
Esercizio sui tensori

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>extrabyte.info

Esercizio 1 Scrivere la più generale espressione delle componenti di un tensore covariante di rango 2, quale elemento dello spazio prodotto tensoriale di $\mathbb{R}^{2*}$ per sé stesso.

Soluzione

Prendiamo come base di $\mathbb{R}^2$, la base canonica:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0) \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1) \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Consideriamo, quindi, lo spazio duale $\mathbb{R}^{2*}$. La base duale associata alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ è

$$\theta^1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta^2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

La più generale 1-forma (o forma lineare) è

$$\omega = \omega_i \theta^i = \omega_1 \theta^1 + \omega_2 \theta^2$$

o ciò che è lo stesso:

$$\langle \mathbf{x}, \omega \rangle = \omega_1 x^1 + \omega_2 x^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

Costruiamo lo spazio prodotto tensoriale di $\mathbb{R}^{2*}$ per sé stesso:

$$\mathbb{R}^{2*} \otimes \mathbb{R}^{2*}$$

i cui elementi sono tensori covarianti di rango 2. Precisamente:

$$\begin{aligned} T \in \mathbb{R}^{2*} \otimes \mathbb{R}^{2*} &\implies T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T(x^i \mathbf{e}_i, y^k \mathbf{e}_k) = x^i y^k \underbrace{T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k)}_{=T_{ik}} \\ &= T_{11} x^1 y^1 + T_{12} x^1 y^2 + T_{21} x^2 y^1 + T_{22} x^2 y^2 \end{aligned}$$

da cui vediamo che detto tensore è una forma quadratica (i.e. 2-lineare) nelle componenti dei vettori di $\mathbb{R}^2$, mentre i coefficienti di tale forma sono le componenti del tensore nella base canonica di $\mathbb{R}^{2*} \otimes \mathbb{R}^{2*}$:

$$T = T_{ik} \theta^i \otimes \theta^k,$$

essendo $\{\theta^i \otimes \theta^k\}$ la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2*} \otimes \mathbb{R}^{2*}$:

$$\{\theta^1 \otimes \theta^1, \theta^1 \otimes \theta^2, \theta^2 \otimes \theta^1, \theta^2 \otimes \theta^2\}$$

In termini di matrici rappresentative:

$$\begin{aligned} \theta^1 \otimes \theta^1 &\doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \theta^1 \otimes \theta^2 &\doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\dots \end{aligned}$$

Da un punto di vista formale, possiamo scrivere:

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \doteq \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 y^1 \\ x^1 y^2 \\ x^2 y^1 \\ x^2 y^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$