Somme di Riemann

Matematica Open Source http://www.extrabyte.info

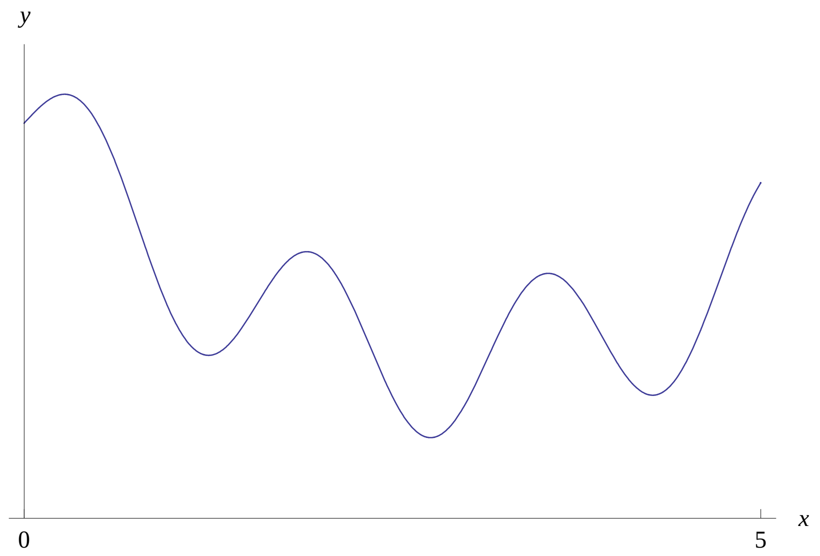
```
(*opzioni per i grafici di funzione*)
SetOptions[
  Plot,
  BaseStyle → {FontFamily → "Georgia", FontSize → 9}
 ];
```

Assegnata la funzione

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5 + \sin(4x),$

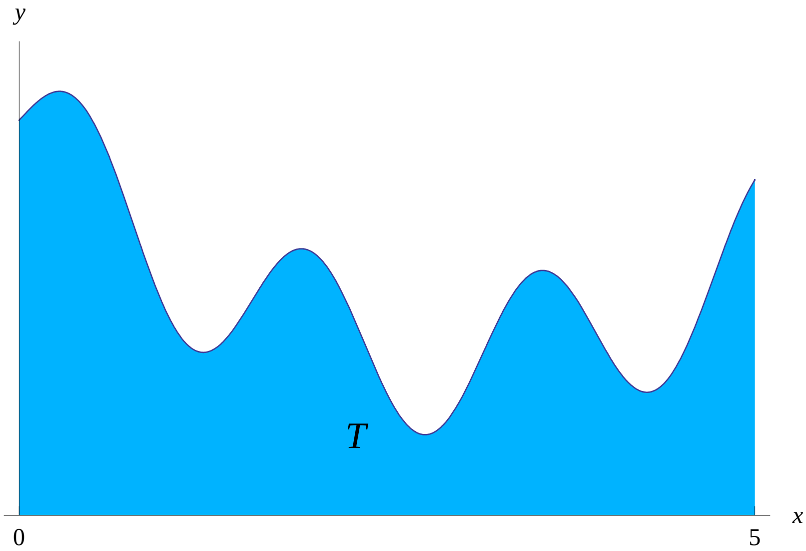
tracciamo il grafico della sua restrizione all'intervallo $[0, 5]$

```
f[x_] := Sin[4 * x] + 1/3 x^2 - 2 * x + 5

grafico = Plot[
  f[x], {x, 0, 5},
  PlotRange → {0, 6},
  Ticks → {{0, 5}, None},
  AxesLabel → {"x", "y"}
 ]
```



Dal grafico vediamo che la restrizione di f all'intervallo [0,5] ha segno costante. Precisamente è $f(x)>0$ per ogni $x \in [0,\ 5]$. Nel grafico seguente evidenziamo il rettangoloide T di base $[0,\ 5]$ relativo alla suddetta restrizione.

```
rettangoloide = Plot[
  f[x], {x, 0, 5},
  Ticks → {{0, 5}, None},
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotRange → {0, 6},
  Filling → Axis,
  FillingStyle → Hue[0.55],
  Epilog → {Text["T", {2.3, 1}]}]
```



Eseguiamo una partizione $\mathcal{D} = \mathcal{D}(x_0,\ x_1,\ \ldots.,\ x_n)$ di $[0,5]$. Dobbiamo assegnare n-1 punti x_k tali che $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n=5$ che generano n intervalli $[x_k,\ x_{k+1}]$ per k=0,1,...,n-1. L' ascissa x_k può essere generata con il comando

```
Random[]
```

che, però, restituisce un numero casuale (reale) appartenente all'intervallo [0,1]. Ne consegue che le opzioni sono tali che **`Random[Real,{0,5}]`**.

```
lista[n_] :=
  lista[n] = Table[Random[Real, {0, 4.9}], {k, 0, n - 1}] //
    Sort;
```

Ad esempio, per n=7 supponiamo di aver generato la seguente lista:

```
ascissapoints0 = {1.30643, 2.09191, 2.30615, 2.45832,
   2.80006, 3.99299};
```

a cui vanno aggiunti gli estremi dell'intervallo [0,5]:

```
ascissapoints = Append[Prepend[ascissapoints0, 0], 5]
```

```
{0, 1.30643, 2.09191, 2.30615,
 2.45832, 2.80006, 3.99299, 5}
```

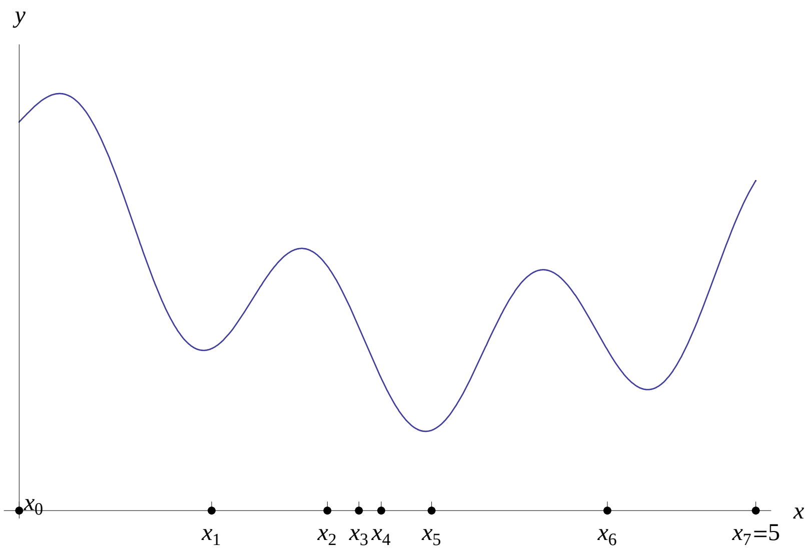
Enumeriamo le ascisse dei punti della decomposizione nei seguenti modi:

```
x[k_] := ascissapoints0[[k]]
```

```
xx[k_] := ascissapoints[[k]]
```

Posizioniamo i punti sull'asse x:

```
graficopartizione0 = Plot[
  f[x], {x, 0, 5},
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotRange → {-0.1, 6},
  Ticks →
   {{0, {x[1], "x1"}, {x[2], "x2"}, {x[3], "x3"},
     {x[4], "x4"}, {x[5], "x5"}, {x[6], "x6"}, {5, "x7=5"}},
    None},
  Epilog → {Table[Point[{x[k], 0}], {k, 1, 6}],
    Point[{0, 0}], Point[{5, 0}], Text["x0", {0.1, 0.11}]}
 ]
```



Costruiamo i rettangoli $\mathcal{R}'_k = [x_k,\ x_{k+1}] \times [0,\ m_k]$,
essendo m_k il minimo di f in $[x_k,\ x_{k+1}]$. Per la ricerca del minimo utilizziamo il comando :

```
FindMinimum[f[x], {x, 1.3}]
```

{2.06188, {x → 1.252}}

Cioè R'_0 = [0, 1.30643]×[0,2.06188]. In maniera simile per i rimanenti rettangoli.

```
FindMinimum[f[x], {x, 2.1}]
```

{1.02018, {x → 2.75894}}

```
FindMinimum[f[x], {x, 2.9}]
```

FindMinimum::lstol :
The line search decreased the step size to within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal but was unable to find a sufficient decrease in the function. You may need more than MachinePrecision digits of working precision to meet these tolerances. ≫

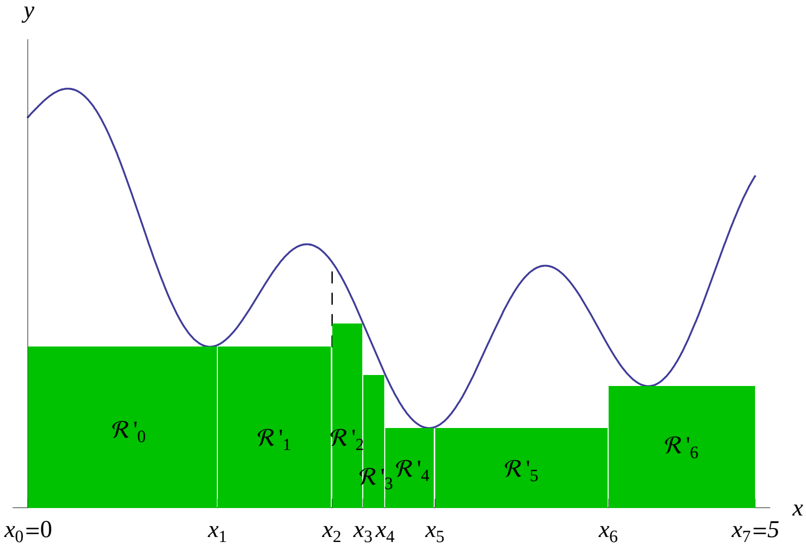
{1.02018, {x → 2.75894}}

```
FindMinimum[f[x], {x, 3.9}]
```

{1.55722, {x → 4.26652}}

Ora siamo in grado di costruire il plurirettangolo inscritto in *T*, essendo quest'ultimo il rettangoloide di base [0,5] relativo a *f*.

```
pluriRettangolo1 = Plot[
  f[x], {x, 0, 5},
  PlotStyle → Thickness[0.0025],
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotRange → {0, 6},
  Ticks →
   {{{x[1], "x1"}, {x[2], "x2"}, {x[3], "x3"},
     {x[4], "x4"}, {x[5], "x5"}, {x[6], "x6"},
     {5, "x7=5"}, {0, "x0=0"}}, None},
  Epilog → {
    {RGBColor[0, 0.76, 0],
     Rectangle[{0, 0}, {x[1] - 0.009, 2.06188}]},
    {RGBColor[0, 0.76, 0],
     Rectangle[{x[1], 0}, {x[2] - 0.009, 2.06188}]},
    {Dashed, Line[{{x[2], 2.06188}, {x[2], f[x[2]]}}]},
    {RGBColor[0, 0.76, 0],
     Rectangle[{x[2], 0}, {x[3] - 0.009, f[x[3]]}]},
    {RGBColor[0, 0.76, 0],
     Rectangle[{x[3], 0}, {x[4] - 0.009, f[x[4]]}]},
    {RGBColor[0, 0.76, 0],
     Rectangle[{x[4], 0}, {x[5] - 0.009, 1.02018}]},
    {RGBColor[0, 0.76, 0],
     Rectangle[{x[5], 0}, {x[6] - 0.009, 1.02018}]},
    {RGBColor[0, 0.76, 0],
     Rectangle[{x[6], 0}, {5, 1.55722}]},
    Text["ℛ'0", {.7, 1}],
    Text["ℛ'1", {1.7, 0.9}],
    Text["ℛ'2", {2.2, 0.9}],
    Text["ℛ'3", {2.4, 0.4}],
    Text["ℛ'4", {2.65, 0.5}],
    Text["ℛ'5", {3.4, 0.5}],
    Text["ℛ'6", {4.5, 0.8}]
   }
 ]
```



Determiniamo le aree dei singoli rettangoli:

```
μR0 = x[1] * 2.06188; μR1 = (x[2] - x[1]) * 2.06188;
μR2 = (x[3] - x[2]) * f[x[3]]; μR3 = (x[4] - x[3]) * f[x[4]];
μR4 = (x[5] - x[4]) * 1.02018; μR5 = (x[6] - x[5]) * 1.02018;
μR6 = (5 - x[6]) * 1.55722;
```

Per quanto precede, il plurirettangolo inscritto in T è $\pi(\mathcal{D}) = \bigcup_k \mathcal{R}'_k$ è $s_{\mathcal{D}} = \mu(\pi(\mathcal{D})) = \sum_{k=0}^{5} \mu(\mathcal{R}'_k)$. La sua area è:

```
sD = μR0 + μR1 + μR2 + μR3 + μR4 + μR5 + μR6
```

```
8.21128
```

Determiniamo ora l'area del plurirettangolo $\Pi(\mathcal{D})$ circoscritto a T. A tale scopo, costruiamo i rettangoli $\mathcal{R}''_k = [x_k, x_{k+1}] \times [0, M_k]$, dove M_k è il massimo assoluto di f nell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$.

```
FindMaximum[f[x], {x, 0.1}]
```

```
{5.36642, {x → 0.274832}}
```

```
FindMaximum[f[x], {x, 1.3}]
```

```
{3.37373, {x → 1.91817}}
```

```
FindMaximum[f[x], {x, 2.3}]
```

```
{3.37373, {x → 1.91817}}
```

```
FindMaximum[f[x], {x, 2.8}]
```

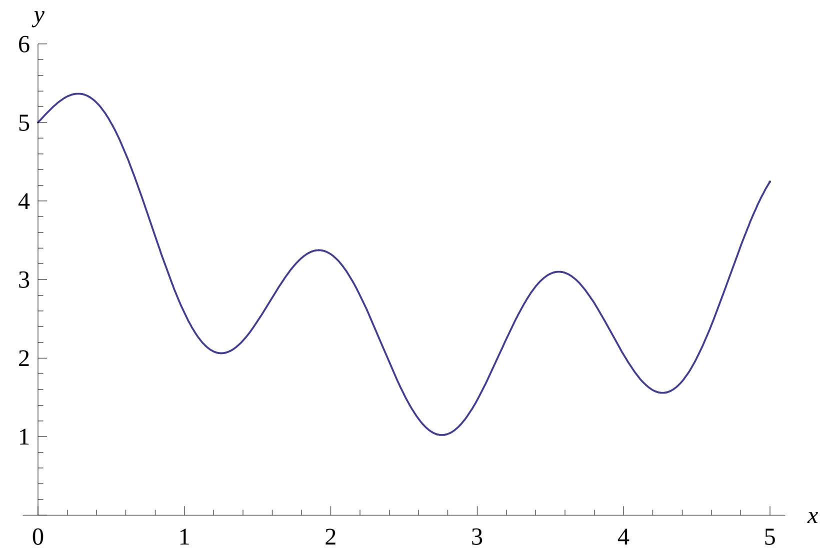
FindMaximum::lstol :
The line search decreased the step size to within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal but was unable to find a sufficient increase in the function. You may need more than MachinePrecision digits of working precision to meet these tolerances.

```
{3.0993, {x → 3.55756}}
```

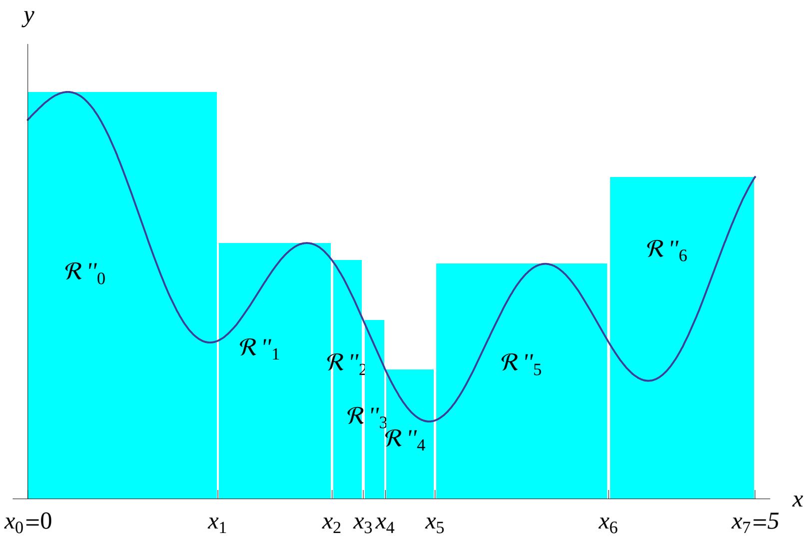
```
MAXrettangolo0 =
  Graphics[{RGBColor[0, 1, 1],
    Rectangle[{0, 0}, {x[1] - 0.009, 5.36642}]}];
MAXrettangolo1 =
  Graphics[{RGBColor[0, 1, 1],
    Rectangle[{x[1] + 0.009, 0}, {x[2] - 0.009, 3.37373}]}];
MAXrettangolo2 =
  Graphics[{RGBColor[0, 1, 1],
    Rectangle[{x[2] + 0.009, 0}, {x[3] - 0.009, f[x[2]]}]}];
MAXrettangolo3 =
  Graphics[{RGBColor[0, 1, 1],
    Rectangle[{x[3] + 0.009, 0}, {x[4] - 0.009, f[x[3]]}]}];
MAXrettangolo4 =
  Graphics[{RGBColor[0, 1, 1],
    Rectangle[{x[4] + 0.009, 0}, {x[5] - 0.009, f[x[4]]}]}];
MAXrettangolo5 =
  Graphics[{RGBColor[0, 1, 1],
    Rectangle[{x[5] + 0.009, 0}, {x[6] - 0.009, 3.0993}]}];
MAXrettangolo6 =
  Graphics[{RGBColor[0, 1, 1],
    Rectangle[{x[6] + 0.009, 0}, {5 - 0.009, f[5]}]}];
```

```
testo0 = Graphics[Text["ℛ''0", {0.4, 3}]];
testo1 = Graphics[Text["ℛ''1", {1.6, 2.0}]];
testo2 = Graphics[Text["ℛ''2", {2.2, 1.8}]];
testo3 = Graphics[Text["ℛ''3", {2.34, 1.1}]];
testo4 = Graphics[Text["ℛ''4", {2.6, 0.8}]];
testo5 = Graphics[Text["ℛ''5", {3.4, 1.8}]];
testo6 = Graphics[Text["ℛ''6", {4.4, 3.3}]];
```

```
plurirettangolo2a = Plot[
  f[x], {x, 0, 5},
  PlotStyle → Thickness[0.0025],
  AxesLabel → {"x", "y"},
  PlotRange → {0, 6}
 ]
```



```
plurirettangolo2 =
 Show[MAXrettangolo0, MAXrettangolo1, testo0,
  MAXrettangolo2, testo1, testo2, MAXrettangolo3,
  testo3, MAXrettangolo4, testo4, MAXrettangolo5,
  testo5, MAXrettangolo6, testo6, plurirettangolo2a,
  Axes -> True, AspectRatio → 0.6,
  PlotRange → {0, 6},

  AxesLabel → {"x", "y"},
  Ticks → {{{x[1], "x1"}, {x[2], "x2"}, {x[3], "x3"},
     {x[4], "x4"}, {x[5], "x5"}, {x[6], "x6"},
     {5, "x7=5"}, {0, "x0=0"}}, None}]
```




```
μR0Max = x[1] * 5.36642;
μR1Max = (x[2] - x[1]) * 3.37373;

μR2Max = (x[3] - x[2]) * f[x[2]];
μR3Max = (x[4] - x[3]) * f[x[3]];
μR4Max = (x[5] - x[4]) * f[x[4]];
μR5Max = (x[6] - x[5]) * 3.0993;
μR6Max = (5 - x[6]) * f[5];
```

È $\Pi(\mathcal{D}) = \bigcup_k \mathcal{R}'_k$ è $S_{\mathcal{D}} = \mu(\Pi(\mathcal{D})) = \sum_{k=0}^{5} \mu(\mathcal{R}''_k)$, per cui l'area è data da:

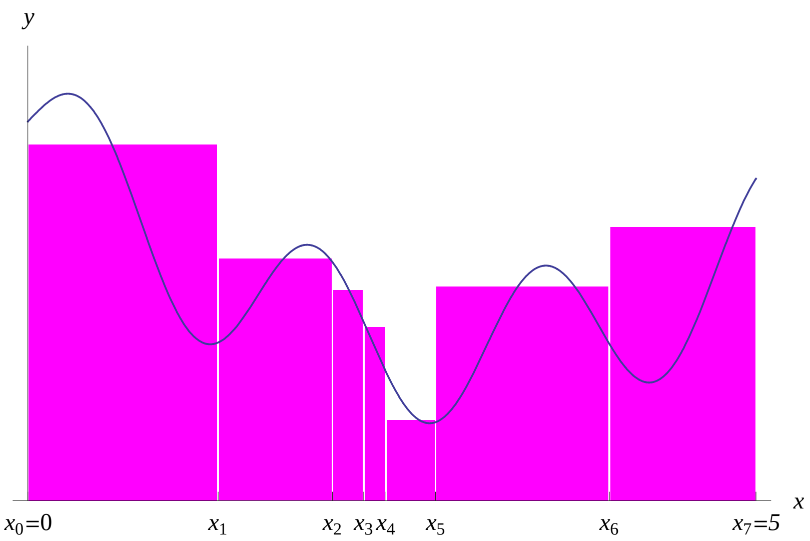
```
SD = μR0Max + μR1Max + μR2Max + μR3Max + μR4Max + μR5Max +
  μR6Max

19.2483
```

Denotando con $\mu(T)$ l'area del rettangoloide T, si ha che $s_{\mathcal{D}}$ e $S_{\mathcal{D}}$ approssimano rispettivamente per difetto e per eccesso la grandezza $\mu(T)$. Nel Procediamo caso della partizione assegnata, abbiamo ottenuto $s_{\mathcal{D}} = 8.21128$, $S_{\mathcal{D}} = 19.2483$.
ora Procediamo ora al calcolo delle somme di Riemann $\sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\,(x_{k+1} - x_k)$, dove $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ preso ad arbitrio. Quindi :

```
ξ[k_] := ξ[k] = Random[Real, {xx[k], xx[k + 1]}];

σ = Sum[f[ξ[k]] (xx[k + 1] - xx[k]), {k, 1, 6}]

13.3202

rettangolo[k_] :=
 Graphics[{RGBColor[1, 0, 1],
   Rectangle[{xx[k] + 0.006, 0},
    {xx[k + 1] - 0.006, f[ξ[k]]}]}]
```

Il plurirettangolo (che non è inscritto in T e nè circoscritto a T) è:

```
plurirettangolo3 =
 Show[Table[rettangolo[k], {k, 1, 7}], plurirettangolo2a,
  AspectRatio → 0.6,
  PlotRange → {0, 6},
  Axes -> True,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  Ticks → {{{x[1], "x1"}, {x[2], "x2"}, {x[3], "x3"},
     {x[4], "x4"}, {x[5], "x5"}, {x[6], "x6"},
     {5, "x7=5"}, {0, "x0=0"}}, None}]
```



Studiamo il comportamento delle somme di Riemann al variare di n.

```
lista1[n_] := lista1[n] = Append[Prepend[lista[n], 0], 5]
```

```
Clear[x, xx, ξ, σ]
```

```
xx[k_, n_] := lista1[n][[k]]
```

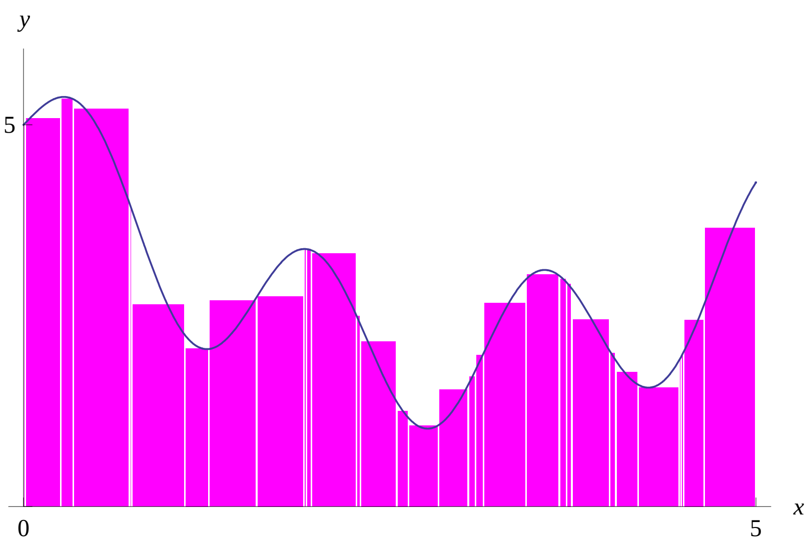
```
ξ[k_, n_] := ξ[k, n] = Random[Real, {xx[k, n], xx[k + 1, n]}];
```

```
rettangolo[k_, n_] :=
 Graphics[{RGBColor[1, 0, 1],
   Rectangle[{xx[k, n] + 0.006, 0},
    {xx[k + 1, n] - 0.006, f[ξ[k, n]]}]}]
```

```
plurirettangolo4[n_] :=
 Show[Table[rettangolo[k, n], {k, 1, n + 1}],
  plurirettangolo2a, AspectRatio → 0.6,
  PlotRange → {0, 6},
  Axes -> True,
  AxesLabel → {"x", "y"},
  Ticks → {{0, 5}, {0, 5}}]
```

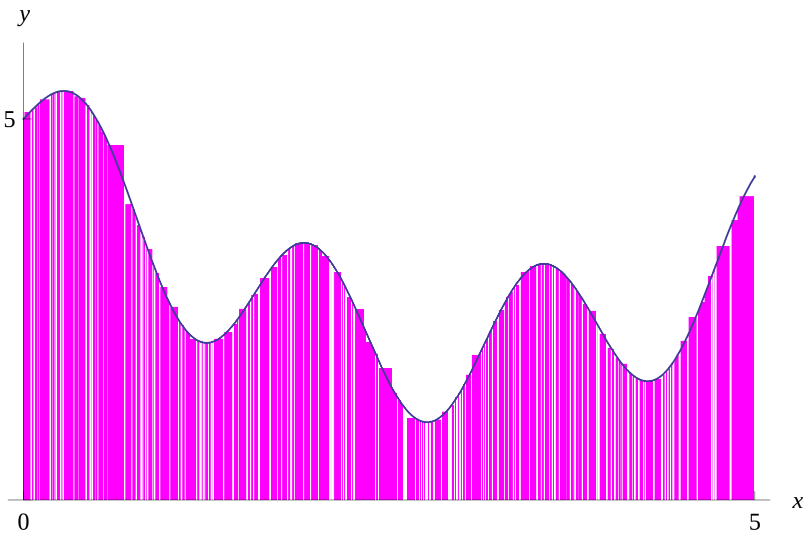
Per n=30

```
plurirettangolo4[30]
```



Per n=230

```
plurirettangolo4[230]
```




```
σ[n_] := Sum[f[ξ[k, n]] (xx[k + 1, n] - xx[k, n]),
  {k, 1, n + 1}]
```

```
somme1 = TableForm[
  Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 50}],
  TableHeadings →
   {None, {StyleForm["n", FontWeight -> "Bold"],
     StyleForm["area", FontWeight -> "Bold"]}}
 ]
```

n	**area**
1	17.7746
2	18.1985
3	16.6631
4	13.0674
5	16.8741
6	16.0329
7	16.6791
8	12.7648
9	16.2088
10	16.1664
11	13.9258
12	12.9496
13	13.3325
14	14.0125
15	13.6027
16	13.339
17	14.7892

```
18  13.5835
19  15.2578
20  12.8716
21  12.8153
22  14.0094
23  14.0386
24  14.258
25  13.7581
26  14.7962
27  14.493
28  13.5819
29  14.2927
30  14.326
31  14.2157
32  13.0895
33  13.8347
34  13.8485
35  14.2122
36  14.4674
37  13.6388
38  13.9672
39  13.7991
40  14.3872
41  13.8916
42  13.6487
43  14.1909
44  14.0086
45  13.4557
46  14.0548
47  13.9857
48  14.3193
49  13.6426
50  13.8339
```

L'area del rettangoloide è:

```
μT = Integrate[f[x], {x, 0, 5}] // N
```

```
14.0369
```

```
Clear[somme1]
```

```
somme1 = Table[{n, σ[n]}, {n, 1, 250}];
```

```
graficosomme1 = ListPlot[
   somme1,
   PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], PointSize[0.006]},
   Joined → False,
   PlotRange → All
  ];

sommearea = Show[
  graficosomme1,
  Plot[μT, {x, 0, 250}],
  AxesLabel → {"n", "σ𝒟, μ(T)"},
  Ticks → {Automatic, {{μT, "μ(T)"}}}
 ]
```

Siamo ora in grado di plottare la successione $\{\sigma\}$ visualizzando il limite per $n \to +\infty$ equivalente al limite per $\delta \to 0$, dove δ è la norma della partizione.