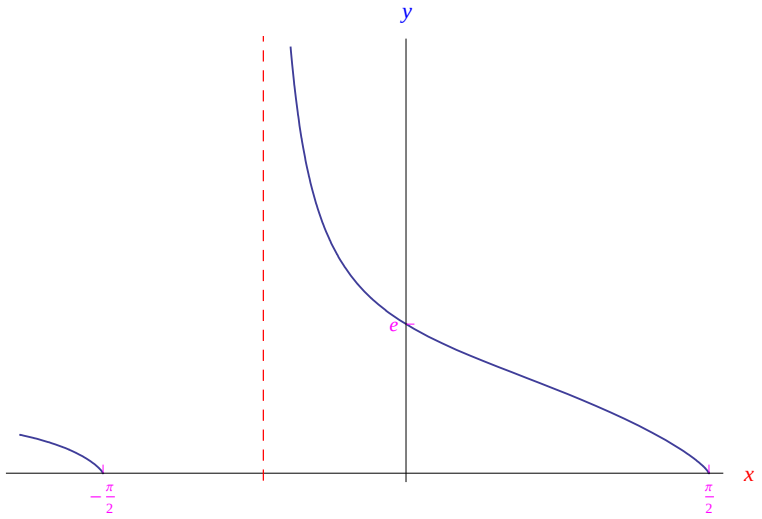


Figura 7.10: Andamento della funzione (7.54) in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Esercizio 276 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \cot x \cdot \tanh x \tag{7.70}$$

Soluzione

Il prodotto si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Esplicitiamo $\cot x$ per poi utilizzare i limiti fondamentali.

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \left(\cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\tanh x}{x} \right) = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \cos x\right)}_{=1} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)}_{=1} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x}\right)}_{=1} \tag{7.71}$$

$$= 1,$$

giacché il terzo limite è un limite fondamentale. Alternativamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x \cosh x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+1}{x\left(e^{2x}+1\right)} \tag{7.72}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{2x}+1}\right)}_{=\frac{1}{2}} \left(\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}\right)$$

Calcoliamo il secondo limite a secondo membro con il cambio di variabile $t = 2x$, onde

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 2 \cdot \ln e = 2, \tag{7.73}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \tag{7.74}$$

In fig. 7.11 riportiamo il grafico della funzione assegnata.

Esercizio 277 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \left[x \cot x \cdot (1+x)^{\cot x} \right] \tag{7.75}$$

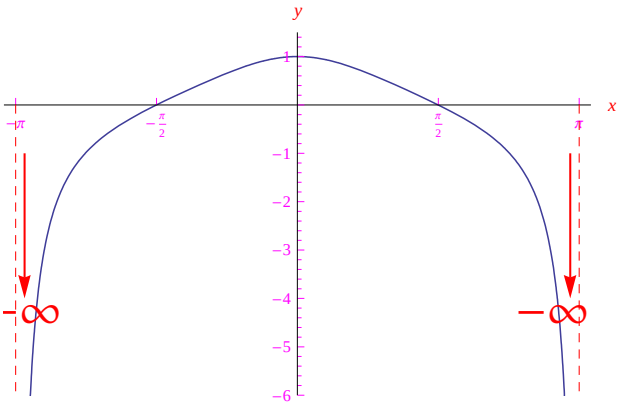


Figura 7.11: Grafico della funzione $f(x) = \cot x \cdot \tanh x$. Si notino gli asintoti verticali $x = \pm\pi$, a causa della presenza della $\cot x$.

Soluzione
Risulta

$$x \cot x \cdot (1+x)^{\cot x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} (0 \cdot \infty) \cdot 1^{\infty} \tag{7.76}$$

Scriviamo

$$\lambda = \left(\lim_{x\to 0} x \cot x\right) \cdot \left[\lim_{x\to 0} (1+x)^{\cot x}\right] \tag{7.77}$$

Il primo limite è immediato, in quanto si riconduce a un limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0} x \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \tag{7.78}$$

Per il secondo limite utilizziamo il noto artificio che consiste nello scrivere la funzione come l'esponenziale del logaritmo il cui argomento è la funzione medesima:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\cot x}} = e^{\lim_{x\to 0} \cot x \ln(1+x)}, \tag{7.79}$$

cosicché dobbiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0} \cot x \ln(1+x) = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}\right)}_{=1} \left[\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right] \tag{7.80}$$

Il secondo è un limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \tag{7.81}$$

A sua volta tale risultato implica:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\cot x} = e^1 = e \tag{7.82}$$

Finalmente

$$\lambda = 1 \cdot e = e \tag{7.83}$$

Esercizio 278 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 16} - 4}{\sqrt{5x^3 + x^2 + 9} - 3} \tag{7.84}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che viene rimossa razionalizzando:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3x^3+2x^2+16}-4}{\sqrt{5x^3+x^2+9}-3} \\
&= \frac{\sqrt{3x^3+2x^2+16}-4}{\sqrt{5x^3+x^2+9}-3} \cdot \frac{\sqrt{3x^3+2x^2+16}+4}{\sqrt{3x^3+2x^2+16}+4} \cdot \frac{\sqrt{5x^3+x^2+9}+3}{\sqrt{5x^3+x^2+9}+3} \\
&= \frac{(3x^3-2x^2+16-16)\left(\sqrt{5x^3+x^2+9}+3\right)}{(5x^3+x^2+9-9)\left(\sqrt{3x^3+2x^2+16}+4\right)} \\
&= \frac{(3x+2)\left(\sqrt{5x^3+x^2+9}+3\right)}{(5x+1)\left(\sqrt{3x^3+2x^2+16}+4\right)}
\end{aligned} \tag{7.85}$$

Pertanto

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{(3x+2)\left(\sqrt{5x^3+x^2+9}+3\right)}{(5x+1)\left(\sqrt{3x^3+2x^2+16}+4\right)} = \frac{2\,(3+3)}{4+4} = \frac{3}{2} \tag{7.86}$$

Esercizio 279 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{2}{\tan^2 x}\right)^{\tan^2 x} \tag{7.87}$$

Qui abbiamo la forma indeterminata 1^∞ che si risolve riducendo il limite a un limite fondamentale. Precisamente, poniamo

$$t = \tan^2 x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty, \tag{7.88}$$

onde

$$\lambda = \lim_{t\to+\infty} \left(1+\frac{2}{t}\right)^t \tag{7.89}$$

Eseguendo l'ulteriore cambio di variabile $t = 2\tau$:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{\tau\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{2\tau} = \lim_{\tau\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^2 \\
&= \left[\lim_{\tau\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\tau}\right)^{\tau}\right]^2 = e^2
\end{aligned} \tag{7.90}$$

Esercizio 280 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+21x+33}-\sqrt{3x^2+14x+2}\right) \tag{7.91}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $\infty-\infty$ che può essere risolta nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3x^2+21x+33}-\sqrt{3x^2+14x+2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{3x^2+21x+33}-\sqrt{3x^2+14x+2}\right)\left(\sqrt{3x^2+21x+33}+\sqrt{3x^2+14x+2}\right)}{\sqrt{3x^2+21x+33}+\sqrt{3x^2+14x+2}} \\
&= \frac{3x^2+21x+33-3x^2-14x-2}{\sqrt{3x^2+21x+33}+\sqrt{3x^2+14x+2}} \\
&= \frac{7x+31}{\sqrt{3x^2+21x+33}+\sqrt{3x^2+14x+2}},
\end{aligned} \tag{7.92}$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(7+\frac{31}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{3+\frac{21}{x}+\frac{33}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{14}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} \\ &= \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{31}{x}}{\sqrt{3+\frac{21}{x}+\frac{33}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{14}{x}+\frac{2}{x^2}}}\right) \\ &= 1\cdot\frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}\end{aligned} \tag{7.93}$$

Esercizio 281 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to1^-}\frac{1-x^3}{\arccos x} \tag{7.94}$$

Soluzione

Questo rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che può essere rimossa riducendo in fattori il numeratore, per poi eseguire un opportuno cambio di variabile. Precisamente:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}{\arccos x} \\ &= \left(\lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{\arccos x}\right)\cdot\underbrace{\left[\lim_{x\to1^-}\left(1+x+x^2\right)\right]}_{=3}\end{aligned} \tag{7.95}$$

Calcoliamo il primo limite:

$$\lambda' = \lim_{x\to1^-}\frac{1-x}{\arccos x} = \frac{0}{0} \tag{7.96}$$

Cambio di variabile

$$t = \arccos x \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} 0^+ \tag{7.97}$$

Segue

$$\lambda' = \lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos x}{t} = 0, \tag{7.98}$$

in quanto si tratta di un limite fondamentale. Ne concludiamo

$$\lambda = 0\cdot3 = 0 \tag{7.99}$$

In fig. 7.12 riportiamo il grafico della funzione assegnata.

Esercizio 282 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(nx^n - x\sin x\right) = +\infty, \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\} \tag{7.100}$$

Soluzione

Poniamo

$$f_n(x) = nx^n - x\sin x, \quad n\in\mathbb{N} \tag{7.101}$$

Segue che $f_0(x)$ e $f_1(x)$ sono manifestamente non regolari per $x\to+\infty$, per cui consideriamo $n\geq2$. Partiamo dall'ovvia doppia disuguaglianza:

$$-1\leq\sin x\leq1 \tag{7.102}$$

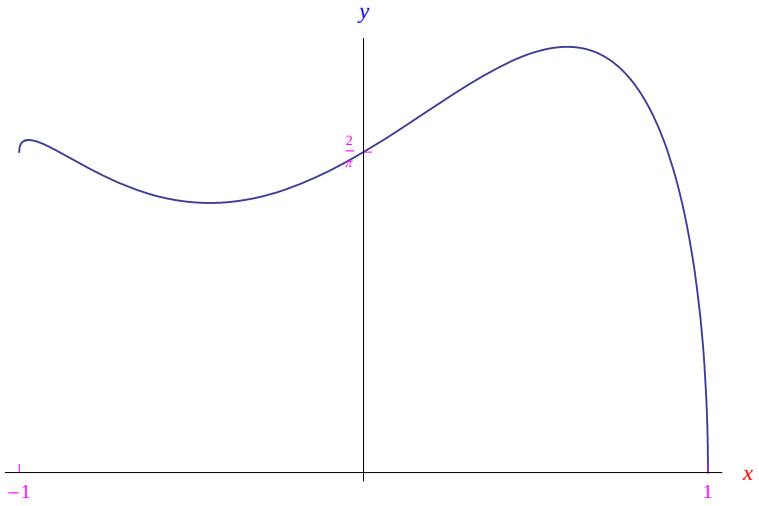


Figura 7.12: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1-x^3}{\arccos x}$.

Moltiplicando per $x > 0$:

$$-x \leq x \sin x \leq x \Longrightarrow x \geq -x \sin x \geq -x \tag{7.103}$$

Sommando nx^n:

$$nx^n + x \geq nx^n - x \sin x \geq nx^n - x \tag{7.104}$$

Cioè

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x), \quad \forall x \in [0, +\infty), \tag{7.105}$$

dove

$$g_n(x) = nx^n - x, \; h_n(x) = nx^n + x, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \tag{7.106}$$

Riesce

$$\lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \lim_{x \to +\infty} h_n(x) = +\infty \tag{7.107}$$

Per il teorema dei carabinieri:

$$\left.\begin{array}{l} g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x), \quad \forall x \in [0, +\infty) \\ \lim_{x \to +\infty} g_n(x) = \lim_{x \to +\infty} h_n(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty \tag{7.108}$$

In fig. 7.13 riportiamo il grafico della funzione assegnata per $n = 2$.

Esercizio 283 *Dimostrare*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{nx^n - x \sin x}{nx^n + 2} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \tag{7.109}$$

Soluzione

Nell'esercizio precedente abbiamo stabilito il seguente risultato:

$$\lim_{x \to +\infty} (nx^n - x \sin x) = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \tag{7.110}$$

per cui abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Strategia di attacco:

$$\lambda_n \overset{def}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^n - x \sin x}{nx^n + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^n \left(1 - \frac{1}{n} \frac{\sin x}{x^{n-1}}\right)}{nx^n \left(1 + \frac{2}{n} \frac{1}{x^n}\right)} \tag{7.111}$$

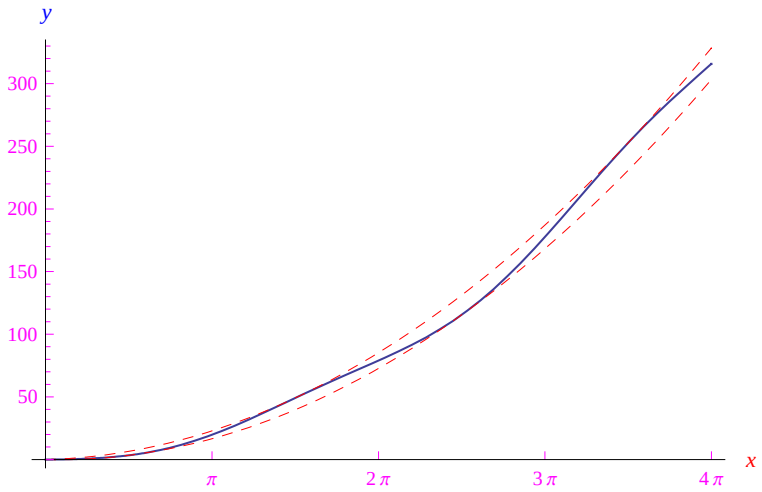


Figura 7.13: Grafico della funzione $f(x) = 2x^2 - x \sin x$. Le curve in tratteggio sono i grafici di $g_2(x)$ e $h_2(x)$ rispettivamente.

Dal momento che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x^{n-1}} = 0, \tag{7.112}$$

si ha

$$\lambda_n = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 0}{1 + \frac{2}{n} \cdot 0} = 1 \tag{7.113}$$

In fig. 7.14 riportiamo il grafico della funzione assegnata per $n = 3$.

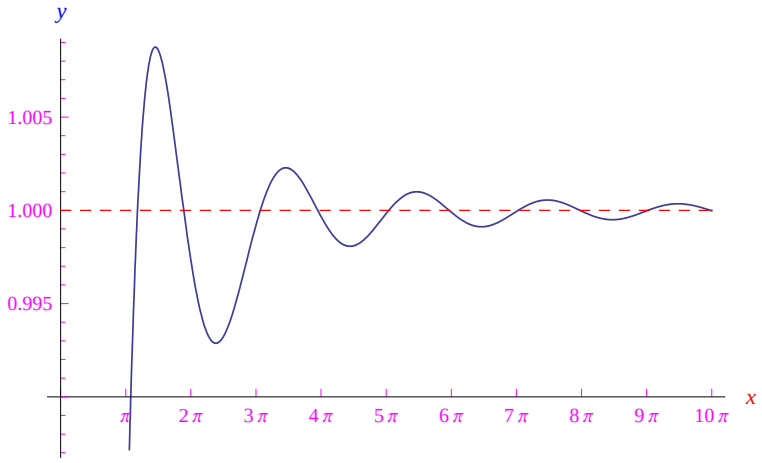


Figura 7.14: Grafico della funzione $\frac{3x^3 - x \sin x.}{3x^3 + 2}$.

Esercizio 284 *Dopo aver mostrato che la funzione:*

$$f(x) = \sqrt{2^{2/x} - 3 \cdot 2^{1/x} + 4} - 2^{1/x} \tag{7.114}$$

è definita in $\mathbb{R}$*, studiarne il comportamento in un intorno di* $x = 0$*.*

Soluzione

È conveniente eseguire il cambio di variabile:

$$t = 2^{1/x}, \tag{7.115}$$

che definisce la funzione composta:

$$g(t) \equiv f[x(t)] = \sqrt{t^2 - 3t + 4} - t,$$

manifestamente definita in $\mathbb{R}$, giacché

$$t^2 - 3t + 4 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{7.116}$$

D'altra parte, dalla (7.115) vediamo che deve essere $x \neq 0$, cosicché l'insieme di definizione della funzione assegnata è

$$X = \mathbb{R} - \{0\} \tag{7.117}$$

Calcoliamo

$$\lambda_{\pm} \overset{def}{=} \lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) \tag{7.118}$$

Dalla (7.115) segue

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \begin{cases} \lim_{t \to +\infty} g(t), & \text{se } x \to 0^+ \\ \lim_{t \to 0^+} g(t), & \text{se } x \to 0^- \end{cases} \tag{7.119}$$

Pertanto

$$\lambda_+ = \lim_{t \to +\infty} \left(\sqrt{t^2 - 3t + 4} - t \right) = \infty - \infty \tag{7.120}$$

Tale forma indeterminata si risolve nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 - 3t + 4} - t &= \frac{\left(\sqrt{t^2 - 3t + 4} - t \right) \left(\sqrt{t^2 - 3t + 4} + t \right)}{\sqrt{t^2 - 3t + 4} + t} \\ &= \frac{-3t + 4}{\sqrt{t^2 - 3t + 4} + t} \\ &= \frac{t\left(-3 + \frac{4}{t}\right)}{|t| \left(\sqrt{1 - \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2}} + \frac{t}{|t|} \right)}, \end{aligned} \tag{7.121}$$

per cui

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{t\left(-3 + \frac{4}{t}\right)}{|t| \left(\sqrt{1 - \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2}} + \frac{t}{|t|} \right)} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{-3 + \frac{4}{t}}{\sqrt{1 - \frac{3}{t} + \frac{4}{t^2}} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{1} + 1} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \tag{7.122}$$

Il limite sinistro è immediato:

$$\begin{aligned} \lambda_- &= \lim_{x \to 0^-} f(x) = \sqrt{2^{-\infty} - 3 \cdot 2^{-\infty} + 4} - 2^{-\infty} \\ &= \sqrt{0 - 0 + 4} - 0 = 2 \end{aligned} \tag{7.123}$$

Ne concludiamo che $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie per la funzione assegnata, con salto pari a:

$$s(0) = \lambda_+ - \lambda_- = -\frac{7}{2} \tag{7.124}$$

Esercizio 285 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{4^x - 4}{4x - 4} \tag{7.125}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo

$$\lambda = \lim_{x\to 1} \frac{4^x - 4}{4\,(x-1)}, \tag{7.126}$$

che suggerisce il cambio di variabile

$$t = x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0 \tag{7.127}$$

Segue

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t\to 0} \frac{4^{x+1} - 4}{4t} = \lim_{t\to 0} \frac{4^t \cdot 4 - 4}{4t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{4^t - 1}{t} = \ln 4 = 2\ln 2 \end{aligned} \tag{7.128}$$

Esercizio 286 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\sinh(\alpha x)} = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{7.129}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui scriviamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\sinh(\alpha x)} &= \lim_{x\to 0} \left[\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \cdot \frac{\alpha x}{\sinh(\alpha x)} \cdot \frac{1}{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{\sinh(\alpha x)} \end{aligned} \tag{7.130}$$

Dai limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \;\; \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x}{\sinh(\alpha x)} = 1, \tag{7.131}$$

da cui il risultato.

Esercizio 287 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \left(x \frac{\sin x + 1 - \cos x - x}{1 - \cos x} \right) \tag{7.132}$$

Soluzione

Siamo in presenza della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, che può essere risolta dividendo numeratore e denominatore della frazione per x^2:

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{1-\cos x}{x} - 1}{\frac{1-\cos x}{x^2}} \tag{7.133}$$

Dai limiti fondamentali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \;\; \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \tag{7.134}$$

Per il limite a denominatore applichiamo le formule di duplicazione (Appendice B.2):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \\ &= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{7.135}$$

Segue

$$\lambda = \frac{1+0-1}{\frac{1}{2}} = 0 \tag{7.136}$$

Esercizio 288 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}(e^x-1)\,\frac{\tan x-\sin x}{x^4} \tag{7.137}$$

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Per rimuoverla, scriviamo

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}(e^x-1)\,\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}(e^x-1)\,\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^4\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{=\ln e=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{=1/2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}_{=1} = \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{7.138}$$

Esercizio 289 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[x\sin x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)+1-\cos x\right] \tag{7.139}$$

Soluzione

Anche qui compare la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sviluppiamo il prodotto:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)+\frac{1-\cos x}{x^2}\right] \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)}_{=2}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{=1/2} = \frac{5}{2}\end{aligned} \tag{7.140}$$

Esercizio 290 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\sin 3x\,\frac{3^{\sin 7x}-1}{\sin^2 7x}\right) \tag{7.141}$$

Soluzione

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Strategia di attacco:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{7x}{\sin 7x}\cdot\frac{3^{\sin 7x}-1}{\sin 7x}\right) \\ &= \frac{3}{7}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{7x}{\sin 7x}\cdot\frac{3^{\sin 7x}-1}{\sin 7x}\right) \\ &= \frac{3}{7}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin 7x}-1}{\sin 7x}\end{aligned} \tag{7.142}$$

Il terzo limite si riconduce a un limite fondamentale con la sostituzione $t = \sin 7x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{\sin 7x}-1}{\sin 7x} = \lim_{t\to 0}\frac{3^t-1}{t} = \ln 3 \tag{7.143}$$

Conclusione

$$\lambda = \frac{3}{7}\ln 3 \tag{7.144}$$

Per una illustrazione grafica vedi fig. 7.15.

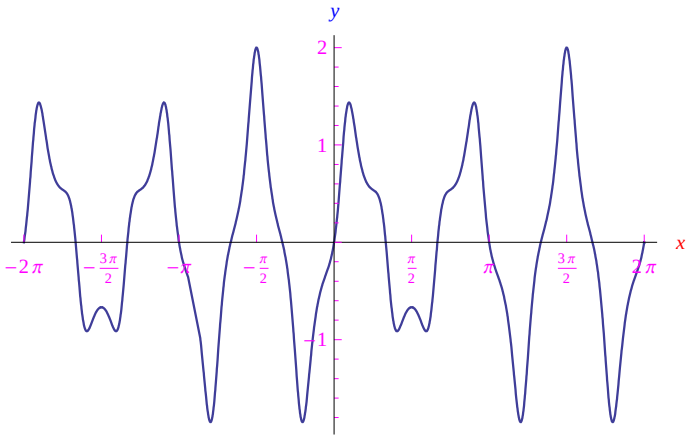


Figura 7.15: Esercizio 290.

Esercizio 291 *Determinare il comportamento agli estremi del campo di esistenza della seguente funzione:*

$$f(x) = \sqrt{4^{2/x}+7\cdot 4^{1/x}-1}-4^{1/x} \tag{7.145}$$

Soluzione

Deve essere:

$$4^{2/x}+7\cdot 4^{1/x}-1\geq 0, \quad x\neq 0 \tag{7.146}$$

La disequazione si risolve con la sostituzione:

$$t = 4^{1/x}, \tag{7.147}$$

ottenendo

$$t^2+7t-1\geq 0 \tag{7.148}$$

Le radici dell'equazione di secondo grado

$$t^2 + 7t - 1 = 0 \tag{7.149}$$

sono

$$t_- = -\frac{\sqrt{53}+7}{2}, \quad t_+ = \frac{\sqrt{53}-7}{2} \tag{7.150}$$

La (7.148) è verificata per

$$t \leq -\frac{\sqrt{53}+7}{2}, \quad t \geq \frac{\sqrt{53}-7}{2} \tag{7.151}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{cases} 4^{1/x} \leq -\frac{\sqrt{53}+7}{2} < 0 & \text{mai!} \\ 4^{1/x} \geq \frac{\sqrt{53}-7}{2} \end{cases} \tag{7.152}$$

Segue

$$\frac{1}{x} \geq \lg_4 \left(\frac{\sqrt{53}-7}{2} \right) \tag{7.153}$$

Cioè

$$x \in X = \left(-\infty, \frac{1}{\lg_4 \left(\frac{\sqrt{53}-7}{2} \right)} \right] \cup (0, +\infty) \tag{7.154}$$

(si osservi che $\lg_4 \left(\frac{\sqrt{53}-7}{2} \right) < 0$ giacché $\frac{\sqrt{53}-7}{2} < 1$). Per calcolare il limite per $x \to 0^+$ utilizziamo la sostituzione (7.147):

$$t = 4^{1/x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} = 4^{+\infty} = +\infty,$$

onde

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{t \to +\infty} \left(\sqrt{t^2 + 7t - 1} - t \right) = \infty - \infty \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{t^2 + 7t - 1} - t \right) \left(\sqrt{t^2 + 7t - 1} + t \right)}{\sqrt{t^2 + 7t - 1} + t} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{7t - 1}{|t| \left(\sqrt{1 + \frac{7}{t} - \frac{1}{t^2}} + \frac{t}{|t|} \right)} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{|t|} \frac{7 - \frac{1}{t}}{\left(\sqrt{1 + \frac{7}{t} - \frac{1}{t^2}} + \frac{t}{|t|} \right)} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{7 - \frac{1}{t}}{\left(\sqrt{1 + \frac{7}{t} - \frac{1}{t^2}} + 1 \right)} \\ &= \frac{7 - 0}{\sqrt{1 + 0 - 0} + 1} = \frac{7}{2} \end{aligned} \tag{7.155}$$

Per $x \to +\infty$

$$t = 4^{1/x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} = 4^{0^+} = 1, \tag{7.156}$$

onde

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 1} \left(\sqrt{t^2 + 7t - 1} - t \right) = \sqrt{7} - 1 \tag{7.157}$$

In maniera analoga

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to 1}\left(\sqrt{t^2+7t-1}-t\right) = \sqrt{7}-1 \tag{7.158}$$

Esercizio 292 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \left(7^x+5^x\right)^{1/x} \tag{7.159}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
La funzione assegnata è definita in $X=\mathbb{R}-\{0\}$ ed è ivi positiva. Risulta

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= (1+1)^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= (1+1)^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0^+\end{aligned} \tag{7.160}$$

Ne consegue che $x=0$ è un punto di discontinuità di seconda specie. Comportamento per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = [(+\infty)+(+\infty)]^{\frac{1}{+\infty}} = \infty^0 \tag{7.161}$$

Strategia di attacco:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left\{7^x\left[1+\left(\frac{5}{7}\right)^x\right]\right\}^{1/x} = 7\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{5}{7}\right)^x\right]^{1/x} \tag{7.162}$$

Ma

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^x = 0^+,$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 7\left(1+0^+\right)^{0^+} = 7^+ \tag{7.163}$$

Cioè la funzione è convergente per $x\to+\infty$ e il limite vale 7, i.e. la retta $y=7$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico della funzione. Passiamo al comportamento per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(0^+ + 0^+\right)^{0^-} = 0^0 \tag{7.164}$$

Strategia di attacco:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left\{5^x\left[\left(\frac{7}{5}\right)^x+1\right]\right\}^{1/x} = 5\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\frac{7}{5}\right)^x+1\right]^{1/x} \tag{7.165}$$

Ma

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{5}\right)^x = 0^+,$$

onde

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5\left(0^+ + 1\right)^{0^-} = 5^- \tag{7.166}$$

Cioè la funzione è convergente per $x\to-\infty$ e il limite vale 5, i.e. la retta $y=5$ è asintoto orizzontale a sinistra per il grafico della funzione. In fig. 7.16 riportiamo il grafico della funzione assegnata.

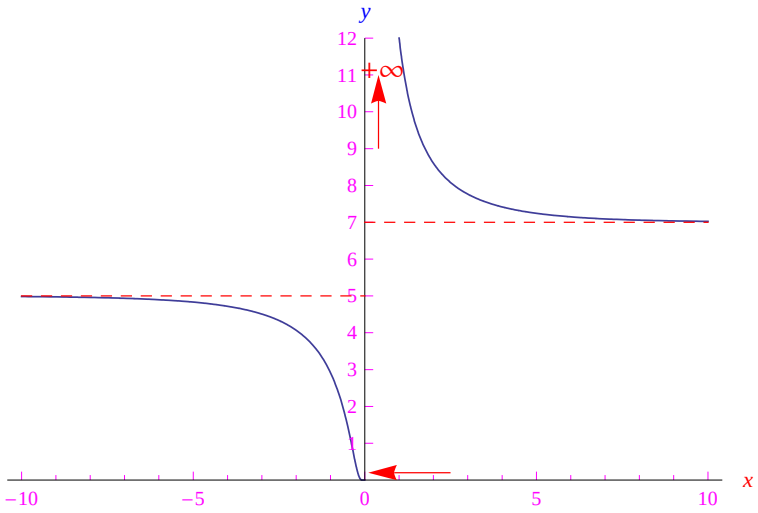


Figura 7.16: Grafico della funzione (7.159).

Esercizio 293 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\tan x}\left(2^{\sin x} - 1\right) \tag{7.167}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\tan x}\left(2^{\sin x} - 1\right) = \frac{0}{0} \tag{7.168}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\left(2^{\sin x} - 1\right) = \lim_{x\to 0} \cos^2 x \frac{2^{\sin x} - 1}{\sin x} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} \cos^2 x}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{\sin x}}_{=\frac{0}{0}}\end{aligned} \tag{7.169}$$

Per il secondo limite basta eseguire il cambio di variabile

$$t = \sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{7.170}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^t - 1}{t} = \ln 2 \tag{7.171}$$

Conclusione

$$\lambda = \ln 2 \tag{7.172}$$

Esercizio 294 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to -3} \frac{(x^2 - 9)(x + 1)}{\sqrt{|x^2 - 2x - 15|}} \tag{7.173}$$

Soluzione
Poniamo

$$f(x) = \frac{(x^2 - 9)(x + 1)}{\sqrt{|x^2 - 2x - 15|}} \tag{7.174}$$

Questa funzione è definita in $\mathbb{R} - \{-3, 5\}$, essendo $-3, 5$ gli zeri del polinomio $x^2 - 2x - 15$. Svincoliamoci dal valore assoluto tenendo conto che

$$\left|x^2 - 2x - 15\right| = \begin{cases} x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5), & x \notin [-3, 5] \\ -(x^2 - 2x - 15) = -(x+3)(x-5), & x \in (-3, 5) \end{cases}$$

Ciò implica che dobbiamo calcolare separatamente i limiti destro e sinistro. Iniziamo con quest'ultimo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -3^-} f(x) &= \lim_{x \to -3^-} \frac{(x-3)(x+3)(x+1)}{\sqrt{(x+3)(x-5)}} \\ &= \lim_{x \to -3^+} \sqrt{\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-5)}} \cdot \lim_{x \to -3^-} (x-3)(x+1) \\ &= \underbrace{\lim_{x \to -3^+} \sqrt{\frac{x+3}{(x-5)}}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to -3^-} (x-3)(x+1)}_{=12} = 0 \end{aligned}$$

Passiamo al limite destro:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -3^+} f(x) &= \lim_{x \to -3^+} \frac{(x-3)(x+3)(x+1)}{\sqrt{-(x+3)(x-5)}} \\ &= \lim_{x \to -3^+} \sqrt{\frac{(x+3)^2}{-(x+3)(x-5)}} \cdot \lim_{x \to -3^+} (x-3)(x+1) \\ &= \underbrace{\lim_{x \to -3^+} \sqrt{\frac{x+3}{-(x-5)}}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to -3^+} (x-3)(x+1)}_{=12} = 0 \end{aligned}$$

Dal momento che il limite destro e il limite sinistro sono entrambi nulli:

$$\lim_{x \to -3} \frac{(x^2 - 9)(x+1)}{\sqrt{|x^2 - 2x - 15|}} = 0 \tag{7.175}$$

Questo risultato è illustrato in fig. 7.17.

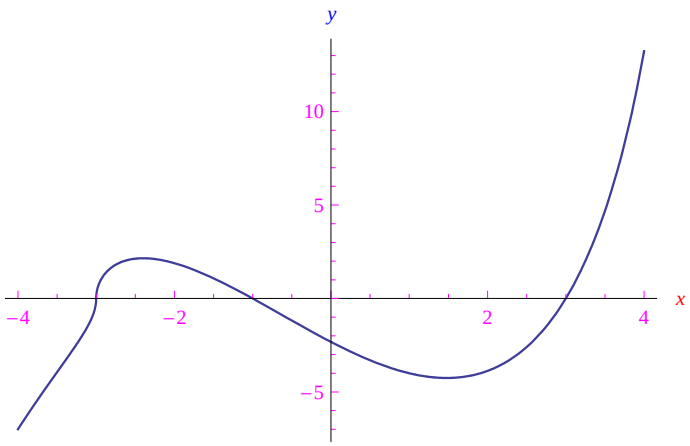


Figura 7.17: Grafico della funzione (7.174).

Esercizio 295 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x} \tag{7.176}$$

Soluzione

Per risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, scriviamo l'espressione analitica del coseno iperbolico:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

per cui

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\left(1 - \cos x\right)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\left(e^{2x} + 1 - 2e^x\right)}{1 - \cos x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}\left(e^x - 1\right)^2}{1 - \cos x} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x\to 0} e^{-x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{1 - \cos x}}_{\downarrow \frac{0}{0}}\end{aligned} \tag{7.177}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2}{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \tag{7.178}$$

Ne concludiamo

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \tag{7.179}$$

Esercizio 296 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^3}\right)^x \tag{7.180}$$

Soluzione

Scriviamo

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3x^2 + 1}{x^3}\right)^x = 1^{+\infty} \tag{7.181}$$

Tale forma indeterminata può essere rimossa con il seguente artificio:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{3x^2 + 1}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3x^2+1}}\right]^{\frac{3x^2+1}{x^2}} = \left[\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3x^2 + 1}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3x^2+1}}\right]^{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{x^2}} \tag{7.182}$$

Il primo limite si calcola con il cambio di variabile

$$t = \frac{x^3}{3x^2 + 1}, \tag{7.183}$$

ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3x^2 + 1}{x^3}\right)^{\frac{x^3}{3x^2+1}} = \lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \tag{7.184}$$

Il secondo limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}=3\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=3 \tag{7.185}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+1}{x^3}\right)^x=e^3 \tag{7.186}$$

Esercizio 297 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\pi(x-\pi)}-1}{x^2-2\pi x+\pi^2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{\pi}\right) \tag{7.187}$$

Soluzione

Risulta

$$\lambda=\frac{1-1}{\pi^2-2\pi^2+\pi^2}\left(\sqrt{\pi}-\sqrt{\pi}\right)\to\frac{0}{0} \tag{7.188}$$

Osserviamo che

$$x^2-2\pi x+\pi^2=(x-\pi)^2\,, \tag{7.189}$$

per cui

$$\lambda=\underbrace{\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\pi(x-\pi)}-1}{x-\pi}}_{=\lambda_1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{x-\pi}}_{=\lambda_2} \tag{7.190}$$

Calcoliamo separatamente i due limiti. Per il primo eseguiamo il cambio di variabile:

$$t=\pi\,(x-\pi)\,,$$

onde

$$\lambda_1=\pi\lim_{x\to\pi}\frac{e^t-1}{t}=\pi\cdot1=\pi \tag{7.191}$$

Per il secondo

$$\lambda_2=\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{(\sqrt{x}-\sqrt{\pi})\,(\sqrt{x}+\sqrt{\pi})}=\lim_{x\to\pi}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\pi}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Segue

$$\lambda=\lambda_1\lambda_2=\frac{\pi}{2\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{7.192}$$

Esercizio 298 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\sin\frac{1}{x} \tag{7.193}$$

Soluzione

Qui abbiamo il prodotto di una funzione che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per una funzione non regolare ($\sin\frac{1}{x}$). Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}\right)\\&=\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}}_{=\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}\end{aligned} \tag{7.194}$$

Per la proposizione **??** il terzo limite vale zero. Ne concludiamo:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\sin\frac{1}{x}=0 \tag{7.195}$$

Esercizio 299 *Dimostrare*

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{\sqrt[x^n]{\pi}-1}{\sin\left(\frac{1}{x^n}\right)} = \ln\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{7.196}$$

Soluzione

$$\lambda \overset{def}{=} \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\pi^{\frac{1}{x^n}}-1}{\sin\left(\frac{1}{x^n}\right)} = \frac{0}{0} \tag{7.197}$$

Eseguendo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x^n} \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} = 0,$$

si ha

$$\lambda = \lim_{t\to0} \frac{\pi^t-1}{\sin t} = \lim_{t\to0} \frac{\frac{\pi^t-1}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim_{t\to0}\frac{\pi^t-1}{t}}{\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}} \tag{7.198}$$

I limiti a numeratore e donominatore sono limiti fondamentali:

$$\lim_{t\to0} \frac{\pi^t-1}{t} = \ln\pi, \quad \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

da cui il risultato. Il calcolo è facilmente verificabile con *Mathematica*. Tuttavia, si verifica un problema nel tracciamento del grafico per $n = 7, 8, 9, 10$, come mostrato nel grafico di fig. 7.18. Il problema si risolve aumentando la precisione di macchina, tramite l'istruzione `WorkingPrecision`, come mostrato in fig. 7.19.

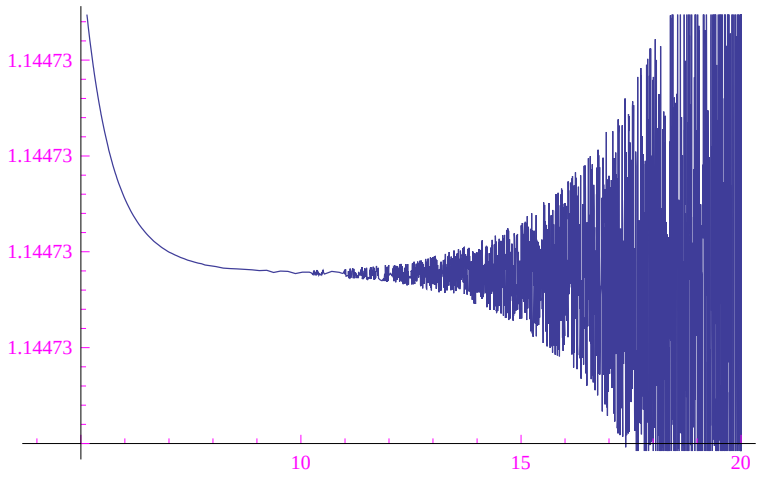


Figura 7.18: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \frac{\sqrt[x^8]{\pi}-1}{\sin\left(\frac{1}{x^8}\right)}$.

Esercizio 300 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+10x+24}{x^2}\right)^x \tag{7.199}$$

Soluzione

$$x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$$

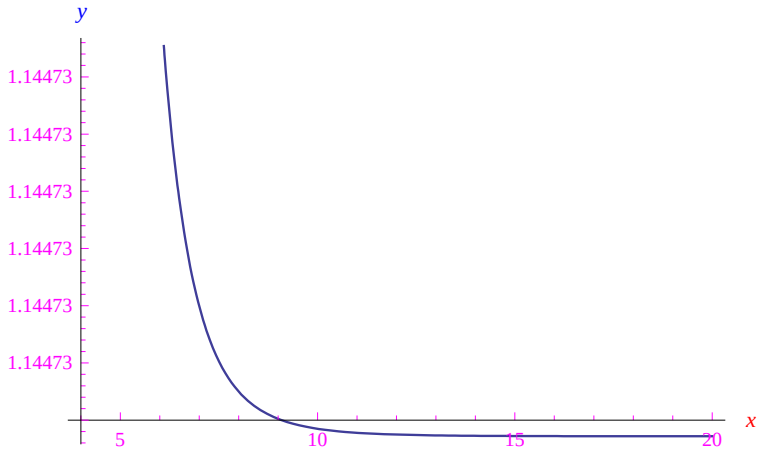


Figura 7.19: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \frac{\sqrt[x^8]{\pi}-1}{\sin\left(\frac{1}{x^8}\right)}$.

Ne segue

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+4)(x+6)}{x^2}\right]^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{x+4}{x}\right)^x\left(\frac{x+6}{x}\right)^x\right] \\ &= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^x}_{=e^4}\cdot\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6}{x}\right)^x}_{=e^6} = e^{10},\end{aligned} \tag{7.200}$$

giacché si tratta di limiti fondamentali. Alternativamente:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+10x+24}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{10x+24}{x^2}\right)^x \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{10x+24}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{10x+24}}\right]^{\frac{10x+24}{x}} \\ &= \left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{10x+24}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{10x+24}}\right]\right\}^{\lim_{x\to+\infty}\frac{10x+24}{x}}\end{aligned} \tag{7.201}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{10x+24}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{10x+24}}\right] \underset{t=\frac{x^2}{10x+24}}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10x+24}{x} = 10,$$

da cui il risultato precedente.

Esercizio 301 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \sqrt{\ln^2 x + \ln x + 11} + \ln x, \tag{7.202}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
Deve essere

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x + \ln x + 11 > 0 \end{cases} \tag{7.203}$$

Per la seconda disequazione eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \ln x,$$

per cui

$$\ln^2 x + \ln x + 11 > 0 \Longleftrightarrow t^2 + t + 11 > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde

$$X = (0, +\infty) \tag{7.204}$$

Studiamo quindi il comportamento della funzione in un intorno destro di $x = 0$:

$$\lambda = \lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{\ln^2 x + \ln x + 11} + \ln x \right) = \infty - \infty \tag{7.205}$$

Utilizzando il cambio di variabile precedente:

$$\lambda = \lim_{t \to -\infty} \left(\sqrt{t^2 + t + 11} + t \right) = \infty - \infty$$

Segue

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{t^2 + t + 11} + t \right) \left(\sqrt{t^2 + t + 11} - t \right)}{\sqrt{t^2 + t + 11} - t} \\ &= \lim_{t \to -\infty} \frac{t + 12}{\sqrt{t^2 + t + 11} - t} = \lim_{t \to -\infty} \frac{t \left(1 + \frac{12}{t} \right)}{|t| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{11}{t^2}} - \frac{t}{|t|} \right)} \\ &= \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{|t|} \cdot \lim_{t \to -\infty} \frac{1 + \frac{12}{t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{11}{t^2}} - \frac{t}{|t|}} \underset{\lim_{t \to -\infty} \frac{t}{|t|} = -1}{=} -1 \cdot \frac{1 + 0}{\sqrt{1} + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{7.206}$$

Ne concludiamo che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Per il comportamento all'infinito, il limite è immediato:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\ln^2 x + \ln x + 11} + \ln x \right) = +\infty \tag{7.207}$$

Esercizio 302 *Dimostrare*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{\tanh(\alpha x)} = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{7.208}$$

Soluzione

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{\tanh(\alpha x)} = \frac{0}{0}$$

Scriviamo

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} \cdot \frac{\alpha x}{\tanh(\alpha x)} \cdot \frac{1}{\alpha} \right] = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} \lim_{x \to 0} \frac{\alpha x}{\tanh(\alpha x)} \tag{7.209}$$

A secondo membro troviamo i limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{\alpha x}{\tanh(\alpha x)}=1$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{\tanh(\alpha x)}=\frac{1}{\alpha}\cdot 1\cdot\alpha=1 \tag{7.210}$$

Esercizio 303 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{1+\sin[\ln(x+1)]\}^{\alpha}-1}{\sinh[\sin\ln(x+1)]}=\alpha,\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}-\{0\} \tag{7.211}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, per cui tentiamo con il cambio di variabile:

$$t=\sin\ln(x+1)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

In tal modo il limite si fattorizza nel prodotto di limiti fondamentali:

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{\sinh t}=\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}}_{=\alpha}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sinh t}}_{=1}=\alpha,$$

da cui il risultato.

Esercizio 304 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7x^5-4x^4+a^2}-a}{\sqrt{x^3-2x^2+b^2}-b},\qquad (a,b>0) \tag{7.212}$$

Soluzione

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{7x^5-4x^4+a^2}-a}{\sqrt{7x^3-2x^2+b^2}-b}=\frac{0}{0} \tag{7.213}$$

Segue

$$\lambda=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{7x^5-4x^4+a^2}-a\right)\left(\sqrt{7x^5-4x^4+a^2}+a\right)\left(\sqrt{7x^3-2x^2+b^2}+b\right)}{\left(\sqrt{7x^3-2x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{7x^3-2x^2+b^2}+b\right)\left(\sqrt{7x^5-4x^4+a^2}+a\right)} \tag{7.214}$$

Espandendo

$$\begin{aligned}\lambda&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(7x^5-4x^4+a^2-a^2\right)\left(\sqrt{7x^3-2x^2+b^2}+b\right)}{\left(7x^3-2x^2+b^2-b^2\right)\left(\sqrt{7x^5-4x^4+a^2}+a\right)} \qquad (7.215)\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(7x-4)\left(\sqrt{7x^3-2x^2+b^2}+b\right)}{(7x-2)\left(\sqrt{7x^5-4x^4+a^2}+a\right)}\\ &=\frac{0\cdot(-4)\cdot(2b)}{(-2)\cdot(2a)}=0\end{aligned}$$

Esercizio 305 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+\cos x)}{\sinh(\cos x)} \tag{7.216}$$

Soluzione

Abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La presenza di $\cos x$ suggerisce il cambio di variabile:

$$t = \cos x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0 \tag{7.217}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\sinh t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sinh t}{t}} \\ &= \frac{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}{\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t}}\end{aligned} \tag{7.218}$$

Dai limiti fondamentali:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1, \quad \lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t} = 1, \tag{7.219}$$

onde

$$\lambda = 1 \tag{7.220}$$

Esercizio 306 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}, \qquad (a, b \neq 0) \tag{7.221}$$

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \tag{7.222}$$

Dal momento che l'espressione della funzione ricorda il limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = 1, \tag{7.223}$$

scriviamo

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a\cdot\frac{bx}{e^{bx}-1}\cdot\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{a}{b}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}}\end{aligned} \tag{7.224}$$

Riesce

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax} &\underset{t=ax}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t} = 1 \\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx} &\underset{\tau=ax}{=} \lim_{\tau\to 0}\frac{e^{\tau}-1}{\tau} = 1\end{aligned} \tag{7.225}$$

Ne concludiamo

$$\lambda = \frac{a}{b} \tag{7.226}$$

Esercizio 307 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n+bx+c}{x^n}\right)^{x^{n-1}} = e^{b}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\} \tag{7.227}$$

Soluzione
Abbiamo la forma indeterminata 1^{∞} che può essere rimossa con il seguente artificio:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &\overset{def}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^n+bx+c}{x^n}\right)^{x^{n-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{bx+c}{x^n}\right)^{x^{n-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{bx+c}{x^n}\right)^{\frac{x^n}{bx+c}}\right]^{\frac{bx+c}{x}} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{bx+c}{x^n}\right)^{\frac{x^n}{bx+c}}\right]}_{=\lambda_1}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{bx+c}{x}}_{=\lambda_2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte

$$\lambda_1 = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{bx+c}{x^n}\right)^{\frac{x^n}{bx+c}}\right] \underset{t=\frac{x^n}{bx+c}}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e \tag{7.228}$$

$$\lambda_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{bx+c}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(b+\frac{c}{x}\right) = b$$

Ne concludiamo

$$\lambda_n = e^b \tag{7.229}$$

Esercizio 308 *Calcolare*

$$\lambda_a = \lim_{x\to1}\frac{a^{x-1}-1}{x^3-3x^2+3x-1}\left[1-\cos a\left(x-1\right)\right], \qquad (a\neq1) \tag{7.230}$$

Soluzione
Osservando che

$$x^3-3x^2+3x-1 = \left(x-1\right)^3, \tag{7.231}$$

si ha

$$\lambda_a = \lim_{x\to1}\frac{a^{x-1}-1}{\left(x-1\right)^3}\left[1-\cos a\left(x-1\right)\right], \tag{7.232}$$

che suggerisce il seguente cambio di variabile:

$$t = x-1 \tag{7.233}$$

Segue

$$\begin{aligned}
\lambda_a &= \lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t^3}\left(1-\cos at\right) \\
&= \lim_{t\to0}\left[\frac{a^t-1}{t}\cdot\frac{1-\cos at}{\left(at\right)^2}\cdot a^2\right] \\
&\underset{\tau=at}{=} a^2\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t}}_{=\ln a}\cdot\underbrace{\lim_{\tau\to0}\frac{1-\cos\tau}{\tau^2}}_{=\frac{1}{2}}\cdot a^2
\end{aligned} \tag{7.234}$$

Cioè

$$\lambda_a = \frac{a^2}{2} \ln a \tag{7.235}$$

Esercizio 309 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[x]{3} - 1\right) \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) x^3 \tag{7.236}$$

Soluzione
Conviene riscrivere come

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(3^{1/x} - 1\right) \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) x^3,$$

che suggerisce il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x}$$

Segue

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{t\to0^+} \frac{3^t - 1}{t^3} (1 - \cos t) \\ &= \underbrace{\lim_{t\to0^+} \frac{3^t - 1}{t}}_{=\ln 3} \cdot \underbrace{\lim_{t\to0^+} \frac{1 - \cos t}{t^2}}_{=1/2} \end{aligned} \tag{7.237}$$

Ne concludiamo

$$\lambda = \frac{1}{2} \ln 3 \tag{7.238}$$

Esercizio 310 *Dimostrare*

$$\lim_{x\to0} \frac{(1 + x^2)^\alpha - 1}{1 - \cosh x} = -2\alpha, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R} \tag{7.239}$$

Soluzione
Per risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ conviene dividere numeratore e denominatore per x^2:

$$\lim_{x\to0} \frac{\frac{\left(1+x^2\right)^\alpha - 1}{x^2}}{\frac{1-\cosh x}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to0} \frac{\left(1+x^2\right)^\alpha - 1}{x^2}}{\lim_{x\to0} \frac{1-\cosh x}{x^2}} \tag{7.240}$$

Calcoliamo separatamente i due limiti. Per il primo eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = x^2 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0, \tag{7.241}$$

onde

$$\lim_{x\to0} \frac{(1 + x^2)^\alpha - 1}{x^2} = \lim_{t\to0} \frac{(1 + t)^\alpha - 1}{t} = \alpha, \tag{7.242}$$

in quanto si tratta di un limite fondamentale. Per il secondo limite, conviene esplicitare il coseno iperbolico:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2-e^x-e^{-x}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\left(2e^x-e^{2x}-1\right)}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2e^x} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{x^2e^x} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2 e^{-x}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}_{=\ln e=1}\right]^2 \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} e^{-x}}_{=1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{7.243}$$

Ne concludiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)^\alpha-1}{1-\cosh x} = \frac{\alpha}{-\frac{1}{2}} = -2\alpha \tag{7.244}$$

Esercizio 311 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f\left(x\right) = x\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} - x \tag{7.245}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
La funzione è definita per tutti e soli i valori della variabile indipendente x tali che

$$\frac{2x+1}{2x-1} \geq 0, \tag{7.246}$$

cioè

$$x \in X = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), \tag{7.247}$$

onde gli estremi del campo di esistenza sono $x = 1/2$ e $x \to \pm\infty$. Iniziamo con il comportamento all'infinito, calcolando dapprima:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{2x\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}} = 1,$$

onde

$$\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = \infty - \infty \tag{7.248}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata, "manipoliamo" la funzione nel modo seguente:

$$f(x) = x\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} \tag{7.249}$$

Osserviamo che l'indeterminazione è prodotta dal segno $-$ a numeratore, per cui dobbiamo liberarci della differenza:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} \\ &= \frac{x\left(2x+1-2x+1\right)}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}\right)} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x}\sqrt{2-\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} \end{aligned} \tag{7.250}$$

Al limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\sqrt{2-\frac{1}{x}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2-0}\left(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0}\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)} = \frac{2}{2\cdot 4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Cioè la funzione è convergente per $x \to \pm\infty$, e il limite vale $1/2$. Geometricamente, significa che la retta orizzontale $2y - 1 = 0$ è asintoto del diagramma cartesiano della funzione, sia a sinistra che a destra.

Il comportamento in un intorno destro di $x = 1/2$ è immediato:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{0^+}} - \frac{1}{2} = +\infty \tag{7.251}$$

Ovvero la funzione è divergente positivamente per $x \to (1/2)^+$ o, ciò che è lo stesso, la retta verticale $2x - 1 = 0$ è asintoto verticale a destra per il diagramma della funzione.

Esercizio 312 *Determinare i valori del parametro reale positivo α in corrispondenza dei quali, la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\alpha-8}{x-1}}, & se\ x > 1 \\ 1, & se\ x = 1 \\ |x-1|^{\alpha-7}, & se\ x < 1 \end{cases}, \tag{7.252}$$

ha in $x = 1$ una discontinuità eliminabile.

Soluzione
Caso 1: $0 \leq \alpha < 7$, cosicché

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, \quad \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{-|\alpha-7|}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \tag{7.253}$$

Dal momento che

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} |x-1| = 0^{+},$$

si ha

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim_{x \to 1^{-}} \frac{1}{|x-1|^{|\alpha-7|}} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty \tag{7.254}$$

Il limite destro

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^{+}} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}} = e^{-\frac{|\alpha-8|}{0^{+}}} = e^{-\infty} = 0^{+}, \tag{7.255}$$

da cui vediamo che per $0 \leq \alpha < 7$ il punto di accumulazione $x = 1$ è di discontinuità di seconda specie. In fig. 7.20 riportiamo l'andamento del grafico della funzione per $\alpha = 6.9$.

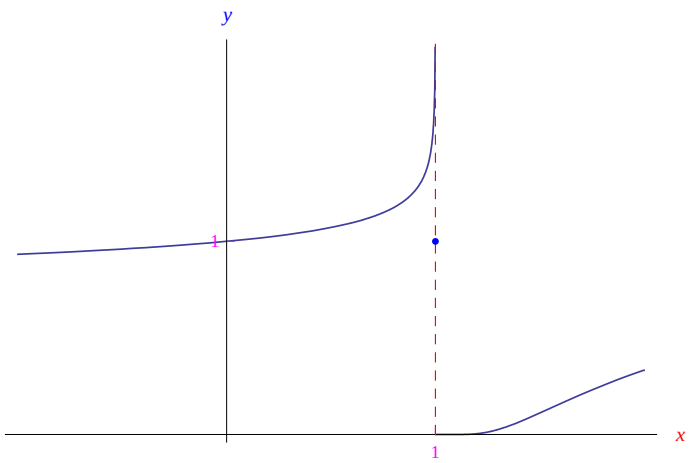


Figura 7.20: Grafico della funzione (7.252) per $\alpha = 6.9$. Il punto $x = 1$ è di discontinuità di seconda specie.

Caso 2: $\alpha = 7$
Qui è

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, \quad \text{se } x \leq 1 \end{cases}, \tag{7.256}$$

onde

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^{+}} e^{-\frac{1}{x-1}} = e^{-\frac{1}{0^{+}}} = e^{-\infty} = 0^{+} \tag{7.257}$$
$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = 1$$

Ne concludiamo che per $\alpha = 7$ il punto $x = 1$ è di discontinuità di prima specie, come illustrato in fig. 7.21.
Caso 3: $7 < \alpha < 8$

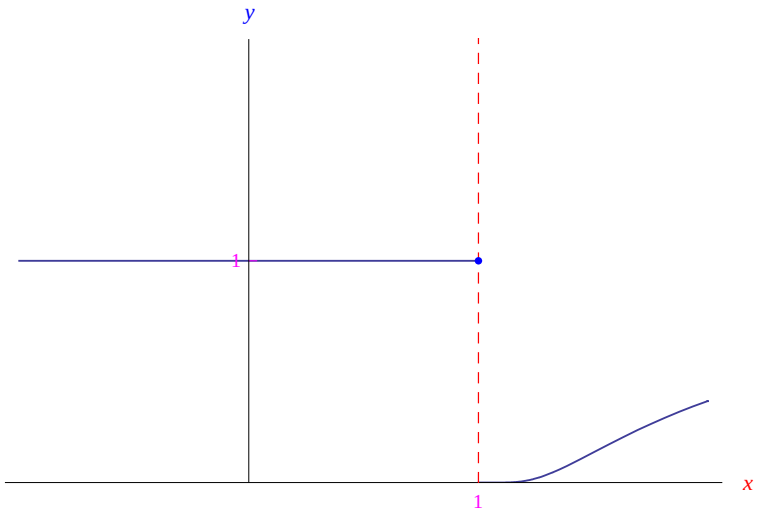


Figura 7.21: Grafico della funzione (7.252) per $\alpha = 7$. Il punto $x = 1$ è di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è $s(1) = -1$.

Abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, \quad \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{|\alpha-7|}, \quad \text{se } x < 1 \end{cases} \tag{7.258}$$

Calcoliamo i limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} |x-1|^{|\alpha-7|} = 0^+ \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}} = e^{-\frac{|\alpha-8|}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+ \end{aligned} \tag{7.259}$$

Cioè

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0, \tag{7.260}$$

per cui $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile. Precisamente, modificando la funzione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 0, \quad \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{|\alpha-7|}, \quad \text{se } x < 1 \end{cases}, \tag{7.261}$$

il cui grafico è riportato in fig. 7.22.

Caso 4: $\alpha = 8$

Risulta:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 1 \\ |x-1|, & \text{se } x < 1 \end{cases}, \tag{7.262}$$

per cui

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0^+$$

Ciò implica che $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie, come illustrato in fig. 7.23.

Caso 5: $\alpha > 8$

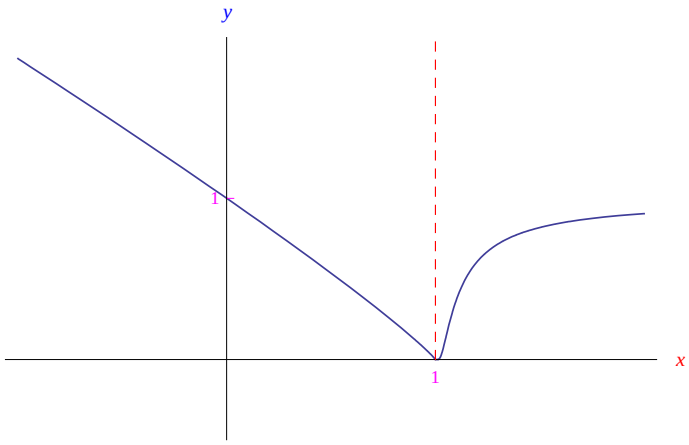


Figura 7.22: Grafico della funzione (7.252) per $\alpha = 7.9$. Il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile, giacché la funzione è ivi infinitesima.

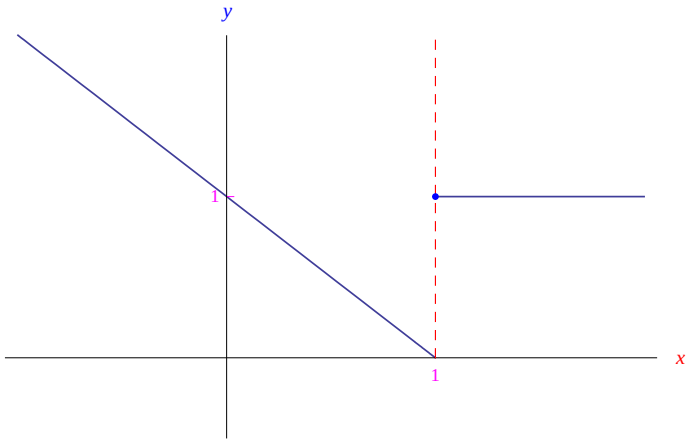


Figura 7.23: Grafico della funzione (7.252) per $\alpha = 8$. Il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è $s\,(1) = +1$.

In quest'ultimo caso abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{|\alpha-8|}{x-1}}, & \text{se } x > 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \\ |x-1|^{|\alpha-7|}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \tag{7.263}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{|\alpha-8|}{x-1}} = e^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} |x-1|^{|\alpha-7|} = 0^+, \end{aligned} \tag{7.264}$$

cosicché $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie, come illustrato in fig. 7.24.

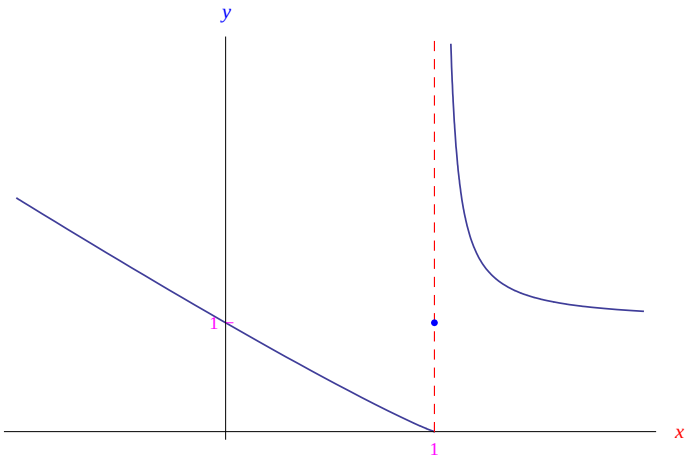


Figura 7.24: Grafico della funzione (7.252) per $\alpha = 8.1$. Il punto $x = 1$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

Esercizio 313 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x \right) \tag{7.265}$$

Soluzione

Riesce

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x \right) = \infty - \infty, \tag{7.266}$$

cosicché determiniamo il fattore razionalizzante (§ 1.3.3):

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=1}^{3} \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^{3-k} (x^3)^{k-1}} \\ &= \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2) x^3} + \sqrt[3]{x^6} \\ &= \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2 \end{aligned} \tag{7.267}$$

Segue

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2\right)}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2} \tag{7.268}$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+x^2\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+x^2}$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+} = -\frac{1}{3}$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right) = -\frac{1}{3}$$

Cioè la funzione è convergente per $x \to +\infty$, e il limite vale $-1/3$. Geometricamente, significa che la retta orizzontale $3y + 1 = 0$ è asintoto orizzontale a destra per il diagramma della funzione.

Esercizio 314 *Determinare il comportamento della funzione*

$$f(x) = x + \arctan\frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}}{x-1}, \tag{7.269}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

Determiniamo innanzitutto il campo di esistenza di f. A tale scopo riduciamo in fattori il numeratore del radicando:

$$x^3-2x^2+1 = (x-1)\left(x^2-x-1\right), \tag{7.270}$$

per cui

$$f(x) = x + \arctan\sqrt{\frac{x^2-x-1}{x-1}} \tag{7.271}$$

Deve essere

$$\frac{x^2-x-1}{x-1} \geq 0 \tag{7.272}$$

Per il numeratore

$$x^2-x-1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \tag{7.273}$$

Per il denominatore

$$x-1 > 0 \Longleftrightarrow x \in (1, +\infty) \tag{7.274}$$

La risoluzione della disequazione (7.272) è ottenuta per via grafica come illustrato in fig. 7.25, onde il campo di esistenza è

$$X = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup [1, +\infty) \tag{7.275}$$

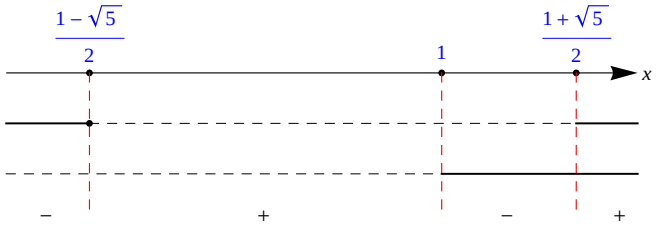


Figura 7.25: Studio del segno del rapporto $\frac{x^2-x-1}{x-1}$.

Segue che in $x = 1$ la funzione non è definita. Quindi calcoliamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 + \arctan(+\infty) = 1 + \frac{\pi}{2}$$

Ne segue che $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile. Precisamente, se modifichiamo la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x + \arctan\frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}}{x-1}, & \text{se } x \in X \\ 1 + \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 1 \end{cases}, \tag{7.276}$$

si ha che f è continua in $x = 1$. Per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) + \arctan(+\infty) = (+\infty) + \frac{\pi}{2} = +\infty,$$

ossia la funzione è divergente positivamente per $x \to +\infty$.

Esercizio 315 *Determinare il comportamento della funzione*

$$f(x) = x + \arctan\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}, \tag{7.277}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
Determiniamo innanzitutto il campo di esistenza di f. Risulta

$$x^3 - 2x^2 + x = x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2,$$

onde

$$\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = \frac{\sqrt{x(x-1)^2}}{x - 1} = \frac{|x-1|}{x-1}\sqrt{x},$$

cosicché

$$f(x) = x + \arctan\left(\frac{|x-1|}{x-1}\sqrt{x}\right)$$

Conviene esplicitare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x + \arctan\sqrt{x}, & \text{se } x > 1 \\ x - \arctan\sqrt{x}, & \text{se } x < 1 \end{cases} \tag{7.278}$$

Il campo di esistenza è

$$X = [0, +\infty) - \{1\} \tag{7.279}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \left(x - \arctan\sqrt{x}\right) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \left(x + \arctan\sqrt{x}\right) = 1 + \arctan 1 = 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{7.280}$$

Ne consegue che $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie per f, con salto

$$s(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}, \tag{7.281}$$

come mostrato in fig. 7.26. Il comportamento all'infinito si evince dal limite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty) + \arctan(+\infty) = (+\infty) + \frac{\pi}{2} = +\infty, \tag{7.282}$$

ossia la funzione è divergente positivamente per $x \to +\infty$.

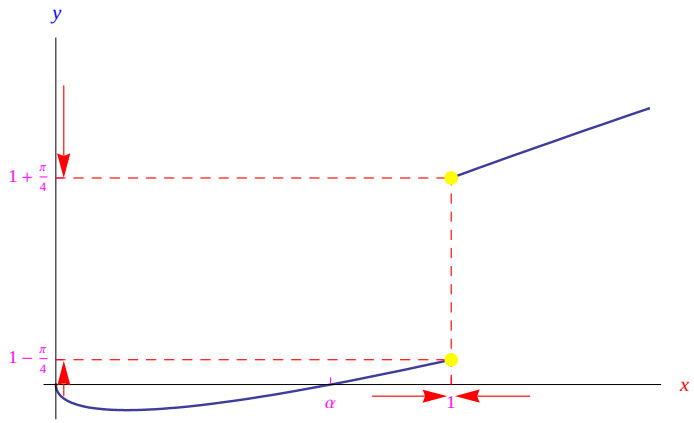


Figura 7.26: Grafico della funzione (7.277).

Nell'esercizio precedente abbiamo visto che la funzione

$$f(x) = x + \arctan\left(\frac{|x-1|}{x-1}\sqrt{x}\right)$$

ha in $x = 1$ un punto di discontinuità di prima specie, giacché:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 1 - \frac{\pi}{4} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= 1 + \frac{\pi}{4} \end{aligned} \tag{7.283}$$

La discontinuità è dovuta alla presenza di $\frac{|x-1|}{x-1}$ che può essere scritta come $sgn\,(x-1)$, dove $sgn\,(\cdot)$ è la funzione signum:

$$sgn\,(x-1) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \\ -1, & \text{se } x < 1 \end{cases} \tag{7.284}$$

Un'altra funzione che presenta punti di discontinuità di prima specie è arctan il cui argomento ha una discontinuità di seconda specie. Più precisamente, consideriamo la funzione composta

$$f\,(x) = \arctan\,(g\,(x)) \tag{7.285}$$

con $g\,(x)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0^-} g\,(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} g\,(x) = +\infty \tag{7.286}$$

Segue

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^-} f\,(x) &= \lim_{x \to x_0^-} \arctan\,(g\,(x)) = \arctan\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2}^{+} \\ \lim_{x \to x_0^+} f\,(x) &= \lim_{x \to x_0^+} \arctan\,(g\,(x)) = \arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2}^{-}, \end{aligned} \tag{7.287}$$

onde x_0 è un punto di discontinuità di prima specie con salto $s\,(x_0) = \pi$. Se invece

$$\lim_{x \to x_0} g\,(x) = \pm\infty, \tag{7.288}$$

si ha

$$\lim_{x \to x_0} f\,(x) = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{7.289}$$

ovvero x_0 è un punto di discontinuità eliminabile. Di seguito alcuni esempi.

Esempio 60 *Studiamo il comportamento della funzione*

$$f\,(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) \tag{7.290}$$

in un intorno di $x = 1$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f\,(x) &= \arctan\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2}^{+} \\ \lim_{x \to 1^+} f\,(x) &= \arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2}^{-} \end{aligned} \tag{7.291}$$

Il grafico è riportato in fig. 7.27.

Esempio 61 *Studiamo il comportamento della funzione*

$$f\,(x) = \arctan\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right] \tag{7.292}$$

in un intorno di $x = 1$.

Abbiamo

$$\lim_{x \to 1} f\,(x) = \arctan\,(+\infty) = \frac{\pi}{2}^{-}, \tag{7.293}$$

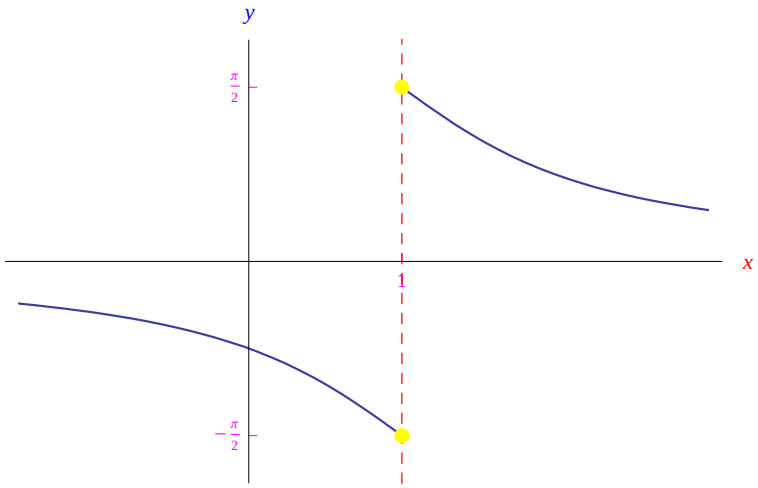


Figura 7.27: Grafico della funzione (7.290).

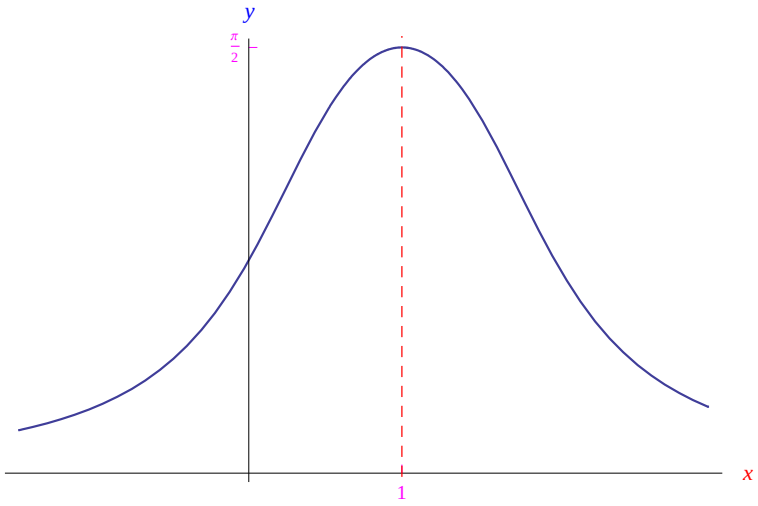


Figura 7.28: Grafico della funzione (7.292).

per cui $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right], & se\ x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & se\ x = 1 \end{cases} \tag{7.294}$$

Il grafico è riportato in fig. 7.28.

Esempio 62 *Studiamo il comportamento della funzione*

$$f(x) = \arctan\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right) \tag{7.295}$$

in un intorno di $x = 1$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \arctan\left(e^{-\infty}\right) = \arctan\left(0^+\right) = 0^+ \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \arctan\left(e^{+\infty}\right) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^- \end{aligned} \tag{7.296}$$

Il grafico è riportato in fig. 7.29.

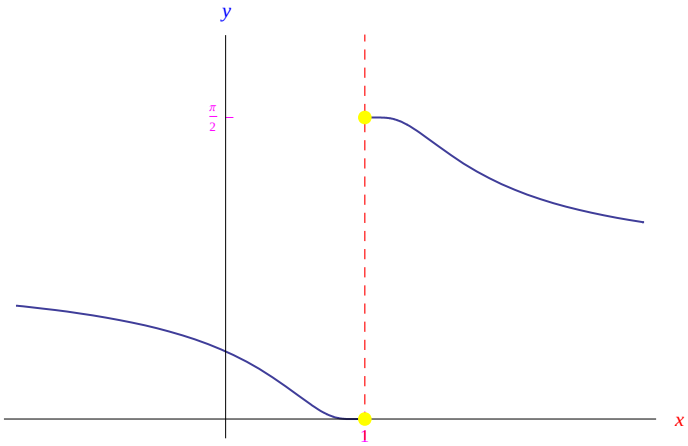


Figura 7.29: Grafico della funzione (7.295).

Esercizio 316 *Classificare i punti di discontinuità della funzione*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\right) \tag{7.297}$$

Soluzione

Riguardo al campo di esistenza, dobbiamo imporre

$$x \neq 0, \quad x \neq \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{7.298}$$

Per $x \to 0$ la funzione $\sin\frac{1}{x}$ è non regolare, e tale è la funzione assegnata, per cui

$$\nexists \lim_{x\to 0} f(x) \tag{7.299}$$

Studiamo il comportamento negli infiniti punti

$$x_k = \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{7.300}$$

Determiniamo preliminarmente i limiti

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \tag{7.301}$$

A tale scopo eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x} \underset{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^{\pm}}{\longrightarrow} (k\pi)^{\mp} \tag{7.302}$$

Abbiamo

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \to (k\pi)^-} \sin t = \begin{cases} 0^+, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0^-, & \text{se } k \text{ pari} \end{cases} \tag{7.303}$$

Ne consegue

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^+} f(x) &= \begin{cases} \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}^-, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}^+, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \\ \lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^-} f(x) &= \begin{cases} \arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{2}^+, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2}^-, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \end{aligned} \tag{7.304}$$

k **pari**:

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^-} f(x) = \frac{\pi}{2}^-, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}^+ \tag{7.305}$$

k **dispari**:

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}^+, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{1}{k\pi}\right)^+} f(x) = \frac{\pi}{2}^- \tag{7.306}$$

Quindi i punti x_k sono di discontinuità di prima specie per f, con salto

$$s(x_k) = \begin{cases} \pi, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ -\pi, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases} \tag{7.307}$$

Definiamo

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in R \mid x_k = \frac{1}{k\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \\ &= \left\{ \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, ..., \pm\frac{1}{k\pi}, ... \right\} \end{aligned} \tag{7.308}$$

Cioè S è l'insieme dei punti di discontinuità della funzione. Dal momento che $x = 0$ è punto di accumulazione per S, si ha che in ogni intorno di $x = 0$ di ampiezza comunque piccola, cadono infiniti punti di S i.e. punti di discontinuità per f, come illustrato nel grafico di fig. 7.30.

Esercizio 317 *Dimostrare*

$$\lim_{x \to +\infty} \tanh\left(\sqrt[n]{1 + x + 3x^{n-1}} - x \right) = -1, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \tag{7.309}$$

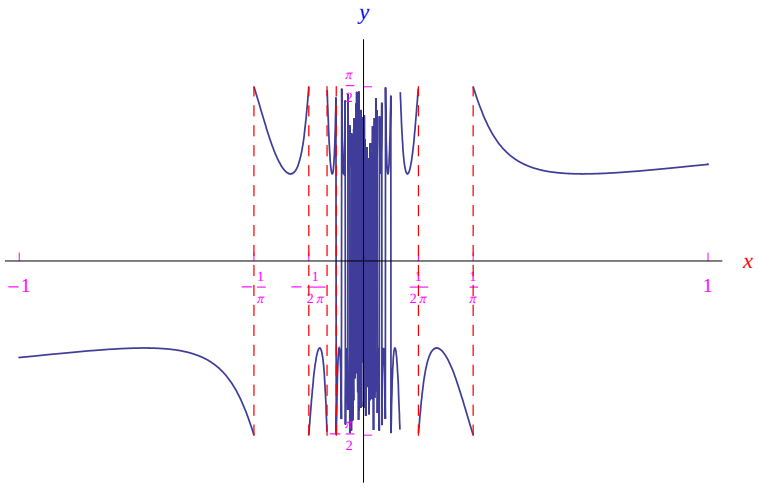


Figura 7.30: Grafico della funzione (7.297) nell'intervallo $[-1,1]$.

Soluzione
Procedendo per continuità

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh\left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}}-x\right) = \tanh \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}}-x\right), \tag{7.310}$$

onde calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}}-x\right) = \infty-\infty \tag{7.311}$$

Per risolvere l'indeterminazione non occorre calcolare il fattore razionalizzante. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}}-1\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{3}{x}}-1\right) \\ &= (+\infty)(0-1) = -\infty\end{aligned} \tag{7.312}$$

Ne concludiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh\left(\sqrt[n]{1+x+3x^{n-1}}-x\right) = \tanh(-\infty) = -1 \tag{7.313}$$

Esercizio 318 *Dimostrare che la funzione*

$$f(x) = sett\sinh\ln\left|\frac{1-x^n}{1+x^n}\right|, \qquad \forall n\in\mathbb{N}-\{0\}, \tag{7.314}$$

è infinitesima per $x\to\pm\infty$.

Soluzione
Si tratta di eseguire l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = sett\sinh\ln\left(\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{1-x^n}{1+x^n}\right|\right), \tag{7.315}$$

per cui calcoliamo a parte il limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{1-x^n}{1+x^n}\right| = \lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1}\right| = |-1| = 1 \tag{7.316}$$

Segue

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = sett\sinh\ln 1 = sett\sinh 0 = 0 \tag{7.317}$$

Esercizio 319 *Determinare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{x^2-1}{4-x} \tag{7.318}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
La funzione è definita in

$$X = \mathbb{R} - \{4\} \tag{7.319}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi,\\ \lim_{x\to 4^+} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Ne consegue che $x = 4$ è un punto di discontinuità di prima specie. Calcoliamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{4-x}$$

Ma

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{4-x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{4}{x}-1} = \begin{cases}\frac{(+\infty)}{-1} = -\infty, & x\to+\infty\\ \frac{(-\infty)}{-1} = +\infty, & x\to-\infty\end{cases} \tag{7.320}$$

Segue

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \frac{\pi}{4} + \begin{cases}\arctan(-\infty), & x\to+\infty\\ \arctan(+\infty), & x\to-\infty\end{cases} \\ &= \frac{\pi}{4} + \begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & x\to+\infty\\ +\frac{\pi}{2}, & x\to-\infty\end{cases}\\ &= \begin{cases}-\frac{\pi}{4}, & x\to+\infty\\ \frac{3\pi}{4}, & x\to-\infty\end{cases}\end{aligned} \tag{7.321}$$

Cioè le rette orizzontali

$$y = -\frac{\pi}{4}, \quad y = \frac{3\pi}{4}$$

sono rispettivamente asintoti orizzontali a destra e a sinistra per il diagramma cartesiano della funzione riportato in fig. 7.31

Esercizio 320 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} - \sqrt{2}x \tag{7.322}$$

agli estremi del suo campo di esistenza

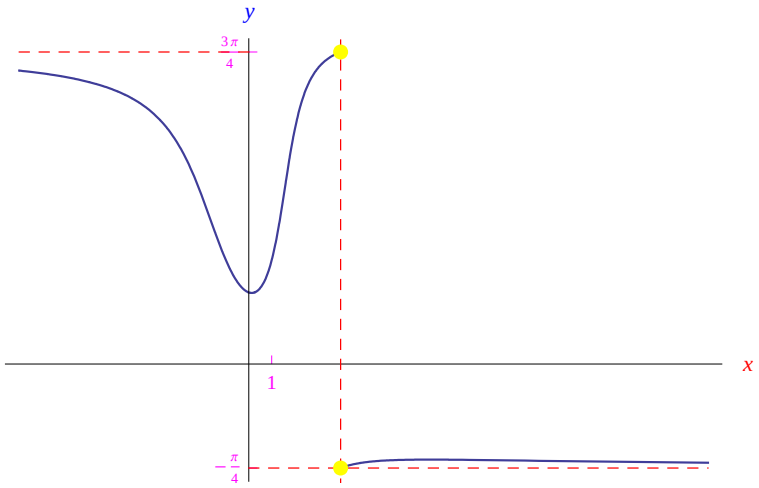


Figura 7.31: Grafico della funzione (7.318)

Soluzione
Per determinare il campo di esistenza, occorre risolvere la disequazione:

$$\frac{2x-1}{x+1} \geq 0, \tag{7.323}$$

ed è facile convincersi che risulta

$$X = (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \tag{7.324}$$

Quindi calcoliamo

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = (-1) \cdot (+\infty) + \sqrt{2} = -\infty \tag{7.325}$$

Cioè la retta $x + 1 = 0$ è asintoto verticale a sinistra per il diagramma cartesiano della funzione. Passiamo al comportamento all'infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= (+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= (-\infty) - (-\infty) = \infty - \infty \end{aligned} \tag{7.326}$$

Siamo dunque pervenuti alla forma indeterminata $\infty - \infty$. Scriviamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} - \sqrt{2}x\right)\left(x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2}x\right)}{x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2}x} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\frac{2x-1}{x+1} - 2x^2}{x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2}x} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(2x-1) - 2x^2(x+1)}{(x+1)\left(x\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2}x\right)} \\
&= -3\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + \sqrt{2}\right)} \\
&= -3\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + \sqrt{2}\right)} \\
&= -3\cdot\frac{1}{(1+0)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}
\end{aligned} \tag{7.327}$$

Ne consegue che la retta

$$4y + 3\sqrt{2} = 0 \tag{7.328}$$

è asintoto orizzontale per il diagramma della funzione.

Esercizio 321 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x \tag{7.329}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
Dal momento che

$$x^2 + x + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

si ha che la funzione è definita in $(-\infty, +\infty)$. Il limite per $x \to -\infty$ è immediato

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = (+\infty) - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \tag{7.330}$$

cioè la funzione diverge positivamente per $x \to -\infty$. Passiamo al limite per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - x\right) = (+\infty) - (+\infty) = \infty - \infty \tag{7.331}$$

Per risolvere tale forma indeterminata, riscriviamo la funzione

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\ &= \frac{x\left(\frac{1}{x}+1\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} \\ &= sgn(x)\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+sgn(x)}, \end{aligned} \tag{7.332}$$

dove $sgn(x)$ è la funzione signum. Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\left[sgn(x)\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+sgn(x)}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} sgn(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+sgn(x)} \end{aligned}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} sgn(x) = +1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+sgn(x)} = \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}, \tag{7.333}$$

onde

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2} \tag{7.334}$$

Cioè per $x\to+\infty$ la funzione è convergente e il limite vale $1/2$. Geometricamente, significa che la retta $2y-1=0$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico della funzione.

Esercizio 322 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \frac{x\left(e^{1/x}-1\right)}{e^{-x}\cosh x} \tag{7.335}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione
La funzione è definita in $X=\mathbb{R}-\{0\}$, ed è istruttivo studiarne il segno.

$$f(x)>0 \Longleftrightarrow x\left(e^{1/x}-1\right)>0 \Longleftrightarrow x\neq 0,$$

onde la funzione è positiva in X. Studiamo il comportamento in un intorno del punto di accumulazione $x=0$. Precisamente:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{(0^+)\left(e^{+\infty}-1\right)}{1} = \frac{0\cdot\infty}{1} \tag{7.336}$$

L'indeterminazione è prodotta dal numeratore, per cui calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} - \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x}_{=0},$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

giacché e^t è, per $t \to +\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Segue

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(e^{1/x}-1\right) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \tag{7.337}$$

Ne consegue che l'asse y è asintoto verticale a destra per il grafico della funzione.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{0\left(e^{-\infty}-1\right)}{1} = \frac{0\,(0-1)}{1} = 0 \tag{7.338}$$

Dal momento che la funzione è positiva nel suo insieme di definizione, deve essere:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+ \tag{7.339}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{(+\infty)\left(e^{0^+}-1\right)}{0\cdot\infty} = \frac{0\cdot\infty}{0\cdot\infty}$$

Cioè troviamo la forma indeterminata $0\cdot\infty$ sia a numeratore che a denominatore. Consideriamo l'espansione del coseno iperbolico in esponenziali, secondo la consueta definizione di $\cosh x$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Segue

$$f(x) = \frac{2x\left(e^{1/x}-1\right)}{1+e^{-2x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0\cdot\infty}{1} \tag{7.340}$$

Siamo pertanto riusciti a rimuovere l'indeterminazione a denominatore. Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t-1}{t} = \ln e = 1, \tag{7.341}$$

che è un caso particolare del limite fondamentale:

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^t-1}{t} = \ln a$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\frac{\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)}{1} = 2 \tag{7.342}$$

Da tale risultato emerge che la funzione è convergente per $x \to +\infty$ e il limite vale 2. In termini geometrici, ciò implica che la retta $y = 2$ è asintoto orizzontale a destra per il grafico della funzione. Ora calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{(-\infty)\left(e^{0^-}-1\right)}{0\cdot\infty} = \frac{0\cdot\infty}{0\cdot\infty},$$

cioè nuovamente la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ sia a numeratore che a denominatore. Utilizzando l'artificio precedente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(e^{1/x}-1\right)}{1+e^{-2x}} = \frac{\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+e^{-2x}\right)} \tag{7.343}$$

Il limite a denominatore è $+\infty$, mentre il limite a numeratore

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to0^-} \frac{e^t-1}{t} = \ln e = 1, \tag{7.344}$$

onde

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

ovvero la funzione è infinitesima per $x \to -\infty$.

Conclusione:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{1/x}-1\right)}{e^{-x}\cosh x} = 2 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(e^{1/x}-1\right)}{e^{-x}\cosh x} = 0$$

Il diagramma cartesiano della funzione riportato in fig. 7.32

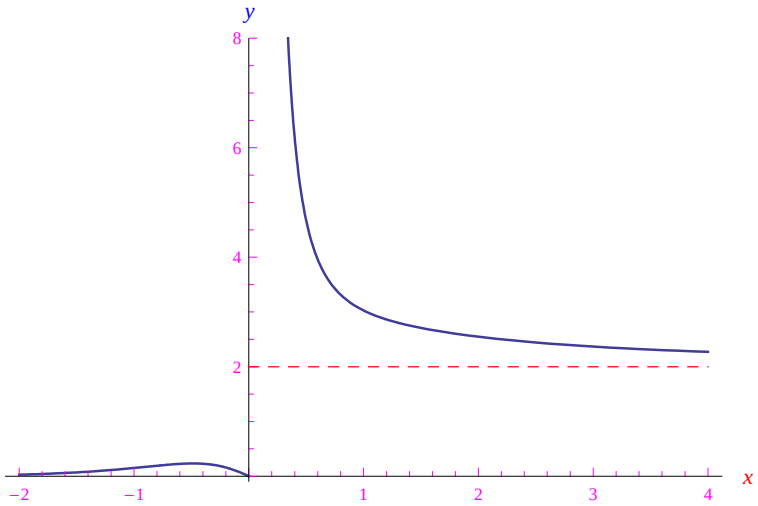


Figura 7.32: Grafico della funzione (7.335)

Esercizio 323 *Studiare il comportamento della funzione*

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\sinh\left(\frac{a}{x}\right)}, \quad (a>0) \tag{7.345}$$

agli estremi del suo campo di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in X tale che

$$\frac{1+x}{x} > 0, \tag{7.346}$$

cioè

$$X = (-\infty,-1) \cup (0,+\infty) \tag{7.347}$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{\ln(0^+)}{\sinh(-a)} = -\frac{-(\infty)}{\sinh(a)} = +\infty, \tag{7.348}$$

cosicché la funzione diverge positivamente per $x \to -1^-$. Conseguentemente, la retta $x + 1 = 0$ è asintoto verticale a destra per il grafico di f. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\ln(+\infty)}{\sinh(+\infty)} = \frac{\infty}{\infty} \tag{7.349}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t = \frac{1}{x}, \tag{7.350}$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} = \frac{\infty}{\infty} \tag{7.351}$$

Applichiamo la regola di De L'Hopital

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} \overset{\text{H}}{=} \frac{1}{a} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(t+1)\cosh(at)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+, \tag{7.352}$$

onde

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^+ \tag{7.353}$$

Cioè la funzione è infinitesima per $x \to 0^+$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} \tag{7.354}$$

Con il cambio di variabile precedente:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t+1)}{\sinh(at)} \\ &= \frac{1}{a} \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t+1)}{t} \cdot \lim_{t\to 0^+} \frac{at}{\sinh(at)} \end{aligned} \tag{7.355}$$

Abbiamo così fattorizzato il limite nel prodotto dei limiti fondamentali:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = \frac{1}{\ln e} = 1, \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{at}{\sinh(at)} = 1$$

Ne consegue

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{a} \tag{7.356}$$

Utilizzando il medesimo artificio

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{a}, \tag{7.357}$$

ovvero la retta $y = \frac{1}{a}$ è asintoto orizzontale per il grafico di f (fig. 7.33)

Esercizio 324 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \left(\tan\frac{2}{x} - \sin\frac{2}{x}\right) \tag{7.358}$$

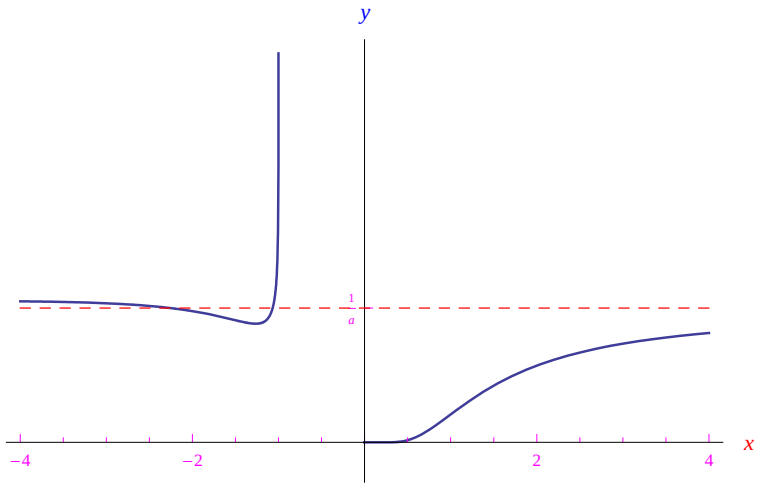


Figura 7.33: Diagramma cartesiano della funzione (7.345).

Soluzione

Osserviamo preliminarmente

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\tan\frac{2}{x}-\sin\frac{2}{x}\right)=\tan 0-\sin 0=0, \tag{7.359}$$

per cui

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^3\left(\tan\frac{2}{x}-\sin\frac{2}{x}\right)=0\cdot\infty \tag{7.360}$$

Eseguiamo il cambio di variabile

$$t=\frac{2}{x}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0,$$

onde

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}x^3\left(\tan\frac{2}{x}-\sin\frac{2}{x}\right)&=8\lim_{t\to0}\frac{\tan t-\sin t}{t^3}\\&=8\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sin t}{\cos t}-\sin t}{t^3}\\&=8\lim_{t\to0}\frac{\sin t-\sin t\cos t}{t^3\cos t}\\&=8\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{1}{\cos t}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}}_{=1/2}\\&=4\end{aligned}$$

Esercizio 325 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x+1}} \tag{7.361}$$

Soluzione

A "occhio" vediamo subito che numeratore e denominatore restituiscono la forma indeterminata $\infty-\infty$, per cui calcoliamo separatamente:

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}\right)\\\lambda_2&=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x+1}\right)\end{aligned} \tag{7.362}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}\right)}{\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{3x^2+x+1}\right)}{\sqrt{3x^2-x}+\sqrt{3x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x-1}{\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}} \\ &= -2\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{3-\frac{1}{x}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, & x\to+\infty \\ \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, & x\to-\infty \end{cases}\end{aligned} \tag{7.363}$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x+1}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+2x+1}} \\ &= -\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x\to+\infty \\ \frac{1}{2}, & x\to-\infty \end{cases}\end{aligned} \tag{7.364}$$

Ne concludiamo

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}, & x\to+\infty \\ \frac{2}{3}\sqrt{3}, & x\to-\infty \end{cases}, \tag{7.365}$$

ossia

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{3} \tag{7.366}$$

Esercizio 326 *Calcolare*

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{x-\sin x} \tag{7.367}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Scriviamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} \frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to0} \frac{\tan x\left(1-\frac{\sin x}{\tan x}\right)}{x-\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x\left(1-\sin x\cos x\right)}{\cos x\left(x-\sin x\right)} \\ &= \underbrace{\lim_{x\to0} \frac{1}{\cos x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin x\left(1-\sin x\cos x\right)}{x-\sin x}\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite, applicando due volte la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{x-\sin x}=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$$
$$\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{x}+4\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{-1+4}{2}=3$$

Ne concludiamo che il limite proposto vale 3.

Esercizio 327 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\left[ex-\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{1}{x}-1}\right)^x\right] \tag{7.368}$$

Soluzione
Calcoliamo separatamente

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{\frac{1}{x}-1}\right)^x=\left(\infty^0+\infty^0\right)^\infty=\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\frac{1}{x}}\left(1+x^{-1}\right)\right]^x$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{=e}=+\infty$$

Ne segue che il limite assegnato si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$. Scriviamo

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=0\cdot\infty$$

Riconduciamo alla forma indeterminata $0/0$ in modo da poter applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}=$$
$$\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]}{\frac{1}{x^2}}$$
$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}_{=e}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$$

Il secondo limite da luogo nuovamente alla forma indeterminata $0/0$, per cui riapplichiamo la predetta regola:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\frac{e}{2} \tag{7.369}$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 7.34

Esercizio 328 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$\lambda=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\frac{x}{2}}\right)^{\left[\frac{\tan\left(\frac{x}{2}-1\right)}{(x-2)^2}\right]} \tag{7.370}$$

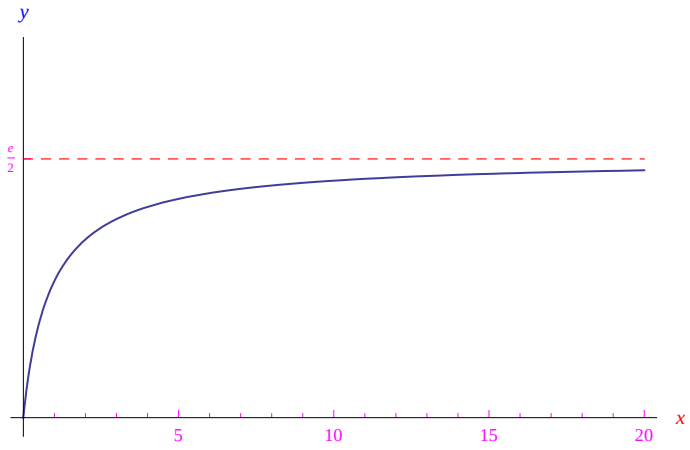


Figura 7.34: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = ex - \left(x^{\frac{1}{x}} + x^{\frac{1}{x}-1}\right)^x$.

Soluzione
Procedendo per sostituzione diretta

$$\lambda = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8\underbrace{\arctan 1}_{=\frac{\pi}{4}}}\right)^{\frac{0}{0}} = 1^{\frac{0}{0}}$$

per cui dobbiamo valutare

$$\lim_{x\to 2}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}-1\right)}{(x-2)^2} = \frac{0}{0} \underset{t=x-2}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\tan\frac{t}{2}}{t^2} = \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\tan\frac{t}{2}}{t}}_{1/2}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t} = \infty$$

Ne segue che il limite proposto si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Scriviamo

$$\lambda = \lim_{x\to 2}\exp\left[\frac{\tan\left(\frac{x}{2}-1\right)}{(x-2)^2}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\frac{x}{2}}\right)\right]$$

Procediamo allora al calcolo del limite

$$\lambda_1 = \lim_{x\to 2}\frac{\tan\left(\frac{x}{2}-1\right)}{(x-2)^2}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\frac{x}{2}}\right)$$

Eseguendo il cambio di variabile $t = x-2$

$$\lambda_1 = \lim_{t\to 0}\frac{\tan\frac{t}{2}}{t^2}\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\left(\frac{t}{2}+1\right)}\right] = \underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\tan\frac{t}{2}}{t}}_{=1/2}\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\left(\frac{t}{2}+1\right)}\right]}{t}}_{\overset{def}{=}\lambda_2}$$

Ne segue

$$\lambda_2 = \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\left(\frac{t}{2}+1\right)}\right]}{t} = \frac{0}{0}$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lambda_2 \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\left(\frac{t}{2}+1\right)}} \cdot \left\{ 0 - \frac{\pi}{8\left(\arctan^2\left(\frac{t}{2}+1\right)\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}+1\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \right\}$$
$$= -\frac{\pi}{16} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{\arctan^2\left(\frac{t}{2}+1\right)\left[1+\left(\frac{t}{2}+1\right)^2\right]} = -\frac{1}{2\pi}$$

Quindi

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 = -\frac{1}{4\pi}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8\arctan\frac{x}{2}}\right)^{\left[\frac{\tan\left(\frac{x}{2}-1\right)}{(x-2)^2}\right]} = e^{-\frac{1}{4\pi}}$$

Esercizio 329 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{2}{3\tan x}} \tag{7.371}$$

Soluzione
La sostituzione diretta riproduce indeterminazione:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{2}{3\tan x}} = \left(\frac{1+0}{1-0}\right)^{\frac{2}{3\cdot 0}} = 1^{\infty}$$

Scriviamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{2}{3\tan x}} &= \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{2}{3\tan x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)\right] \\ &= \exp\left[\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)\right] \\ &= \exp\left(\frac{2}{3}\lambda_1\right)\end{aligned}$$

per cui calcoliamo a parte il limite che compare come argomento dell'esponenziale:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\tan x}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)\right] \underset{t=\tan x}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right] = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} - \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{t}\end{aligned}$$

Nell'ultimo membro il primo termine è il limite fondamentale:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

e lo è anche il secondo:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t'=-t}{=} \lim_{t'\to 0}\frac{\ln(1+t')}{-t'} = -\lim_{t'\to 0}\frac{\ln(1+t')}{t'} = -1 \Bigg) \Longrightarrow \lambda_1 = 2$$

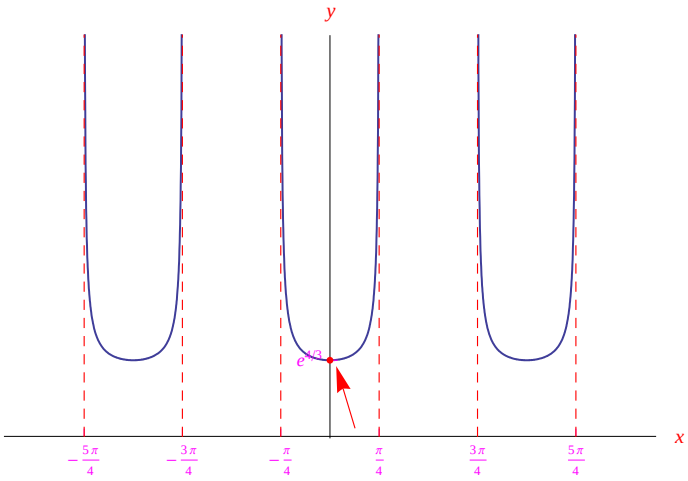


Figura 7.35: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{2}{3\tan x}}$.

Ne concludiamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{2}{3\tan x}} = e^{4/3} \tag{7.372}$$

Il grafico della funzione è riportato in fig. 7.35

Esercizio 330 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\tanh^2 x}\right) \tag{7.373}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$, per cui scriviamo:

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\frac{\tanh^2 x - \tan^2 x}{\tan^2 x \tanh^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{\tan^2 x}{\tanh^2 x}}{\tan^2 x}$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\tanh^2 x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{\tanh x}{x}}\right)^2 = 1,$$

per cui abbiamo la forma indeterminata $0/0$, e subito dopo applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\left(\frac{\tan x}{\tanh x}\right)^2}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\frac{\tan x}{\tanh x}\right)\left(1+\frac{\tan x}{\tanh x}\right)}{\tan^2 x} \\
&= \underbrace{\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x}{\tanh x}\right)}_{=2} \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\tan x}{\tanh x}}{\tan^2 x} = 2\lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\tan x}{\tanh x}}{\tan^2 x} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x - \tan x}{\tanh x \tan^2 x} \overset{\text{H}}{=} 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cosh^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cosh^2 x}\tan^2 x + \tanh x \cdot 2\tan x \frac{1}{\cos^2 x}} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \cosh^2 x}{\sin^2 x + \sinh(2x)\tan x} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \sinh(2x)}{\sin 2x + 2\cosh(2x)\tan x + \frac{\sinh(2x)}{\cos^2 x}} \\
&= -2\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos^2 x}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \sinh(2x)}{\sin 2x\cos^2 x + 2\cosh(2x)\tan x\cos^2 x + \sinh(2x)} \\
&= -2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + \sinh(2x)}{\sin 2x\cos^2 x + 2\cosh(2x)\tan x\cos^2 x + \sinh(2x)}
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
\sin 2x, \tan x, \sinh 2x &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2x \\
\cos x, \cosh(2x) &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

onde

$$\lambda = -2\lim_{x\to 0} \frac{2x+2x}{2x+2x+2x} = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 331 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(x^2-4\right)^2} \tag{7.374}$$

Soluzione
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{\cos^2\frac{\pi}{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

Espandendo il denominatore

$$\lambda = \lim_{x\to 2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{(x-2)^2(x+2)^2} = \underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)^2}}_{\frac{1}{16}} \cdot \lim_{x\to 2}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x-2}\right]^2$$

Ponendo $t = x-2$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{16}\lim_{t\to 0}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi t}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}{t}\right]^2 = \frac{1}{16}\lim_{t\to 0}\left[\frac{-\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}{t}\right]^2 = \frac{1}{16}\frac{\pi^2}{16}\underbrace{\lim_{t\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}{\frac{\pi t}{4}}\right]^2}_{=1} \\
&= \left(\frac{\pi}{16}\right)^2
\end{aligned}$$

Per completezza riportiamo il grafico della funzione in fig. 7.36

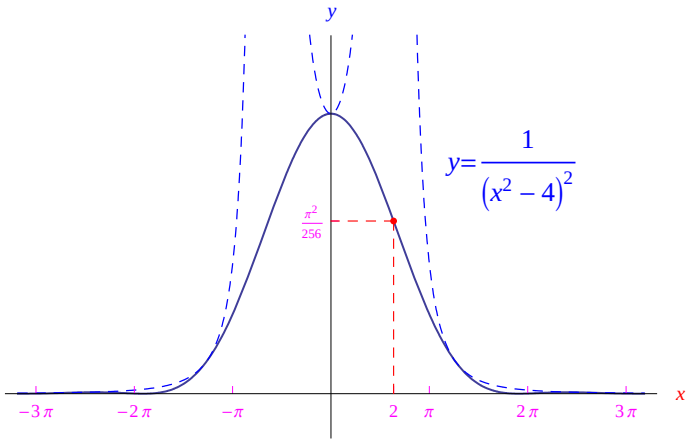


Figura 7.36: Diagramma cartesiano della funzione $f(x)=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{(x^2-4)^2}$.

Esercizio 332 *(Tratto da [3]. La soluzione è nostra)*
Calcolare

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+\sin 2x)^{\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}} \tag{7.375}$$

Soluzione

Procedendo per sostituzione diretta ci accorgiamo che siamo in presenza della forma indeterminata 1^{∞}, per cui scriviamo:

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln(\sin x+\sin 2x)\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}}=e^{\lambda_1}$$

avendo definito:

$$\lambda_1=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x+\sin 2x)}{\sqrt{1+\cos 2x}}=\frac{0}{0}$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\lambda_1=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x+2\cos 2x)\sqrt{1+\cos 2x}}{\sin 2x\,(\sin x+\sin 2x)}=-\sqrt{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos x|\,(\cos x+2\cos 2x)}{\sin 2x\,(\sin x+\sin 2x)}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=\frac{\pi}{2}-x$

$$\lambda_1=-\sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{|\sin t|\,(\sin t-2\cos 2t)}{\sin 2t\,(\cos t+\sin 2t)}=-\sqrt{2}\lim_{t\to 0}\frac{|\sin t|}{\sin 2t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-2\cos 2t}{\cos t+\sin 2t}$$

in cui

$$\lim_{t\to 0}\frac{|\sin t|}{\sin 2t}=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{per } t\to 0^+\\ -\frac{1}{2} & \text{per } t\to 0^-\end{cases},\quad \lim_{t\to 0}\frac{\sin t-2\cos 2t}{\cos t+\sin 2t}=-2 \tag{7.376}$$

Ne segue

$$\lambda_1=\begin{cases}\sqrt{2} & \text{per } t\to 0^+\\ -\sqrt{2} & \text{per } t\to 0^-\end{cases}\Longrightarrow\lambda_1=\begin{cases}\sqrt{2} & \text{per } x\to\frac{\pi}{2}^-\\ -\sqrt{2} & \text{per } x\to\frac{\pi}{2}^+\end{cases}$$

$$\lambda=\begin{cases}e^{\sqrt{2}} & \text{per } x\to\frac{\pi}{2}^-\\ e^{-\sqrt{2}} & \text{per } x\to\frac{\pi}{2}^+\end{cases} \tag{7.377}$$

Esercizio 333 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} \tag{7.378}$$

Soluzione

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = 1^{\infty} \tag{7.379}$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}} \tag{7.380}$$

Calcoliamo a parte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} \tag{7.381}$$

Si tratta di limiti fondamentali

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{7.382}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^1 = e \tag{7.383}$$

***

Sul gruppo facebook di matematica relativo a questo blog , un utente ha proposto il calcolo del seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\sqrt{x^2+3x+3}-x-1\right)+x\ln 2\right],$$

manifestamente equivalente a

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left[2\left(\sqrt{x^2+3x+3}-x-1\right)\right]$$

Dopo aver mostrato che l'argomento del logaritmo converge a 1, si ha che tale limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$. Riconducendo tale forma alla $0/0$ e applicando la regola di De L'Hospital , il limite non viene calcolato in quanto si ripresenta la $0\cdot\infty$. Un altro utente ha risolto applicando l'analisi matematica non standard . Dal momento che non conosco tale paradigma di calcolo, cercherò di applicare una qualche manipolazione in modo da rimuovere l'indeterminazione.

In realtà tale limite appartiene a una classe di limiti derivanti da

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x)^{f_1(x)},$$

dove

1. $f_1(x)$ diverge positivamente per $x\to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = +\infty \tag{7.384}$$

2. $f_2(x)$ converge a 1 per $x\to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x) = 1 \tag{7.385}$$

Abbiamo quindi la forma indeterminata:

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x)^{f_1(x)} = 1^{\infty}$$

che viene ricondotta alla $0\cdot\infty$ scrivendo:

$$\lim_{x\to x_0} f_2(x)^{f_1(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{\ln f_2(x)^{f_1(x)}} = e^{\lim_{x\to x_0} f_1(x)\ln f_2(x)},$$

dove

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)\ln f_2(x) = 0\cdot\infty \tag{7.386}$$

L'approccio usuale consiste nel convertire tale forma indeterminata nell'altra forma $0/0$ per poi applicare la regola di De L'Hospital. Precisamente:

$$\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\ln f_2(x)}{[f_1(x)]^{-1}} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} -\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}}{[f_1(x)]^{-2} f_1'(x)}$$

Cioè

$$\lambda = -\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}\cdot\frac{[f_1(x)]^2}{f_1'(x)}\right\} \tag{7.387}$$

Riscriviamo

$$\lambda = -\underbrace{\left[\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f_2(x)}\right]}_{=1}\cdot\left\{\lim_{x\to x_0}\frac{[f_1(x)]^2 f_2'(x)}{f_1'(x)}\right\} \tag{7.388}$$

Tale procedimento non è rigoroso, poiché il teorema secondo cui il limite del prodotto di due funzioni è il prodotto dei limiti, può essere applicato se il prodotto è regolare in x_0, cioè se è ivi dotato di limite. Tuttavia, proviamo ugualmente:

$$\lambda = -\lim_{x\to x_0}\frac{[f_1(x)]^2 f_2'(x)}{f_1'(x)} \tag{7.389}$$

Se

$$\lim_{x\to x_0} f_2'(x) = +\infty,$$

il limite λ si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ che può essere forzata con la regola di De L'Hospital. Ma il caso interessante è $x_0 = +\infty$:

$$\lambda = -\lim_{x\to+\infty}\frac{[f_1(x)]^2 f_2'(x)}{f_1'(x)}, \tag{7.390}$$

Evidentemente

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f_2^{(n)}(x) = 0, \qquad \forall n\in\{1,2,...\} \tag{7.391}$$

Ne consegue che il numeratore a secondo membro della (7.390) si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f_1(x)]^2 f_2'(x) = 0\cdot\infty$$

Forziamo con De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[f_1(x)]^2}{[f_2'(x)]^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{H}}{=} -2\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x) f_1'(x)[f_2'(x)]^2}{f_2''(x)}$$

Ma

$$f_1'(x)\left[f_2'(x)\right]^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\cdot\infty,$$

e così via se applichiamo nuovamente la predetta regola. Ne consegue che per il limite proposto, la regola di De L'Hospital fallisce. Bisogna, quindi, seguire altre strade che dipendono ovviamente dalle funzioni. Ad esempio:

$$f_1(x)=e^x,\quad f_2(x)=\frac{x-1}{x+1},$$

per cui:

$$\lambda=-\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}\cdot\frac{\left[f_1(x)\right]^2}{f_1'(x)}\right\}=-\lim_{x\to+\infty}\left[2e^x\cdot\frac{1}{x-1}\right]=0\cdot\infty,$$

che si risolve banalmente per confronto tra infiniti:

$$\lambda=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=-2\cdot(+\infty)=-\infty \tag{7.392}$$

Consideriamo ora il caso proposto in precedenza:

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=2\left(\sqrt{x^2+3x+3}-x-1\right) \tag{7.393}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $x=\frac{1}{t}$

$$f_1\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t}, \tag{7.394}$$

e

$$\begin{aligned}f_2\left(\frac{1}{t}\right)&=2\left(\frac{1}{|t|}\sqrt{3t^2+3t+1}-1-t\right)\\&\underset{t>0}{=}2\frac{\sqrt{3t^2+3t+1}-1-t}{t}\end{aligned}$$

Quindi

$$\lambda=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\ln\left(2\frac{\sqrt{3t^2+3t+1}-1-t}{t}\right) \tag{7.395}$$

Poniamo

$$g(t)\overset{def}{=}\ln\left(2\frac{\sqrt{3t^2+3t+1}-1-t}{t}\right),$$

osservando che l'argomento del logaritmo ha una discontinuità eliminabile in $t=0$, giacchè

$$\lim_{t\to0^+}\left(2\frac{\sqrt{3t^2+3t+1}-1-t}{t}\right)=1,$$

possiamo prolungare per continuità la funzione $g(t)$:

$$g(0)=0 \tag{7.396}$$

A questo punto possiamo sviluppare $g(t)$ in serie di Mac Laurin troncata a un ordine opportuno:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

Calcolando le derivate:

$$g(t) = \frac{3}{4}t - \frac{45}{32}t^2 + O\left(t^3\right) \tag{7.397}$$

Segue, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo:

$$\lambda = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{3}{4}t - \frac{45}{32}t^2 + O\left(t^3\right)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{3}{4}t}{t} = \frac{3}{4} \tag{7.398}$$

Concludiamo riportando il grafico della funzione in fig. 7.37

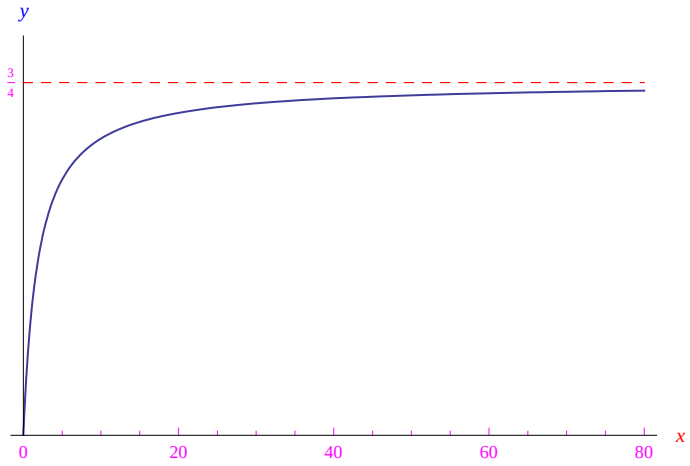


Figura 7.37: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = x \ln\left[2\left(\sqrt{x^2+3x+3} - x - 1\right)\right]$.

In realtà, il procedimento appena visto equivale ad applicare la regola di De L'Hospital dopo aver eseguito la sostituzione $x = 1/t$. Per mostrare ciò riferiamoci al seguente caso:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} x \ln f_2(x), \tag{7.399}$$

con la solita ipotesi

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 1 \tag{7.400}$$

Se poniamo

$$g(t) = \ln f_2\left(\frac{1}{t}\right),$$

si ha

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$$

e quindi

$$\lambda = \lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0^+} g'(t) \tag{7.401}$$

Il caso che stavamo considerando è

$$f_2(x) = 2\left(\sqrt{x^2+3x+3} - x - 1\right),$$

onde

$$g(t) = \ln\left(2\frac{\sqrt{3t^2+3t+1}-1-t}{t}\right)$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2\frac{\sqrt{1+3t+t^2}-t-1}{t}}\cdot \\ &\quad \cdot 2\cdot\frac{\left(\frac{6t+3}{2\sqrt{1+3t+t^2}}-1\right)t-\sqrt{1+3t+t^2}+1+t}{t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+3t+t^2}-t-1}\cdot \\ &\quad \cdot\frac{6t^2+3t-2\left(3t^2+t+1\right)+2\sqrt{1+3t+t^2}}{2t\sqrt{1+3t+t^2}} \end{aligned}$$

Semplificando

$$g'(t) = \frac{2\sqrt{1+3t+t^2}-3t-2}{2t\sqrt{1+3t+t^2}\left(\sqrt{1+3t+t^2}-t-1\right)} \tag{7.402}$$

Eseguiamo l'operazione di passaggio al limite:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} g'(t) &= \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{1+3t+t^2}}\right)}_{=1}\cdot \lim_{t\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+3t+t^2}-3t-2}{2t\left(\sqrt{1+3t+t^2}-t-1\right)} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{2\sqrt{1+3t+t^2}-3t-2}{2t\left(\sqrt{1+3t+t^2}-t-1\right)}, \end{aligned}$$

che si presenta nella forma indeterminata. Anziché applicare De L'Hospital, eseguiamo le seguenti manipolazioni:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} g'(t) &= \lim_{t\to 0^+}\{\frac{2\sqrt{1+3t+t^2}-\sqrt{(3t+2)^2}}{2t[\sqrt{1+3t+t^2}-\sqrt{(t+1)^2}]} \\ &\quad \cdot\frac{2\sqrt{1+3t+t^2}+\sqrt{(3t+2)^2}}{2\sqrt{1+3t+t^2}+\sqrt{(3t+2)^2}} \\ &\quad \cdot\frac{\sqrt{1+3t+t^2}+\sqrt{(t+1)^2}}{\sqrt{1+3t+t^2}+\sqrt{(t+1)^2}}\} \\ &= \lim_{t\to 0^+}[\frac{4+12t+12t^2-9t^2-12t-4}{2t\left(1+3t+3t^2-t^2-2t-1\right)}\cdot \\ &\quad \cdot\frac{\sqrt{1+3t+t^2}+t+1}{2\sqrt{1+3t+t^2}+3t+2}] \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{3}{2\left(2t+1\right)}\frac{\sqrt{1+3t+t^2}+t+1}{2\sqrt{1+3t+t^2}+3t+2}\right] \\ &= \frac{3}{2\left(0+1\right)}\cdot\frac{2}{2\cdot 1+0+2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Cioè

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln 2\left(\sqrt{x^2+3x+3}-x-1\right)=\frac{3}{4}$$

Esercizio 334 *Calcolare*

$$\boxed{\lambda=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^{\tanh x}-1}{\sinh x}\cdot\cosh x\right)} \tag{7.403}$$

Soluzione

Il limite proposto si presenta nella forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^{\tanh x}-1}{\sinh x}\cdot\cosh x\right)=\frac{1-1}{0}\cdot 1=\frac{0}{0}$$

Ponendo $t=\tanh x$

$$\lambda=\lim_{t\to 0}\frac{3^t-1}{t}=\ln 3$$

Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.38.

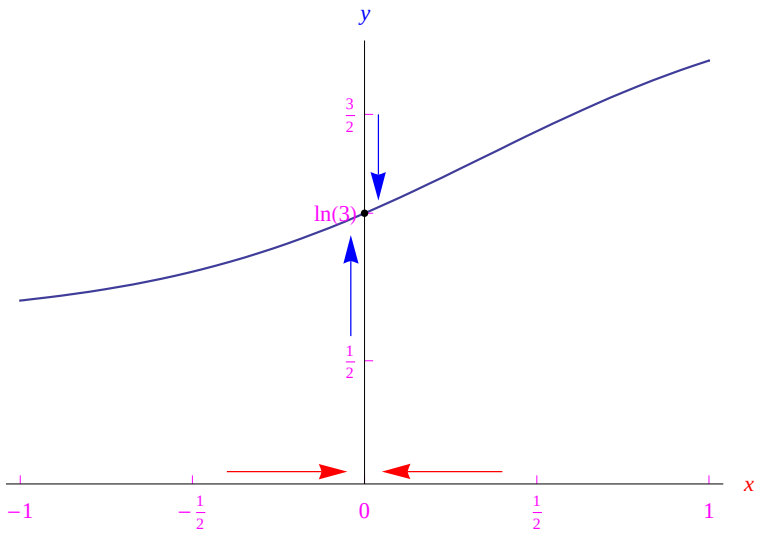


Figura 7.38: Esercizio 334.

Esercizio 335 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{2^{\sin^2 x+\sin x}-1}{1+\sin x-\cos^2 x}$$

Soluzione

Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{2^{\sin^2 x+\sin x}-1}{1+\sin x-\cos^2 x}=\frac{2^{1-1}-1}{1+0-1}=\frac{0}{0}$$

Ponendo $t=\frac{3\pi}{2}$

$$\sin x=\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos t,\quad \cos x=\cos\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin t$$

Segue

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{2^{\cos^2 t - \cos t} - 1}{1 - \cos t - \sin^2 t} = \lim_{t\to 0} \frac{2^{\cos^2 t - \cos t} - 1}{\cos^2 t - \cos t}$$

Poniamo

$$\xi = \cos^2 t - \cos t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

per cui

$$\lambda = \lim_{\xi\to 0} \frac{2^{\xi} - 1}{\xi} = \ln 2$$

Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.39.

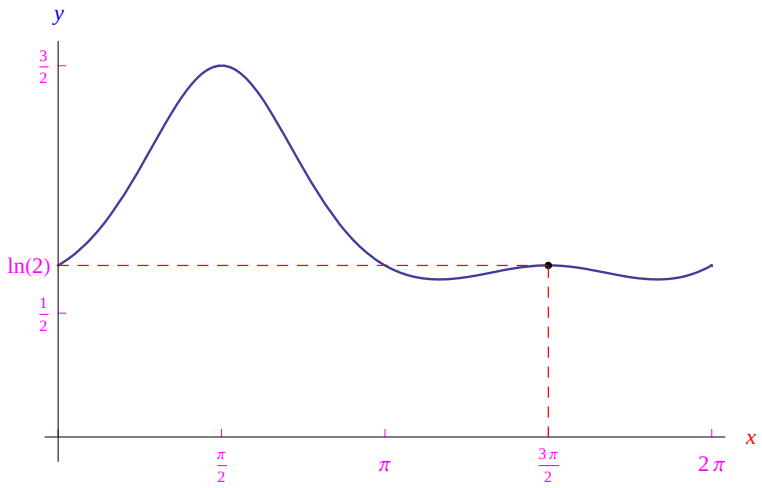


Figura 7.39: Esercizio 335.

Esercizio 336 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \left(\cos^2 x\right)^{-\cot^2 x}$$

Soluzione

La funzione si presenta nella forma indeterminata 1^{∞}. Scriviamo

$$\lambda = \lim_{x\to 0} \left(1 - \sin^2 x\right)^{-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 - \sin^2 x\right)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]^{\cos^2 x}$$
$$= \left[\lim_{x\to 0} \left(1 - \sin^2 x\right)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]^{\lim_{x\to 0} \cos^2 x}$$

Calcoliamo a parte i limiti, iniziando da quello più immediato:

$$\lim_{x\to 0} \cos^2 x = 1$$

Per il limite più difficile eseguiamo il cambio di variabile

$$\xi = -\sin^2 x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

per cui otteniamo il limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \left(1 - \sin^2 x\right)^{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{\xi\to 0} (1 + \xi)^{\frac{1}{\xi}} = e$$

Conclusione

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos^2 x\right)^{-\cot^2 x} = e$$

Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.40.

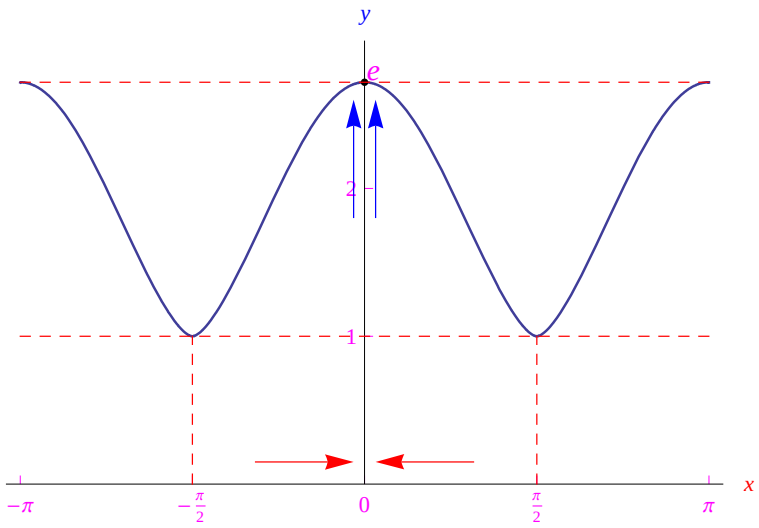


Figura 7.40: Esercizio 336.

Esercizio 337 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}}$$

Soluzione

La funzione si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Scriviamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x + x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}}$$

Poniamo

$$t = \frac{x}{\cos x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Segue

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x}{\cos x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.41.

Esercizio 338 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3 - x - 2}{x^3 - 1}\right)^{\frac{x^3-1}{x+1}}$$

Soluzione

La funzione si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Scriviamo

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^3 - 1} = 1 - \frac{x+1}{x^3 - 1}$$

Segue

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3 - x - 2}{x^3 - 1}\right)^{\frac{x^3-1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{x+1}{x^3 - 1}\right)^{\frac{x^3-1}{x+1}}$$

Poniamo

$$t = -\frac{x+1}{x^3 - 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

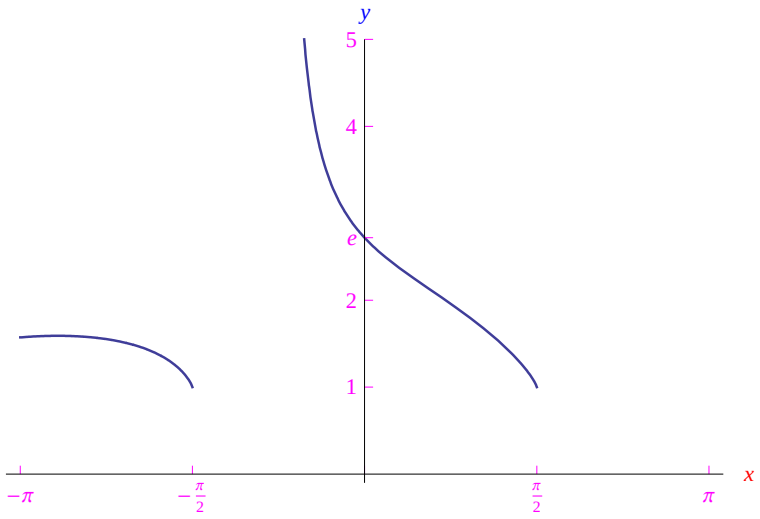


Figura 7.41: Esercizio 337.

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x+1}{x^3-1}\right)^{\frac{x^3-1}{x+1}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}} = \left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1} = \frac{1}{e}$$

Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.42.

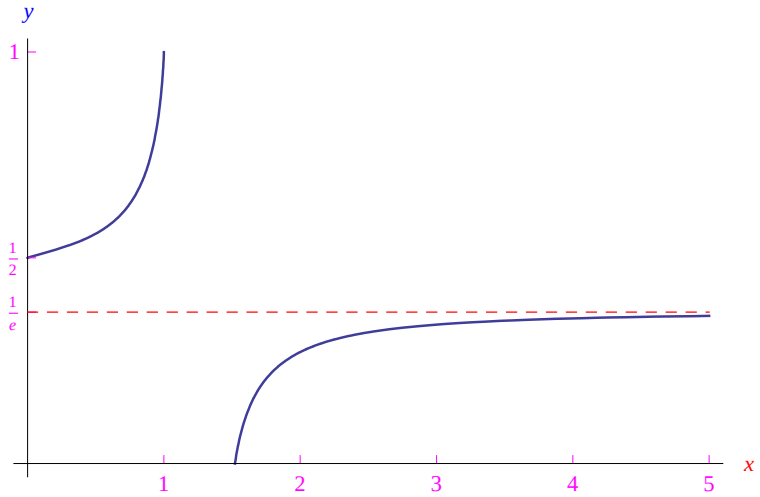


Figura 7.42: Esercizio 338.

Esercizio 339 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3 - x\sin x}{3x^3+2} \tag{7.404}$$

Soluzione

Abbiamo già calcolato questo limite nell'esercizio 283; tuttavia vale la pena esplorare un procedimento diverso. Abbiamo[7]

$$\lambda = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{3x^3+2}}_{=1} - \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{3x^3+2}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite, osservando che

$$\left|\frac{x\sin x}{3x^3+2}\right| = \left|\frac{x}{3x^3+2}\right| \cdot \underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} \leq \left|\frac{x}{3x^3+2}\right|$$

$$\Longrightarrow -\frac{x}{3x^3+2} \leq \frac{x\sin x}{3x^3+2} \leq \frac{x}{3x^3+2}$$

dove

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\pm\frac{x}{3x^3+2}\right) = 0,$$

onde per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{3x^3+2} = 0$$

Ne concludiamo che il limite assegnato vale 1. Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.43.

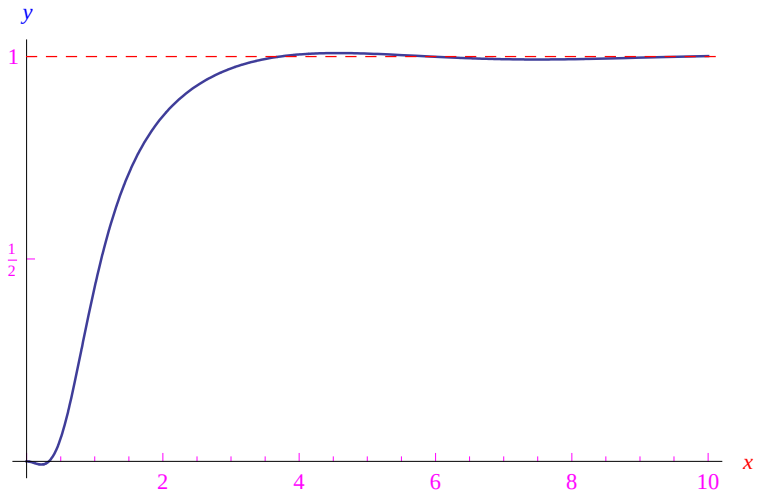


Figura 7.43: Esercizio 339.

Esercizio 340 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[x]{a}-1}{\sin\frac{1}{x}}, \qquad (a>0,\ \ a\neq 1) \tag{7.405}$$

Soluzione

Scriviamo

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\sin\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 1/x$:

$$\lambda = \lim_{t\to0^+}\frac{a^t-1}{\sin t} = \lim_{t\to0^+}\frac{\frac{a^t-1}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim_{t\to0^+}\frac{a^t-1}{t}}{\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a,$$

avendo utilizzato i limiti notevoli:

$$\lim_{t\to0}\frac{a^t-1}{t} = \ln a, \quad \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1$$

Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.44.

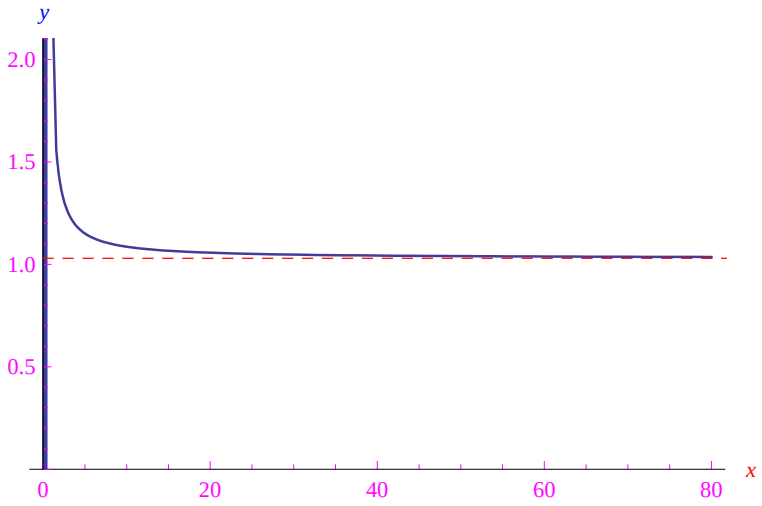


Figura 7.44: Esercizio 340, con $a = 2.8$.

Esercizio 341 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to 0^+} \frac{(ax)^x - x^x}{x}, \qquad (a > 0, \;\; a \neq 1) \tag{7.406}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata 0/0. Cerchiamo di ricondurre il limite proposto al limite fondamentale

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(ax)^x - x^x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a^x x^x - x^x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(x^x \frac{a^x - 1}{x} \right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} x^x \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{a^x - 1}{x}}_{=\ln a}$$

Calcoliamo a parte l'altro limite che si presenta nella forma indeterminata 0^0. Scriviamo

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x\to 0} x \ln x}$$

Il limite che compare nell'esponente dà luogo alla forma indeterminata $0\cdot\infty$ che può essere ricondotta alla forma $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty},$$

dopodiché possiamo applicare la regola di De L'Hospital, oppure eseguire un confronto tra infiniti. In quest'ultimo caso conviene porre $t = 1/x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t^{-1}}{t} = -\lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0,$$

poichè per $t \to +\infty$ il logaritmo è un infinito di ordine infinitamente piccolo (rispetto all'infinito di riferimento t). Segue

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(ax)^x - x^x}{x} = \ln a$$

Per una illustrazione grafica, vedi fig. 7.45.

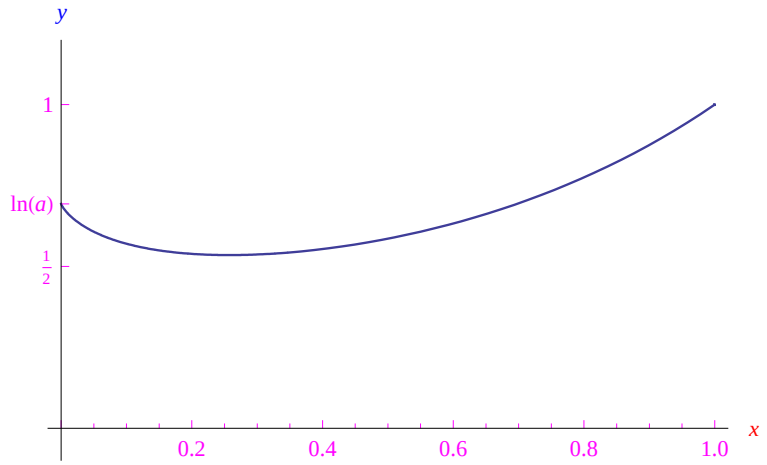


Figura 7.45: Esercizio 341, con $a = 2$.

Esercizio 342 *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x \sin \frac{1}{x}} - 1}{x \sin \frac{1}{x}} \tag{7.407}$$

Soluzione
Come è noto:

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

per cui il limite proposto restituisce la forma indeterminata $0/0$. Ponendo $t = x \sin \frac{1}{x}$ il limite diventa

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1,$$

come illustrato in fig. 7.46.

Esercizio 343 *Calcolare*

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[x]{a} - 1\right) \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) x^3, \qquad (a > 0,\ a \neq 1) \tag{7.408}$$

Soluzione
Qui abbiamo la forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Infatti:

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(a^{1/x} - 1\right) \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) x^3 = (1-1)(1-1) \cdot (+\infty) = 0 \cdot \infty$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t = 1/x$

$$\lambda = \underbrace{\lim_{t\to 0^+} \frac{a^t - 1}{t}}_{=\ln a} \cdot \underbrace{\lim_{t\to 0^+} \frac{1 - \cos t}{t^2}}_{=1/2}$$

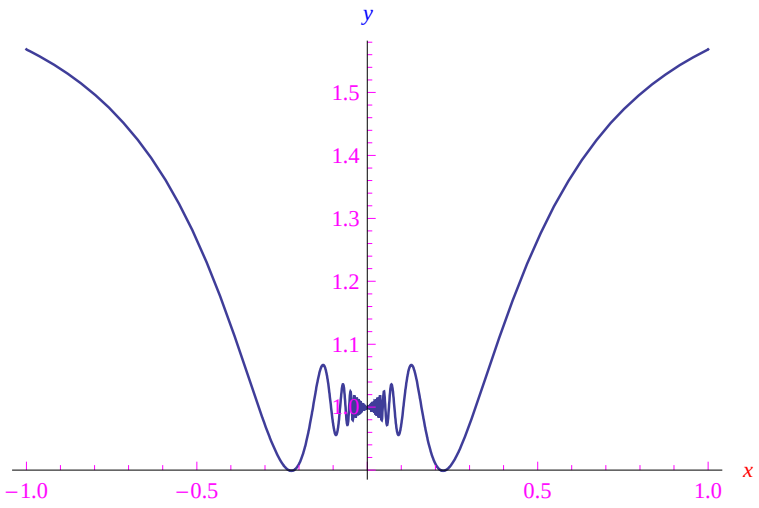


Figura 7.46: Esercizio 342.

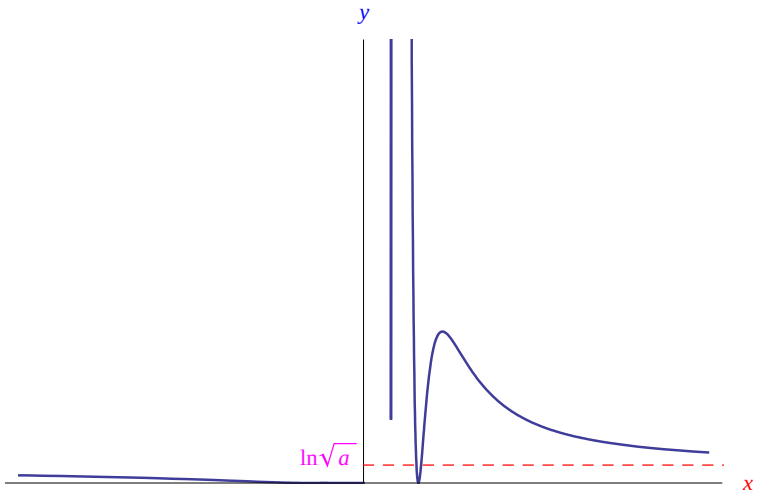


Figura 7.47: Esercizio 343 per $a = 5$.

Conclusione

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{a}-1\right)\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)x^3=\ln\sqrt{a}$$

come illustrato in fig. 7.47.

Esercizio 344 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x^3-3x^2+3x-1}\left[1-\cos5\left(x-1\right)\right] \tag{7.409}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata $0/0$. Osservando che $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ si ha:

$$\lambda=\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x-1}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-\cos5\left(x-1\right)}{(x-1)}$$

Per il primo limite poniamo $t=x-1$

$$\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{5^t-1}{t}=\ln5$$

Per il secondo limite poniamo $t=5\left(x-1\right)$

$$\lim_{x\to1}\frac{1-\cos5\left(x-1\right)}{(x-1)}=25\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{25}{2}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to1}\frac{5^{x-1}-1}{x^3-3x^2+3x-1}\left[1-\cos5\left(x-1\right)\right]=25\ln\sqrt{5}$$

come illustrato in fig. 7.48.

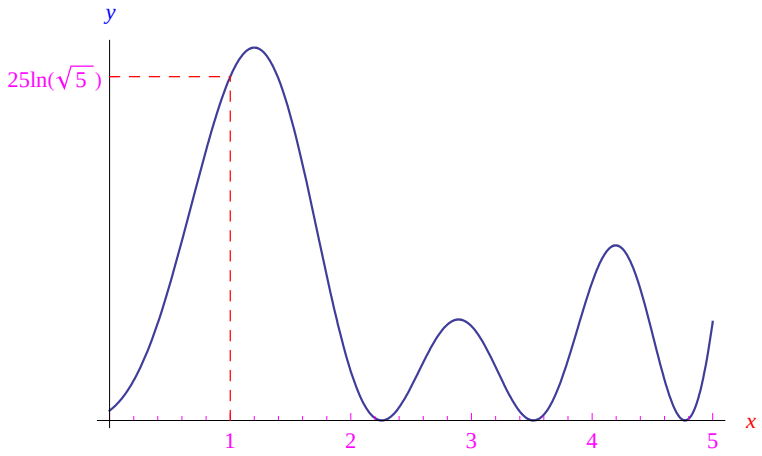


Figura 7.48: Esercizio 344.

Esercizio 345 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+x^2\right)^3-1}{1-\cosh x} \tag{7.410}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata 0/0. Promemoria (**limiti fondamentali**):

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh x}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

Applichiamo il seguente artificio:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-1}{1-\cosh x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x^2)^3-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cosh x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-1}{x^2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cosh x}}_{=-2}\end{aligned}$$

Per l'altro limite poniamo $t=x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-1}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^3-1}{t}=3$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^3-1}{1-\cosh x}=-6$$

come illustrato in fig. 7.49.

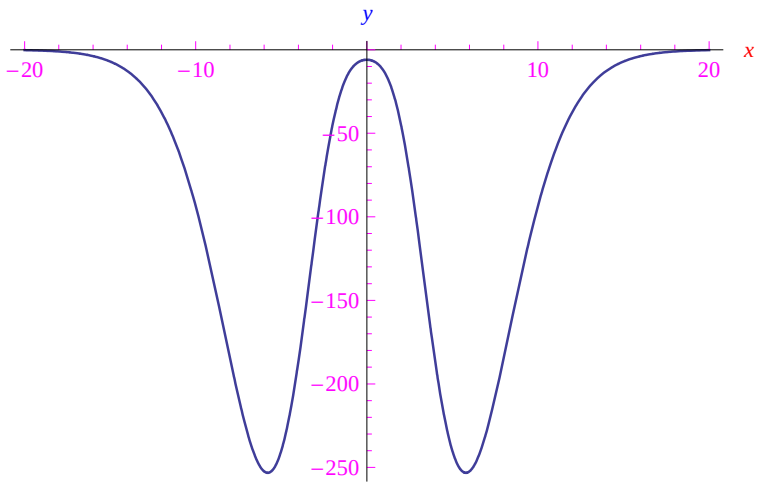


Figura 7.49: Esercizio 345.

Esercizio 346 *Calcolare*

$$\lambda=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}-x\right)\tag{7.411}$$

Soluzione

Questo esercizio è istruttivo perché evidenzia i problemi che nascono quando si ha a che fare con termini del tipo $\sqrt{x^2}$ per $x\to\pm\infty$. Infatti, con un cambio di variabile ci svincoliamo dalla radice quadrata. Precisamente:

$$t=\frac{2x+1}{2x-1}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}1$$

Esprimendo x in funzione di t:

$$x = \frac{t+1}{2(t-1)}$$

Segue

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1}\left[\sqrt{t}\frac{t+1}{2(t-1)} - \frac{t+1}{2(t-1)}\right] &= \lim_{t\to 1}\frac{t+1}{2}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \frac{0}{0}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 1}(t+1)\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}+1)}\\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{t\to 1}(t+1)}_{=2}\underbrace{\lim_{t\to 1}\frac{1}{\sqrt{t}+1}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Conclusione

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} - x\right) = \frac{1}{2}$$

come illustrato in fig. 7.50.

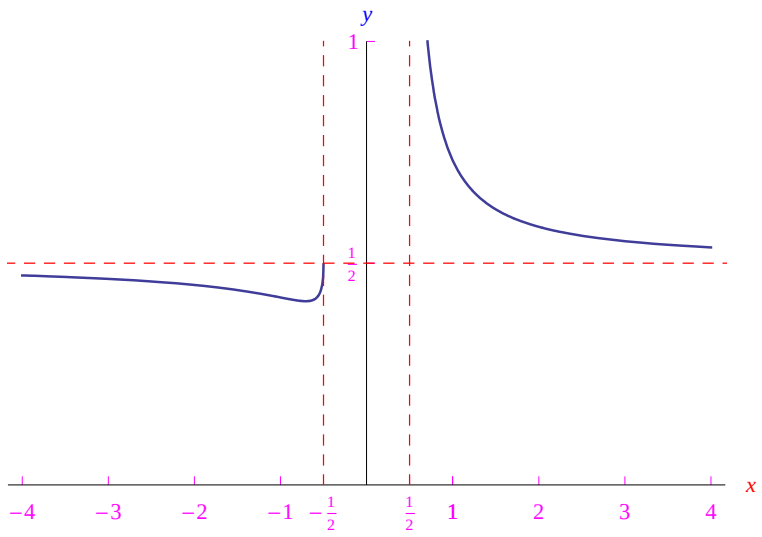


Figura 7.50: Esercizio 346.

Esercizio 347 *Calcolare*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x} \tag{7.412}$$

Soluzione

II primo limite dà luogo alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x} = \frac{(+\infty)^{1-\frac{1}{+\infty}}}{+\infty} = \frac{(+\infty)^{1-0^+}}{+\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Manipoliamo l'espressione analitica della funzione assegnata:

$$\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x} = x^{1-\frac{1}{x}-1} = x^{-\frac{1}{x}},$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln x^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{\ln x}{x}}=\exp\left(-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)$$

Per $x\to+\infty$ il logaritmo è un infinito di ordine infinatamente piccolo (rispetto all'infinito di riferimento $u(x)=x$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

Conclusione

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x}=1$$

II calcolo dell'altro limite è immediato:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{1/x}}=\frac{1}{(0^+)^{+\infty}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

come illustrato in fig. 7.51.

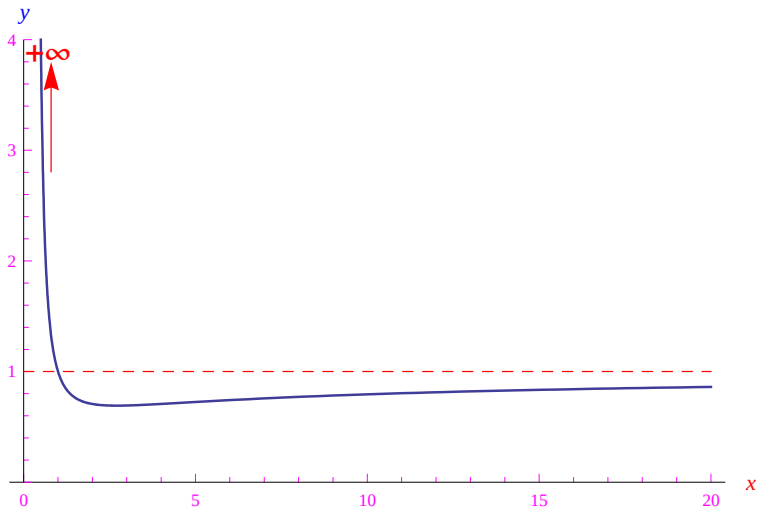


Figura 7.51: Esercizio 347.

Esercizio 348 *Calculate the following limit*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1-\frac{1}{x}}-x\right) \tag{7.413}$$

Solution
Here we have the indeterminate form "infinite - infinite":

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1-\frac{1}{x}}-x\right)&=(+\infty)^{1-\frac{1}{+\infty}}-(+\infty)\\&=(+\infty)^{1-0^+}-(+\infty)\\&=\infty-\infty\end{aligned}$$

It follows:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{1-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{x^{1-\frac{1}{x}}}{x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(x^{-\frac{1}{x}}-1\right)$$

From the previous exercise:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{x}} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x\left(x^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = 0\cdot\infty$$

That is, the indeterminate form "zero for infinity" which can be traced back to the indeterminate form "zero on zero" ($\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(x^{-\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

By changing the variable $t = 1/x$ we obtain

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t\to0^+} \frac{1 - \left(\frac{1}{t}\right)^t}{t\left(\frac{1}{t}\right)^t} \\ &= \lim_{t\to0^+} \frac{t^t - 1}{t} \underset{\lim_{t\to0^+} t^t = 1}{=} \frac{0}{0}\end{aligned}$$

We apply the De L'Hopital rule

$$\lim_{t\to0^+} \frac{t^t - 1}{t} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{d}{dt}t^t}{1}$$

To calculate the numerator derivative, we apply the logarithmic derivative method:

$$\frac{d}{dt}\ln t^t = \frac{\frac{d}{dt}t^t}{t^t} \Longrightarrow \frac{d}{dt}t^t = t^t\frac{d}{dt}\ln t^t$$

But

$$\frac{d}{dt}\ln t^t = \frac{d}{dt}(t\ln t) = 1 + \ln t \Longrightarrow \frac{d}{dt}t^t = t^t(1 + \ln t)$$

It follows:

$$\lim_{t\to0^+} \frac{t^t - 1}{t} = \lim_{t\to0^+} \left[t^t(1 + \ln t)\right] = \underbrace{\lim_{t\to0^+} t^t}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{t\to0^+} (1 + \ln t)}_{-\infty} = -\infty$$

Conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^{1-\frac{1}{x}} - x\right) = -\infty$$

In Fig. 7.52 riportiamo il grafico della funzione $f(x) = x^{1-\frac{1}{x}} - x$.

Esercizio 349 *Studiare il comportamento della seguente funzione agli estremi del campo di esistenza.*

$$f(x) = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2} \tag{7.414}$$

Soluzione
La funzione è definita in $X = (0,1)\cup(1,+\infty)$. Abbiamo

$$\lim_{x\to1} f(x) = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to1} \frac{1}{x} = \frac{1}{2},$$

quindi $x = 1$ è un punto di discontuinità eliminabile.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{0^+ - (-\infty) - 1}{1} = +\infty,$$

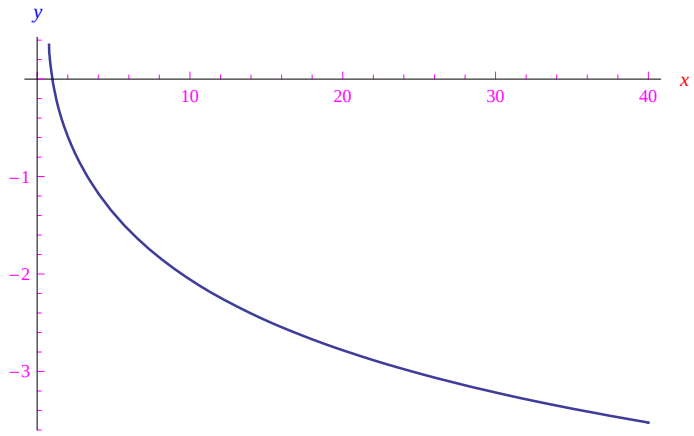


Figura 7.52: Grafico della funzione $f(x) = x^{1-\frac{1}{x}} - x$.

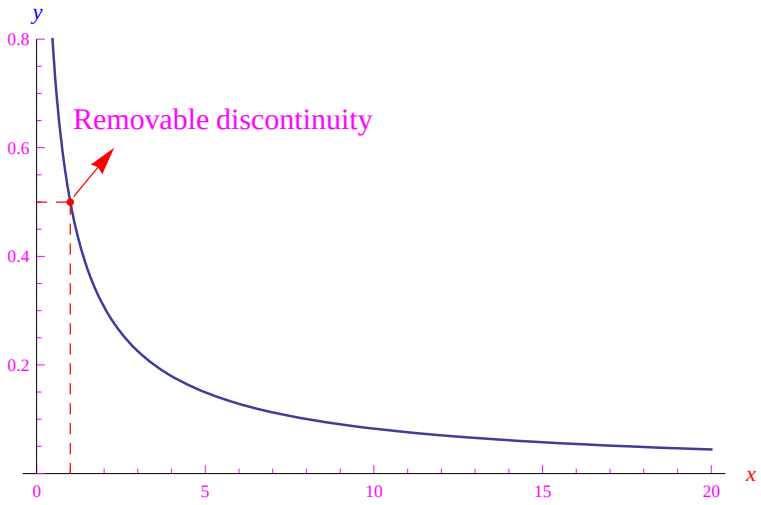


Figura 7.53: Esercizio 349.

$x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2} = 0$$

per confronto tra infiniti. Il grafico è riportato in fig. 7.53.

Esercizio 350 *Studiare il comportamento della seguente funzione agli estremi del campo di esistenza.*

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x - 1} \tag{7.415}$$

Soluzione
La funzione è definita in $X = (0,1) \cup (1,+\infty)$. Abbiamo

$$\lim_{x\to1} \frac{x \ln x}{x-1} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to1} (\ln x + 1) = 1$$

Cioè $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile. Studiamo il comportamento della funzione in un intorno destro di $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \underbrace{\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x-1}}_{=-1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to0^+} x \ln x}_{=0} = 0$$

Ne segue che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Per $x \to +\infty$ la funzione diverge positivamente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \ln x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \ln x}_{=+\infty} = +\infty$$

Il grafico è riportato in fig. 7.54.

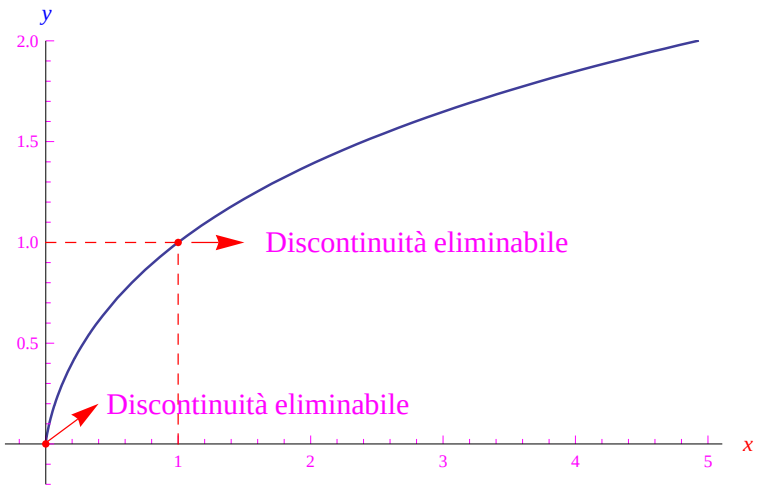


Figura 7.54: Esercizio 350.

Esercizio 351 *Calcolare*

$$\lim_{x\to1} \frac{2\ln x - x + \frac{1}{x}}{(x-1)^3} \tag{7.416}$$

Soluzione

Per $x \to 1$ il rapporto si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x - x + \frac{1}{x}}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{2x\ln x - x^2 + 1}{x(x-1)^3} = \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{1}{x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{2x\ln x - x^2 + 1}{(x-1)^3}$$

Il secondo limite si calcola applicando ripetutamente la regola di De L'Hopital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{2x\ln x - x^2 + 1}{(x-1)^3} = \frac{0}{0} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\ln x + 2 - 2x}{3(x-1)^2} = \frac{0}{0} \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} \\
&\overset{\text{H}}{=} \frac{2}{3} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x\ln x - x^2 + 1}{(x-1)^3} = -\frac{1}{3}$$

come illustrato in fig. 7.55.

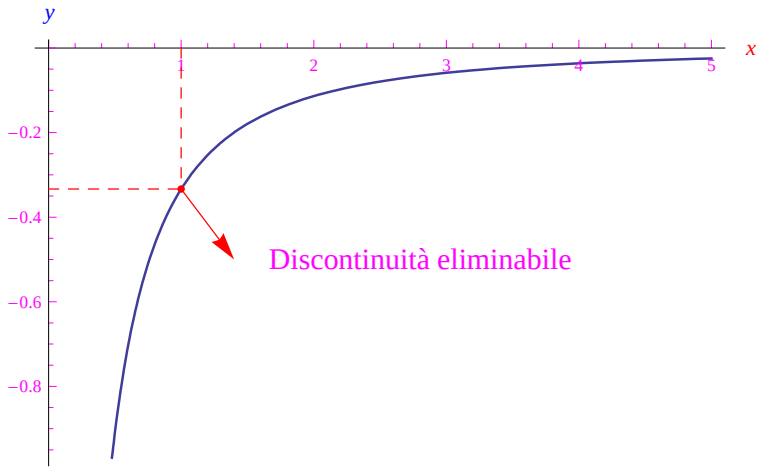


Figura 7.55: Esercizio 351.

Esercizio 352 *Studiare il comportamento della seguente funzione agli estremi del campo di esistenza*

$$f(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x} \tag{7.417}$$

Soluzione

Il campo di esistenza della funzione è $X = (0, +\infty)$. Studiamo il comportamento della funzione in un intorno destro di $x = 0$, calcolando il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \ln x}{x} = \frac{0^+ - (-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Ne segue che per $x \to 0^+$ la funzione diverge positivamente (l'asse y è asintoto verticale). Applicando la regola di De L'Hopital è facile persuadersi che per $x \to +\infty$ la funzione diverge positivamente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x} = \frac{\infty - \infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}$$

Per il limite a numeratore procediamo per confronto tra infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Finalmente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1-0}{0^+} = +\infty$$

come illustrato in fig. 7.56.

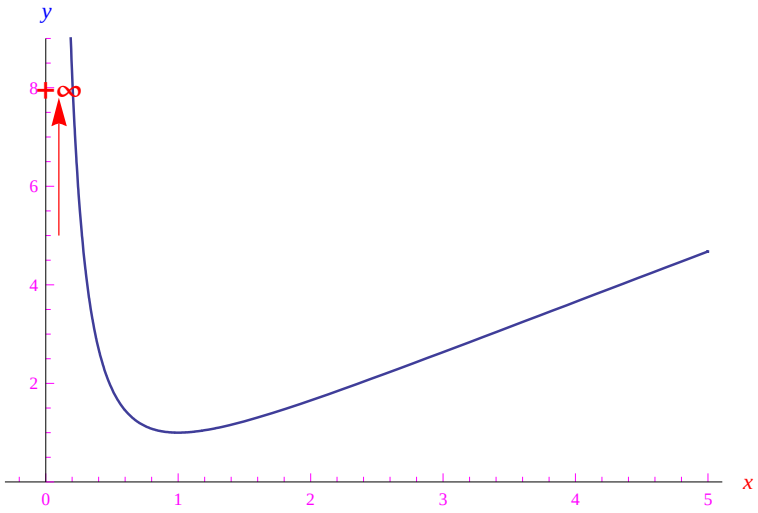


Figura 7.56: Esercizio 352.

Esercizio 353 *Classificare i punti di discontinuità della funzione:*

$$f(x) = x + \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} \tag{7.418}$$

Soluzione

La funzione è definita su tutto il campo reale, escluso il punto $x = 1$. Calcoliamo:

$$\lim_{x\to1} \left(x + \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1}\right) = 1 + \arctan \frac{0}{0}$$

Occorre quindi risolvere la forma indeterminata $0/0$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x\,(x-1)^2}}{x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{|x-1|\sqrt{x}}{x - 1}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{|x-1|}{x - 1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to1} \sqrt{x}}_{=1}$$

Per l'altro limite:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = 1, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} = -1$$

Ne segue

$$\lim_{x\to 1^+} \left(x + \arctan \frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} \right) = 1 + \arctan 1 = 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \left(x + \arctan \frac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{x-1} \right) = 1 + \arctan(-1) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ne concludiamo che $x = 1$ è un punto di discontinuità di prima specie come illustrato in fig. 7.57.

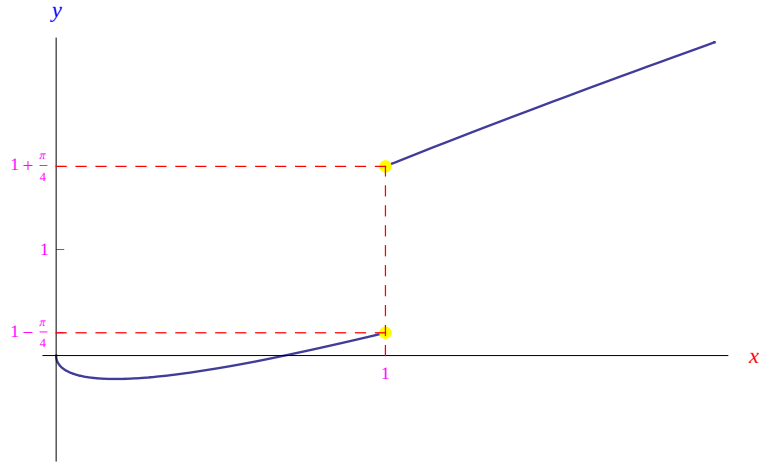


Figura 7.57: Esercizio 353.

Esercizio 354 *(Ripetiamo l'esercizio 269), con un procedimento diverso. Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2} - x \right) \tag{7.419}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2} - x \right) = \tanh \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{1+x-3x^2} - x \right)$$

che restituisce la forma indeterminata $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{1+x-3x^2} - x \right) = \infty - \infty$$

Anziché calcolare il fattore razionalizzante, procediamo nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{1+x-3x^2} - x \right) &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[x \left(\frac{1}{x} \sqrt[3]{1+x-3x^2} - 1 \right) \right] \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left[x \left(\frac{1}{x} \sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} \right)} - 1 \right) \right] \\
&= (\pm\infty)(0-1) = \mp\infty
\end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right)=+\infty$$

Tenendo conto dei limiti delle funzioni iperboliche si perviene al risultato:

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right)=\tanh\left(-\infty\right)=-1$$
$$\lim_{x\to-\infty}\tanh\left(\sqrt[3]{1+x-3x^2}-x\right)=\tanh\left(+\infty\right)=1$$

Ne concludiamo che la funzione assegnata converge all'infinito, rispettivamente a -1 e $+1$. Geometricamente, le rette orizzontali $y=-1$ e $y=1$ sono asintoti orizzontali per il grafico della funzione, rispettivamente a destra e a sinistra.

Esercizio 355 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sinh^{-1}\ln\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \tag{7.420}$$

Soluzione
Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\sinh^{-1}\ln\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| &= \sinh^{-1}\lim_{x\to\pm\infty}\ln\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| = \sinh^{-1}\ln\left|\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \\ &= \sinh^{-1}\ln\left|\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right| = \sinh^{-1}\ln|-1| \\ &= \sinh^{-1}\ln 1=0\end{aligned}$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sinh^{-1}\ln\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|=0,$$

come illustrato in fig. 7.58.

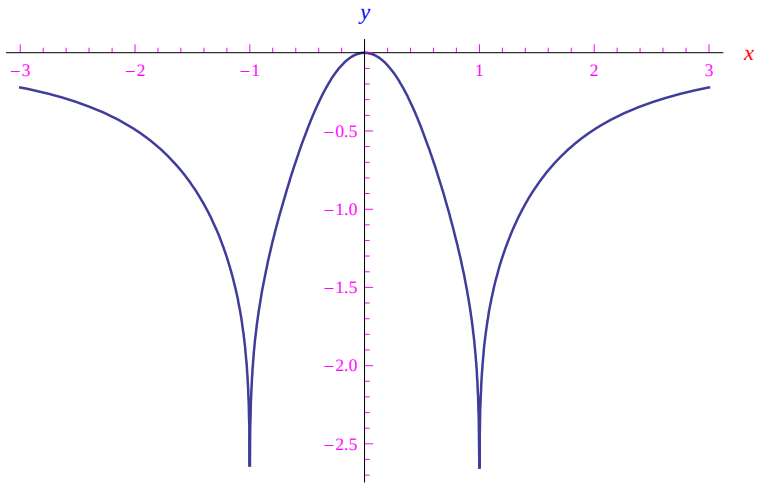


Figura 7.58: Esercizio 355.

Esercizio 356 *Calcolare:*

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\cot x} \tag{7.421}$$

Soluzione

Abbiamo la forma indeterminata 1^∞

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\cot x}=1^\infty$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\cot x}=e^{\lim_{x\to 0}\cot x\ln(\cos x+\sin x)}$$

Quindi calcoliamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cot x\ln(\cos x+\sin x)&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\ln(\cos x+\sin x)}{\sin x}\\&=\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{\sin x}\end{aligned}$$

Determiniamo a parte l'altro limite applicando la regola di De L'Hopital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{\sin x}&=\frac{0}{0}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\cos x+\sin x)}\\&=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}_{=1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}}_{=\frac{1-0}{1+0}=1}\end{aligned}$$

Cioè

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{\sin x}=1\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\cot x\ln(\cos x+\sin x)=1$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\cot x}=e,$$

come illustrato in fig. 7.59.

Esercizio 357 *[?](Esercizio tratto da [3]. La soluzione è nostra).*

Calcolare

$$\lim_{x\to 1^+}x^{\frac{2}{x^2-1}} \tag{7.422}$$

Soluzione

Qui abbiamo la forma indeterminata 1^∞, per cui scriviamo

$$\lim_{x\to 1^+}x^{\frac{2}{x^2-1}}=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{2\ln x}{x^2-1}}=e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x}{x^2-1}}$$

Calcoliamo a parte il limite dell'argomento dell'esponenziale, eseguendo il cambio di variabile $t=x-1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x}{(x-1)(x+1)}=\underbrace{2\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1+t}}_{=\frac{1}{2}}\underbrace{\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t}}_{=1}$$

giacché il secondo è un limite fondamentale. Conclusione:

$$\lim_{x\to 1^+}x^{\frac{2}{x^2-1}}=e^1=e$$

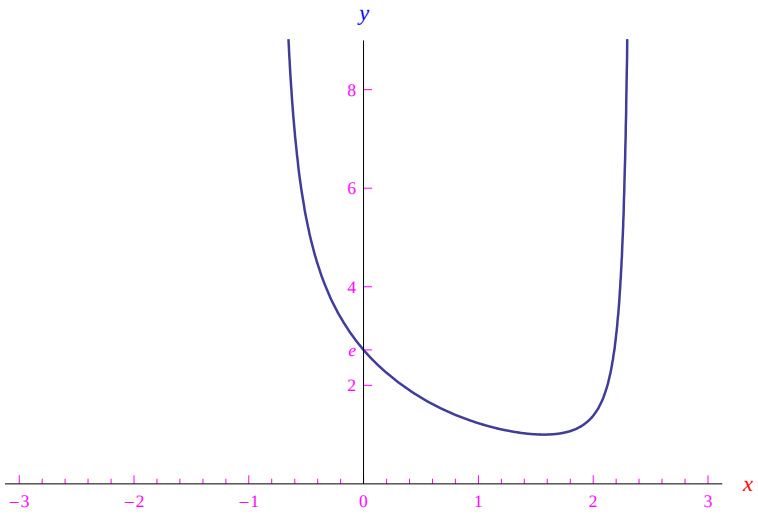


Figura 7.59: Esercizio 356.

Capitolo 8

Applicazioni geometriche

8.1 Esercizi svolti

Esercizio 358 *Discutere il comportamento delle radici dell'equazione di secondo grado*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.1}$$

nel limite per $a \to 0$*, supponendo* b *e* c *costanti, con* $b \neq 0$*. Esprimere geometricamente il risultato ottenuto.*

Soluzione
Le radici della (8.1) sono:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{8.2}$$

che possiamo esprimere in funzione di a:

$$\begin{aligned} x_1(a) &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x_2(a) &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Più precisamente, per tutti i valori della variabile reale a tali che $b^2 - 4ac > 0$, le (8.3) sono funzioni reali della variabile reale a, entrambe definite in $\mathbb{R} - \{0\}$. Calcoliamo

$$\lim_{a \to 0} x_1(a) = \frac{-b - b}{0} = -\frac{2b}{0} = \pm\infty \tag{8.4}$$

Segue

$$\begin{aligned} b > 0 &\Longrightarrow \begin{cases} \lim_{a \to 0^+} x_1(a) = -\infty \\ \lim_{a \to 0^-} x_1(a) = +\infty \end{cases} \\ b < 0 &\Longrightarrow \begin{cases} \lim_{a \to 0^+} x_1(a) = +\infty \\ \lim_{a \to 0^-} x_1(a) = -\infty \end{cases} \end{aligned} \tag{8.5}$$

L'altra radice $x_2(a)$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ che si risolve razionalizzando il numeratore:

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} x_2(a) = \frac{0}{0} &= \lim_{a \to 0} \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) \\ &= \lim_{a \to 0} \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)} = -\frac{c}{b} \end{aligned}$$

Interpretazione geometrica: la curva di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è una parabola, per cui le radici della (8.1) sono le ascisse dei punti di intersezione della parabola con l'asse x. Per $a \to 0$ la parabola tende alla retta $y = bx + c$ che interseca l'asse x nel punto di ascissa $-c/b$, come illustrato in fig. 8.1.

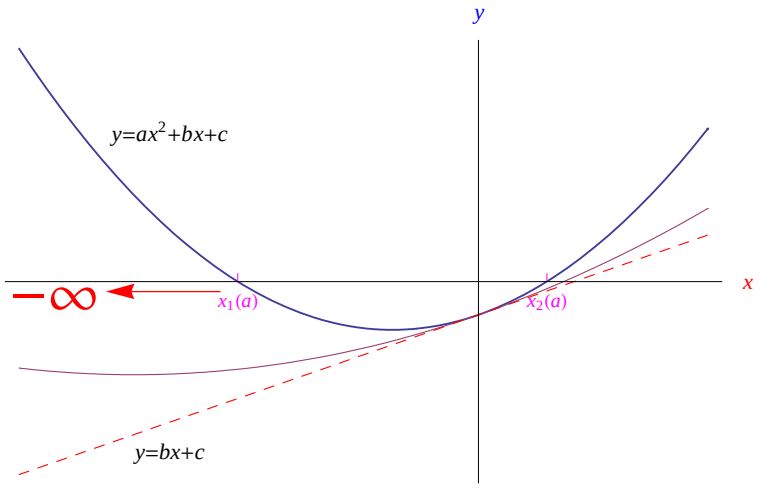


Figura 8.1: Senza perdita di generalità, consideriamo una parabola $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$, per cui la curva volge la concavità verso l'alto. Al decrescere progressivo di a, la parabola si "allarga" e nel limite per $a \to 0^+$, tende alla retta tratteggiata.

Esercizio 359 *Determinare i valori delle costanti reali m, n tali che*

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(mx + n - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0} \tag{8.6}$$

Esprimere geometricamente il risultato ottenuto.

Soluzione
Esplicitiamo il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(mx + n - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = \infty - \infty \tag{8.7}$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(mx + n - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = n + \lambda,$$

dove

$$\begin{aligned}\lambda \overset{def}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\left(mx - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = \infty - \infty &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^3 + mx - x^3 - 1}{x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(m-1)\,x^3 + mx - 1}{x^2+1} = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 1 \\ \pm\infty, & \text{se } m \neq 1 \end{cases}\end{aligned} \tag{8.8}$$

Ne concludiamo che affinché sia verificata la (8.6) deve essere

$$m = 1, \quad n = 0 \tag{8.9}$$

L'interpretazione geometrica è la seguente: nella (8.6) il termine $mx+n$ è l'ordinata del punto della retta $y = mx + n$ di ascissa x, mentre la differenza tra le ordinate del predetto punto e del punto della curva

$$y = \frac{x^3+1}{x^2+1},$$

deve essere zero. Come è noto, in tal caso la retta $y = mx + n$ è un asintito obliquo per la curva. Nel caso in esame, detto asintoto è la retta $y = x$, cioè la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Esercizio 360 *(Esercizio tratto da [3]. La soluzione è nostra). Determinare gli asintoti del grafico della funzione*

$$f(x) = 3x - \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) \tag{8.10}$$

Soluzione

Dobbiamo innanzitutto determinare il campo di esistenza X della funzione. Deve essere

$$\frac{2x+1}{x+2} > 0$$

Risolvendo questa disequazione otteniamo

$$X = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Segue

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -6 - \ln\left(\frac{-3}{0^-}\right) = -6 - \ln(+\infty) = -6 - (+\infty) = -\infty$$

Cioè la retta $x + 2 = 0$ è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{3}{2} - \ln\left(\frac{0^+}{-\frac{1}{2}+2}\right) = -\frac{3}{2} - \ln\left(0^+\right) = -\frac{3}{2} - (-\infty) = +\infty$$

Cioè la retta $2x + 1 = 0$ è asintoto verticale. Studiamo ora il comportamento all'infinito. Si trova facilmente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Vediamo se c'è un asintoto obliquo a destra:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[3 - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\right] \\ &= 3 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = 3 - \frac{\ln 2}{+\infty} = 3 \\ n &= \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = -\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = -\ln 2 \end{aligned}$$

Quindi la retta $r : y = 3x - \ln 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Procedendo in maniera analoga per $x \to -\infty$ si ottiene la medesima retta quale asintoto obliquo. Ne concludiamo che $y = 3x - \ln 2$ è asintoto obliquo completo, come illustrato in fig. 8.2.

Esercizio 361 *Determinare gli asintoti del grafico della funzione*

$$f(x) = -2x + \ln\left(\frac{3x+1}{x+3}\right) \tag{8.11}$$

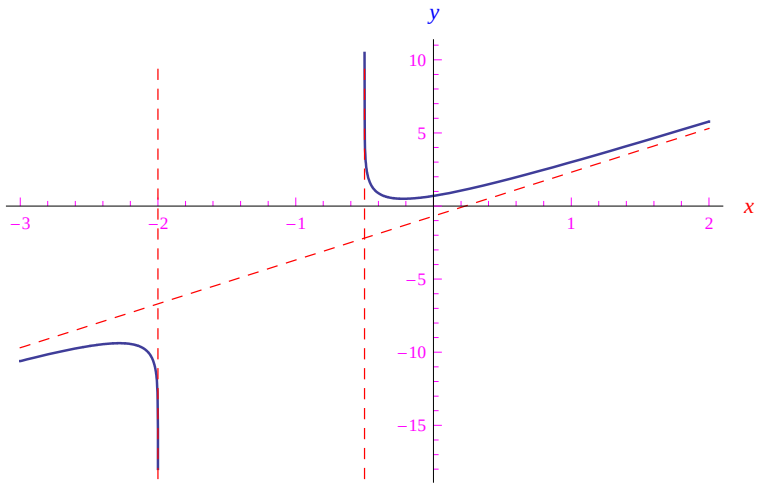


Figura 8.2: Esercizio 360.

Soluzione
Dobbiamo innanzitutto determinare il campo di esistenza X della funzione. Deve essere

$$\frac{3x+1}{x+3} > 0$$

Risolvendo questa disequazione otteniamo

$$X = (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Segue

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 6 + \ln\left(\frac{-8}{0^-}\right) = 6 + \ln(+\infty) = +\infty$$

Cioè la retta $x + 3 = 0$ è asintoto verticale. Inoltre

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} f(x) = -2\left(-\frac{1}{3}\right) + \ln\left(\frac{0^+}{\frac{8}{3}}\right) = \frac{2}{3} + \ln\left(0^+\right) = -\infty$$

Cioè la retta $3x + 1 = 0$ è asintoto verticale. Studiamo ora il comportamento all'infinito. Si trova facilmente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Vediamo se c'è un asintoto obliquo a destra:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[-2 + \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3x+1}{x+3}\right)\right] \\ &= -2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3x+1}{x+3}\right) = -2 - \frac{\ln 3}{+\infty} = -2 \\ n &= \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{3x+1}{x+3}\right) = \ln 3 \end{aligned}$$

Quindi la retta $r : y = -2x + \ln 3$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Procedendo in maniera analoga per $x \to -\infty$ si ottiene la medesima retta quale asintoto obliquo. Ne concludiamo che $y = -2x + \ln 3$ è asintoto obliquo completo, come illustrato in fig. 8.3.

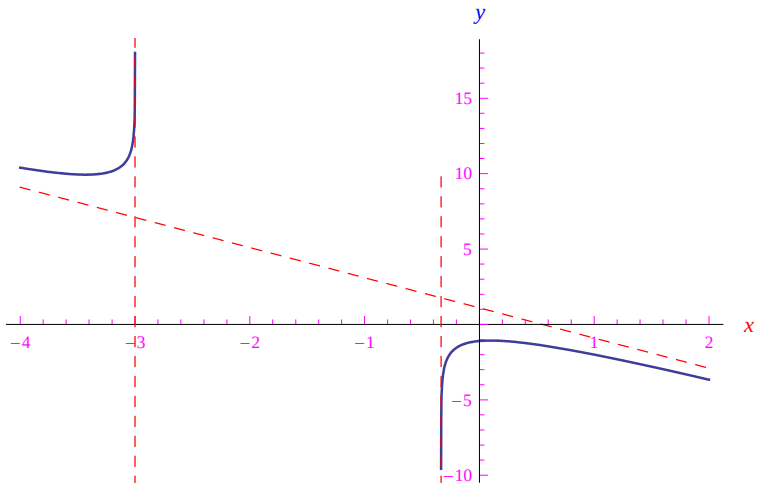


Figura 8.3: Esercizio 361.

Esercizio 362 *Determinare gli asintoti del grafico della funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} \tag{8.12}$$

Soluzione

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. È divergente all'infinito, per cui vediamo se ci sono asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right) = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - 1\right) = 0\cdot\infty$$

Poniamo $t = 1/x$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - 1\right) = \lim_{t\to0^+} \frac{\sqrt[3]{1+t^2}-1}{t} = \frac{0}{0} \overset{\text{H}}{=} \frac{2}{3}\lim_{t\to0^+} \frac{t}{\sqrt[3]{(1+t^2)^2}} = 0$$

In maniera simile:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = 0$$

Ne concludiamo che la retta $y = x$ è asintoto obliquo completo, come illustrato in fig. 8.4.

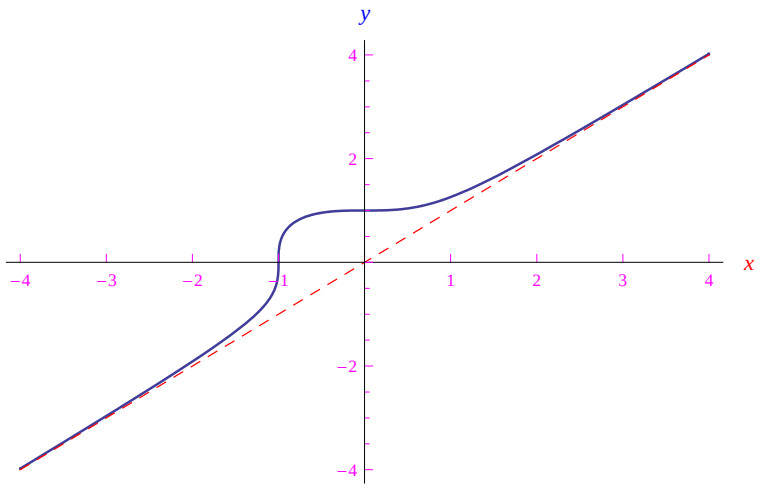


Figura 8.4: Esercizio 362.

Appendice A

Esercizi particolari

A.1 Specificare la topologia dello spazio in cui si lavora

Premettiamo la seguente proprietà

Proprietà 63 *(**Proprietà di densità**)*
L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è **denso** *in $\mathbb{R}$, ossia comunque prendiamo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, esistono infiniti numeri razionali compresi tra x e y.*

Consideriamo ora la seguente funzione definita in $X = \mathbb{Q}^+$ (insieme dei razionali non negativi):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in \mathbb{Q}^+ \backslash \mathbb{N} \\ x, & \text{se } x = n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{A.1}$$

Un assegnato $x_n = n$ è di accumulazione per X giacché per la proprietà 63, in ogni intorno di x_n cade almeno un punto ($\Longrightarrow$ infiniti) di X distinto da n. Ciò ci consente di poter applicare la definizione di limite. Nel caso in esame, risulta:

$$n = 1 \Longrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

per cui la funzione assegnata è ivi continua. Diversamente:

$$n \geq 2 \Longrightarrow \lim_{x \to n} f(x) = n^2 \neq f(n)$$

In definitiva:

$$\lim_{x \to n} f(x) = \begin{cases} f(1), & \text{se } n = 1 \\ n^2 \neq f(n), & \text{se } n \geq 2 \end{cases} \tag{A.2}$$

Ne concludiamo che la funzione ha infiniti punti di discontinuità eliminabili in $x_n = n \geq 2$.

Appendice B

Formule trigonometriche

B.1 Formule di addizione e sottrazione

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
3. $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
4. $\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x \mp \cot y}$

B.2 Formule di duplicazione

1. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
3. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

B.3 Formule di bisezione

1. $\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$
2. $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$
3. $\tan \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$
4. $\cot \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

B.4 Formule di prostaferesi

1. $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$
2. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$
3. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$

4. $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$
5. $\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}$

B.5 Formule parametriche

Esprimono $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, come funzione razionale di $\tan \frac{x}{2} \stackrel{def}{=} t$.

1. $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
2. $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
3. $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$
4. $\cot x = \frac{1-t^2}{2t}$

Appendice C

Funzioni ricorsivamente convergenti

C.1 Definizioni

L'esempio 203 si presta ad una ulteriore generalizzazione, introducendo le nozioni di *ricorsione* e di *convergenza ricorsiva*. In realtà abbiamo già affrontato tale problema in questa dispensa.

Modifichiamo, aggiungendo ricorsività, il predetto esempio nel modo che segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\overbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}^{n}} - e^x}{x^3}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}, \tag{C.1}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione assegnata, infinitesima in $x = 0$ e derivabile in un intorno di tale punto un numero "sufficiente" di volte in modo da poter applicare la regola di De L'Hospital in modo da risolvere la forma indeterminata $0/0$. Esplicitando alcuni valori di n:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(x)} - e^x}{x^3} \\ \lambda_2 &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(\varphi(x))} - e^x}{x^3} \\ \lambda_3 &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(\varphi(\varphi(x)))} - e^x}{x^3} \\ &.... \end{aligned} \tag{C.2}$$

Definizione 64 *La funzione*

$$f(x) = \frac{e^{\overbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}^{n}} - e^x}{x^3} \tag{C.3}$$

è, per $x \to 0$, ***ricorsivamente convergente*** *se*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\overbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}^{n}} - e^x}{x^3} = \lambda_n \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{C.4}$$

Ciò equivale a dire che per $x \to 0$

$$e^{\overbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}^{n}} - e^x \tag{C.5}$$

è un infinitesimo di ordine 3, *per ogni intero naturale non nullo* n.

Tale tipo di convergenza può essere studiata attraverso l'ausilio di un software del tipo *Mathematica*. Ad esempio, possiamo porre

$$g_n(x) = e^{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}, \tag{C.6}$$

cosicché il limite si scrive

$$\lim_{x\to 0} \frac{g_n(x) - e^x}{x^3},$$

dopodiché si cerca di applicare la regola di De L'Hospital. Tuttavia, per come abbiamo definito la convergenza ricorsiva, il limite deve essere calcolato per *ogni* n, cosa ovviamente impossibile. Al più, si potrebbe ricorrere a un procedimento di tipo induttivo vincolato, ovviamente, alla funzione $\varphi(x)$. Ad esempio, per $\varphi(x) = \tan x$, *Mathematica* restituisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan x)} - e^x}{x^3} &= \frac{2}{3} \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan x))} - e^x}{x^3} &= 1 \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan(\tan x)))} - e^x}{x^3} &= \frac{4}{3} \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan(\tan(\tan x))))} - e^x}{x^3} &= \frac{5}{3} \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan x)))))} - e^x}{x^3} &= 2 \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan x))))))} - e^x}{x^3} &= \frac{7}{3} \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan x)))))))} - e^x}{x^3} &= \frac{8}{3} \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan x))))))))} - e^x}{x^3} &= 3 \\
\lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan(\tan x)))))))))} - e^x}{x^3} &= \frac{10}{3}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Sembra quindi che la funzione sia ricorsivamente convergente. Ciò potrebbe rappresentare un risultato generale. Cioè

Congettura 65

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{\varphi(x)} - e^x}{x^3} = \lambda_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{\overbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}^{n}} - e^x}{x^3} = \lambda_n \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

A questo punto ci sembra più interessante studiare la *ricorsività locale* per ciò che riguarda la convergenza della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\overbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}^{n}} - e^x}{x^3} \tag{C.9}$$

per ricorsività locale intendiamo la circostanza secondo cui per $x \to 0$ il numero di ricorsione diviene infinitamente grande. Cioè

$$\lim_{x \to 0} n(x) = +\infty \tag{C.10}$$

Formalmente $f(x)$ diviene una funzione di due variabili

$$f(x,n) = \frac{e^{\overbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x)))}^{n}} - e^x}{x^3} \tag{C.11}$$

definita nel seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,n) \mid x \in \mathbb{R} - \{0\},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}, \tag{C.12}$$

passando poi alla sola funzione composta della sola variabile x:

$$f[x, n(x)], \tag{C.13}$$

onde si tratta di studiare il limite

$$\lim_{x \to 0} f[x, n(x)] \tag{C.14}$$

Dal momento che n è un intero naturale, siamo tentati di porre

$$n(x) = \left[\frac{1}{x}\right], \tag{C.15}$$

dove [.] denota la parte intera. Per $\varphi(x) = \tan x$ otteniamo - con l'ausilio di *Mathematica* - il grafico di fig. C.1, dove per necessità computazionali abbiamo considerato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$. Da tale andamento sembra che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\overbrace{\tan(\tan(...\tan(x)))}^{n(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty}} - e^x}{x^3} = +\infty \tag{C.16}$$

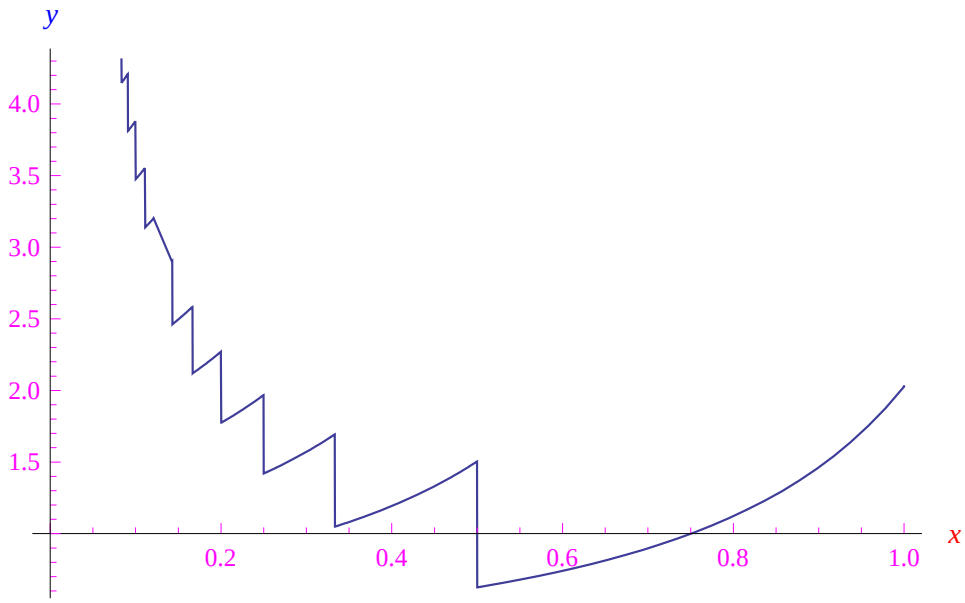


Figura C.1: Andamento della funzione ricorsiva (C.11) con $n(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$.

Bibliografia

[1] Fiorenza R., Greco D. 1978. *Lezioni di Analisi Matematica*. Liguori Editore.

[2] Orecchia G., Spataro S., *Limiti. Esercizi* Tecnos – Collana Esami

[3] Pegna E., Flaccavento M., *Esercizi di Analisi Matematica 1* Libreria Tecnica Editrice dott. ing. V. Giorgio.