
Esercizio sullo spazio duale

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>extrabyte.info

Esercizio 1 Specificare lo spazio duale dello spazio vettoriale $\mathcal{P}_{n-1}[t]$ (su $\mathbb{R}$) i cui elementi sono i polinomi di grado $\leq n-1$ nell'indeterminata t e a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Soluzione

Abbiamo

$$p(t) \in \mathcal{P}_{n-1}[t] \iff \exists a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \mid p(t) = \sum_{h=0}^{n-1} a_h t^h \quad (1)$$

La base canonica è

$$\Sigma = \{e_0(t), e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)\} \quad (2)$$

essendo

$$e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad e_2(t) = t^2, \dots, e_{n-1}(t) = t^{n-1}, \quad (3)$$

cosicché

$$p(t) = \sum_{h=0}^{n-1} a_h e_h(t) \quad (4)$$

Evidentemente

$$\dim \mathcal{P}_{n-1}[t] = \text{card}(\Sigma) = n$$

Lo spazio duale è

$$\mathcal{P}_{n-1}^*[t] = \text{hom}(\mathcal{P}_{n-1}[t], \mathbb{R})$$

per cui

$$\phi \in \mathcal{P}_{n-1}^*[t] \implies \phi : \mathcal{P}_{n-1}[t] \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\langle p(t), \phi \rangle = \left\langle \sum_{h=0}^{n-1} a_h e_h(t), \phi \right\rangle = \sum_{h=0}^{n-1} a_h \underbrace{\langle e_h(t), \phi \rangle}_{=\phi_h} = \sum_{h=0}^{n-1} \phi_h a_h,$$

dove

$$\phi_h = \langle e_h(t), \phi \rangle, \quad (h = 0, 1, \dots, n-1)$$

sono gli elementi della matrice rappresentativa (in Σ) della forma lineare ϕ . Ne consegue che in questo caso particolare, il più generale vettore dello spazio duale è una funzione lineare omogenea dei coefficienti del generico polinomio di grado $\leq n-1$:

$$\phi(a_0, a_1, \dots, a_n) = \phi_0 a_0 + \phi_1 a_1 + \dots + \phi_{n-1} a_{n-1} \quad (5)$$