La funzione di autocorrelazione

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

1 Processi ergodici

Ci proponiamo di eseguire una decomposizione spettrale di una generica variabile aleatoria $y(t)$. Definiamo la *media d'insieme*:

$$\langle y(t)\rangle_t = \int_Y yP(y,t)\,dy, \tag{1}$$

dove Y è l'insieme dei valori assunti da $y(t)$ e $P(y,t)$ è la densità di probabilità: $P(y_0,t)\,dy$ è la probabilità infinitesima che una misura di y all'istante t fornisca un valore appartenente all'intervallo infinitesimo $[y_0, y_0+dy]$. In questo lavoro siamo interessati ai processi aleatori *stazionari,* i.e. processi in cui la densità di probabilità non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(y,t) \equiv 0 \Longrightarrow P(y,t) \equiv P(y) \tag{2}$$

Per un processo aleatorio stazionario la (1) diventa:

$$\langle y(t)\rangle = \int_Y yP(y)\,dy \tag{3}$$

La stazionarietà di un processo aleatorio è una condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'*ergodicità*. Più precisamente, un processo aleatorio è **ergodico** se le medie di insieme coincidono con le medie temporali:

$$\langle y(t)\rangle = \overline{y(t)}, \qquad \forall y(t) \text{ ergodico} \tag{4}$$

dove

$$\overline{y(t)} = \lim_{\Delta t\to+\infty}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} y(t)\,dt \tag{5}$$

I processi aleatori che ci interessano sono ergodici, perciò per il calcolo dei valori medi ci riferiamo alla (3). Una grandezza statisticamente significativa è la *varianza*:

$$\left\langle [y(t)-\langle y(t)\rangle]^2\right\rangle = \left\langle y(t)^2\right\rangle - \langle y(t)\rangle^2, \tag{6}$$

che nel caso di media nulla si riduce a $\left\langle y(t)^2\right\rangle$. Risulta

$$\overline{W} = \left\langle y(t)^2\right\rangle, \tag{7}$$

dove $\overline{W}$ è la potenza totale della grandezza $y(t)$.

1.1 La funzione di autocorrelazione

Il valore di una grandezza deterministica y_{det} in un istante t' è univocamente determinato dal valore assunto in un generico istante $t<t'$. In simboli:

$$y_{\text{det}}(t) \underset{\text{evoluzione deterministica}}{\longrightarrow} y_{\text{det}}(t'), \quad \forall t' > t \tag{8}$$

Per una grandezza aleatoria y_{al} il valore assunto in t' non è univocamente determinato dai valori assunti a tempi $t<t'$. Però può accadere:

$$y_{al}(t) \underset{\text{evoluzione deterministica}}{\longrightarrow} P(y_{al}(t')), \quad \forall t' > t, \tag{9}$$

essendo $P\left(y_{al}\left(t'\right)\right)$ la densità di probabilità di misurare il valore $y_{al}\left(t'\right)$. Secondo la (9) la probabilità che in un istante $t' > t$ la grandezza y_{al} assuma un assegnato valore, è univocamente determinata dal valore assunto da y_{al} al tempo t. Ciò si esprime dicendo che $y_{al}\left(t'\right)$ è *correlato* a $y_{al}\left(t\right)$. Nel caso contrario, diremo che i suddetti valori sono *scorrelati*. Poniamo

$$y_1 = y\left(t\right), \quad y_2 = y\left(t'\right), \qquad \forall t, t'$$

dove abbiamo omesso il pedice "al". Se $P\left(y_1, y_2\right)$ è la densità di probabilità congiunta, si ha:

$$\langle y_1 y_2 \rangle = \iint_{Y^2} y_1 y_2 P\left(y_1, y_2\right) dy_1 dy_2 \tag{10}$$

È chiaro che

$$y_1 \text{ e } y_2 \text{ sono valori correlati [scorrelati]} \Longleftrightarrow P\left(y_1, y_2\right) \neq 0 \; \left[P\left(y_1, y_2\right) = 0\right] \tag{11}$$

Ripristinando la notazione precedente:

$$\langle y\left(t\right) y\left(t'\right) \rangle = \begin{cases} \neq 0, & \text{se } y\left(t\right) \text{ e } y\left(t'\right) \text{ sono correlati} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{12}$$

Ciò suggerisce di definire la seguente grandezza

$$\varphi\left(t' - t\right) = \langle y\left(t\right) y\left(t'\right) \rangle \tag{13}$$

che si chiama **funzione di autocorrelazione** della variabile aleatoria $y\left(t\right)$. Eseguendo il cambio di variabile:

$$\tau = t' - t,$$

si ha:

$$\varphi\left(\tau\right) = \langle y\left(t\right) y\left(t + \tau\right) \rangle, \tag{14}$$

che esprime φ in funzione di τ, per un assegnato istante t che a volte viene posto pari a zero:

$$\varphi\left(\tau\right) = \langle y\left(0\right) y\left(\tau\right) \rangle, \tag{15}$$

o ciò che è lo stesso:

$$\varphi\left(t\right) = \langle y\left(0\right) y\left(t\right) \rangle \tag{16}$$

Per $\tau \to +\infty$ la correlazione sparisce, cosicché la funzione $\varphi\left(\tau\right)$ è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{|\tau| \to +\infty} \varphi\left(\tau\right) = 0 \tag{17}$$

Dalla (13) segue la parità $(+1)$ della funzione di autocorrelazione:

$$\varphi\left(\tau\right) \equiv \varphi\left(-\tau\right) \tag{18}$$