

Réponse temporelle d'un système électrique de type passe-bas
du second ordre à une excitation sinusoidale

—S. PIOCH—

da ven. 10 apr. '20 al ven. 24 apr.'20

Notation	Nom	Unité	Nombre
V_0	tension continue	V	$\mathbb{R}$
A	amplitude maximale	V	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\omega_1 (= 2\pi f_1)$	pulsation (fréquence)	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}(\text{Hz})$	$\mathbb{R}_{>0}$
t	temps	s	$\mathbb{R}_{>0}$
ϕ	phase à l'origine	rad	$[0 ; 2\pi]$
ω_0	pulsation propre (naturelle)	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$\mathbb{R}_{>0}$
ζ	coefficient d'amortissement	—	$\mathbb{R}$
K	amplification	—	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

TABLE 1 – Nomenclature des grandeurs utilisées dans le document.

Problème : déterminer l'expression de la tension de sortie $v_o(t)$ d'un système électrique passe-bas du second ordre soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $v_i(t) = V_0 + A \sin(\omega_1 t + \phi)$ pour les valeurs de coefficient d'amortissement $\zeta : > 1$, $= 1$, $\in]0, 1[$, $= 0$, $\in]-1, 0[$ et < -1 .

1 Rapide rappels sur le système passe-bas du 2^e ordre

En supposant les conditions initiales nulles du système électrique, on montre que la transformée de Laplace de l'équation différentielle (linéaire du 2^e ordre à coefficients constants) donne accès à la fonction de transfert (f.d.t.) $H(s)$. Elle s'écrit sous la forme canonique suivante :

$$H(s) = \frac{V_O}{V_I}(s) = K \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (1)$$

où s est la variable de Laplace, $V_O(s)$ et $V_I(s)$ sont respectivement la transformée de Laplace de la tension de sortie $v_o(t)$ et de la tension d'entrée $v_i(t)$.

Par ailleurs, l'étude de la stabilité des systèmes linéaire passe, entre autre, par la recherche des pôles de la f.d.t. $H(s)$. Ces derniers annulent le dénominateur de la f.d.t. $H(s)$ et ont pour expression :

$$p_{1,2} = a \pm b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = -\omega_0 \zeta \\ b = \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \quad (2)$$

Suivant la valeur de ζ la quantité b est un nombre réel ou un nombre complexe. Exprimée en fonction de ses pôles $p_{1,2}$, la f.d.t. $H(s)$ est alors :

$$H(s) = \frac{V_O}{V_I}(s) = K \omega_0^2 \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (3)$$

2 Quelle méthode pour résoudre ce problème ?

On peut citer, sans ordre de priorité, quelques méthodes pour répondre à ce type de problème :

- déterminer la solution homogène et la solution particulière (de même nature que le signal d'entrée) de l'équation différentielle, puis la somme de ces deux solutions forment la solution recherchée ;

- passer l'équation différentielle vers un modèle d'état et résoudre une exponentielle de matrice, à l'image de ce qui se fait en automatique pour la commande et l'observation de systèmes ;
- calculer le produit de convolution entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du système. Cette dernière s'obtient à partir d'une intégrale de Mellin-Fourier accompagnée du théorème des résidus.

L'approche présentée dans cette étude s'inscrit dans la philosophie de la troisième méthode. Cependant, on décide d'appliquer cette intégrale et ce théorème des résidus directement sur la grandeur $V_O(s)$:

$$v_o(t) = \frac{1}{i2\pi} \int V_O(s) e^{st} ds = \frac{1}{i2\pi} \int F(s) ds \quad | \quad F(s) = H(s)V_I(s) e^{st} \quad (4)$$

où $V_I(s)$ est d'expression :

$$\begin{aligned} V_I(s) &= \mathcal{L}[v_i(t)](s) = \int_0^{+\infty} v_i(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{(V_0 + A \sin \phi) s^2 + A \omega_1 \cos \phi s + V_0 \omega_1^2}{s(s^2 + \omega_1^2)} \\ &= \frac{(V_0 + A \sin \phi) s^2 + A \omega_1 \cos \phi s + V_0 \omega_1^2}{s(s - p_3)(s - p_4)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_3 = i\omega_1 \\ p_4 = \bar{p}_3 = -i\omega_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

$F(s)$ devient, après avoir remplacé $H(s)$ et $V_I(s)$:

$$F(s) = K\omega_0^2 \sum_{n=0}^3 F_n(s) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_1(s) = (V_0 + A \sin \phi) \frac{s e^{st}}{4 \prod_{m=1}^4 (s - p_m)} \\ F_2(s) = A \omega_1 \cos \phi \frac{e^{st}}{4 \prod_{m=1}^4 (s - p_m)} \\ F_3(s) = V_0 \omega_1^2 \frac{e^{st}}{4 s \prod_{m=1}^4 (s - p_m)} \end{cases} \quad (6)$$

L'intégrale de $F(s)$ est, en permutant les opérateurs somme et intégrale, une somme de trois intégrales notées I_1, I_2 et I_3 :

$$\int F(s) ds = K\omega_0^2 \sum_{n=1}^3 I_n \quad (7)$$

Le calcul de chacune d'elle s'effectue grâce au théorème des résidus, dont les deux premières par la relation :

$$I_n = \int F_n(s) ds = (2i\pi) \sum_{m=1}^4 \text{Res}(F_n(s), s = p_m), \quad \text{pour } n = 1, 2 \quad (8)$$

et la dernière à l'aide de l'expression :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int F_3(s) \, ds = (2i\pi) \sum_{m'=0}^4 \text{Res}(F_3(s), s = p'_m) \\ &= (2i\pi) \left(\text{Res}(F_3(s), s = p_0) + \sum_{m=1}^4 \text{Res}(F_3(s), s = p_m) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

où $p_0 = 0$ et $p_m (m = 1, 2 \dots 4)$ sont les résidus de $F(s)$.

Pour des raisons de simplicité d'écriture, dans toute la suite du document le résidu p_m d'une fonction F_n est noté :

$$\text{Res}(F_n(s), s = p_m) \longrightarrow R_{p_m; n} \quad (10)$$

Les trois intégrales substituées dans (7) donnent l'intégrale de $F(s)$:

$$\int F(s) \, ds = K\omega_0^2 (2i\pi) \left(R_{p_0; 3} + \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^4 R_{p_m; n} \right) \quad (11)$$

Par conséquent, cette dernière injectée dans (12) donne l'expression générale de la tension de sortie $v_o(t)$:

$$v_o(t) = K\omega_0^2 \left(R_{p_0; 3} + \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^4 R_{p_m; n} \right) \quad (12)$$

3 Expression de la tension de sortie

3.1 Cas n° 1 : $\zeta > 1$

a) Calcul des résidus de F_1

— résidu en p_1 :

$$\begin{aligned} R_{p_1; 1} &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1) F_1(s)] \\ &\propto \frac{p_1 e^{p_1 t}}{(p_1 - p_2) (p_1^2 + \omega_1^2)} \end{aligned} \quad (13)$$

— résidu en p_2 :

$$\begin{aligned} R_{p_2; 1} &\propto \lim_{s \rightarrow p_2} [(s - p_2) F_1(s)] \\ &\propto \frac{p_2 e^{p_2 t}}{(p_2 - p_1) (p_2^2 + \omega_1^2)} \end{aligned} \quad (14)$$

— résidu en p_3 :

$$\begin{aligned} R_{p_3; 1} &\propto \lim_{s \rightarrow p_3} [(s - p_3) F_1(s)] \\ &\propto \frac{p_3 e^{p_3 t}}{(p_3 - p_1) (p_3 - p_2) (p_3 - p_4)} \end{aligned} \quad (15)$$

— résidu en $p_4 = \overline{p_3}$:

$$\begin{aligned} R_{\overline{p_3};1} &\propto \lim_{s \rightarrow \overline{p_3}} [(s - \overline{p_3}) F_1(s)] \\ &\propto \frac{\overline{p_3} e^{\overline{p_3} t}}{(\overline{p_3} - p_1)(\overline{p_3} - p_2)(\overline{p_3} - p_3)} \end{aligned} \quad (16)$$

La somme des deux premiers résidus est alors proportionnelle à :

$$\begin{aligned} R_{p_1;1} + R_{p_2;1} &\propto \frac{p_1 (p_2^2 + \omega_1^2) e^{p_1 t} - p_2 (p_1^2 + \omega_1^2) e^{p_2 t}}{(p_1 - p_2)(p_1^2 + \omega_1^2)(p_2^2 + \omega_1^2)} \\ \Rightarrow R_{p_1;1} + R_{p_2;1} &\propto \frac{e^{at} (a(\omega_0^2 + \omega_1^2) \operatorname{sh}(bt) - b(\omega_0^2 - \omega_1^2) \operatorname{ch}(bt))}{b((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2)} \end{aligned} \quad (17)$$

Et la somme des deux derniers résidus est :

$$\begin{aligned} R_{p_3;1} + R_{\overline{p_3};1} &\propto \frac{p_3 (\overline{p_3} - p_1)(\overline{p_3} - p_2) e^{p_3 t} - \overline{p_3} (p_3 - p_1)(p_3 - p_2) e^{\overline{p_3} t}}{(p_3 - \overline{p_3})(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(\overline{p_3} - p_1)(\overline{p_3} - p_2)} \\ \Rightarrow R_{p_3;1} + R_{\overline{p_3};1} &\propto \frac{2\zeta\omega_0\omega_1 \sin(\omega_1 t) + (\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos(\omega_1 t)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

La somme de tous les résidus associés à $F_1(s)$ est d'expression :

$$\sum_{m=1}^4 R_{p_m;1} = (V_0 + A \sin \phi) (rt_1(t) + rp_1(t)) \text{ avec } \begin{cases} rt_1(t) = \frac{e^{at} (a(\omega_0^2 + \omega_1^2) \operatorname{sh}(bt) - b(\omega_0^2 - \omega_1^2) \operatorname{ch}(bt))}{b((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2)} \\ rp_1(t) = \frac{2\zeta\omega_0\omega_1 \sin(\omega_1 t) + (\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos(\omega_1 t)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2} \end{cases} \quad (19)$$

INTERPRÉTATION. — Cette expression renseigne sur la présence de deux régimes. Un premier régime donné par $rt_1(t)$ qui signifie un « régime transitoire » car proportionnel à une exponentielle décroissante ($e^{at} = e^{-\omega_0 \zeta t}$). De ce fait, ce régime tend à disparaître rapidement et cela d'autant plus vite pour des temps supérieurs à $(\omega_0 \zeta)^{-1}$. Le second régime interprété par $rp_1(t)$ indique un « régime permanent » de nature oscillatoire pur, vibrant à la fréquence d'entrée f_1 . Cette interprétation laisse subodorer que ces deux régimes seront également présents dans les calculs amenés à être développés ci-après, ainsi que ceux pour les autres cas de ζ investigués.

b) Calcul des résidus de F_2 — résidu en p_1 :

$$\begin{aligned} R_{p_1;2} &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1) F_2(s)] \\ &\propto \frac{e^{p_1 t}}{(p_1 - p_2) (p_1^2 + \omega_1^2)} \end{aligned} \quad (20)$$

— résidu en p_2 :

$$\begin{aligned} R_{p_2;2} &\propto \lim_{s \rightarrow p_2} [(s - p_2) F_2(s)] \\ &\propto \frac{e^{p_2 t}}{(p_2 - p_1) (p_2^2 + \omega_1^2)} \end{aligned} \quad (21)$$

Effectuons dès à présent la somme entre ces deux résidus :

$$\begin{aligned} R_{p_1;2} + R_{p_2;2} &\propto \frac{(p_2^2 + \omega_1^2) e^{p_1 t} - (p_1^2 + \omega_1^2) e^{p_2 t}}{(p_1 - p_2) (p_1^2 + \omega_1^2) (p_2^2 + \omega_1^2)} \\ \Rightarrow R_{p_1;2} + R_{p_2;2} &\propto \frac{e^{at} \left((a^2 + b^2 + \omega_1^2) \operatorname{sh}(bt) - ab \operatorname{ch}(bt) \right)}{b \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} \end{aligned} \quad (22)$$

— résidu en p_3 :

$$\begin{aligned} R_{p_3;2} &\propto \lim_{s \rightarrow p_3} [(s - p_3) F_2(s)] \\ &\propto \frac{e^{p_3 t}}{(p_3 - p_1) (p_3 - p_2) (p_3 - p_4)} \end{aligned} \quad (23)$$

— résidu en $p_4 = \overline{p_3}$:

$$\begin{aligned} R_{\overline{p_3};2} &\propto \lim_{s \rightarrow \overline{p_3}} [(s - \overline{p_3}) F_2(s)] \\ &\propto \frac{e^{\overline{p_3} t}}{(\overline{p_3} - p_1) (\overline{p_3} - p_2) (\overline{p_3} - p_3)} \end{aligned} \quad (24)$$

Quant à la somme de ces deux derniers résidus, il vient :

$$\begin{aligned} R_{p_3;2} + R_{\overline{p_3};2} &\propto \frac{(\overline{p_3} - p_1) (\overline{p_3} - p_2) e^{p_3 t} - (p_3 - p_1) (p_3 - p_2) e^{\overline{p_3} t}}{(p_3 - \overline{p_3}) (p_3 - p_1) (p_3 - p_2) (\overline{p_3} - p_1) (\overline{p_3} - p_2)} \\ \Rightarrow R_{p_3;2} + R_{\overline{p_3};2} &\propto \frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t) + 2a\omega_1 \cos(\omega_1 t)}{\omega_1 \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} \end{aligned} \quad (25)$$

Ainsi, la somme de tous les résidus de $F_2(s)$ donne l'expression :

$$\sum_{m=1}^4 R_{p_m;2} = A\omega_1 \cos \phi (rt_2(t) + rp_2(t)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} rt_2(t) = \frac{e^{at} \left((a^2 + b^2 + \omega_1^2) \operatorname{sh}(bt) - ab \operatorname{ch}(bt) \right)}{b \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} \\ rp_2(t) = \frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t) + 2a\omega_1 \cos(\omega_1 t)}{\omega_1 \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} \end{cases} \quad (26)$$

c) Calcul des résidus de F_3

Contrairement aux deux cas traités précédemment, l'expression de $F_3(s)$ (cf. (6)) fait apparaître un pôle supplémentaire $p_0 = 0$. Dans l'ordre d'apparition des résidus, nous avons :

— résidu en p_0 :

$$\begin{aligned}
 R_{p_0;3} &= V_0 \omega_1^2 \lim_{s \rightarrow p_0} [(s - p_0) F_3(s)] \\
 &= V_0 \omega_1^2 \frac{1}{p_1 p_2 p_3 \bar{p}_3} \\
 &= V_0 \omega_1^2 \frac{1}{(\omega_0 \omega_1)^2} \\
 &\Rightarrow \boxed{R_{p_0;3} = \frac{V_0}{\omega_0^2}}
 \end{aligned} \tag{27}$$

— résidu en p_1 :

$$\begin{aligned}
 R_{p_1;3} &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} [(s - p_1) F_3(s)] \\
 &\propto \frac{e^{p_1 t}}{p_1 (p_1 - p_2) (p_1^2 + \omega_1^2)}
 \end{aligned} \tag{28}$$

— résidu en p_2 :

$$\begin{aligned}
 R_{p_2;3} &\propto \lim_{s \rightarrow p_2} [(s - p_2) F_3(s)] \\
 &\propto \frac{e^{p_2 t}}{p_2 (p_2 - p_1) (p_2^2 + \omega_1^2)}
 \end{aligned} \tag{29}$$

— résidu en p_3 :

$$\begin{aligned}
 R_{p_3;3} &\propto \lim_{s \rightarrow p_3} [(s - p_3) F_3(s)] \\
 &\propto \frac{e^{p_3 t}}{p_3 (p_3 - p_1) (p_3 - p_2) (p_3 - \bar{p}_3)}
 \end{aligned} \tag{30}$$

— résidu en $p_4 = \bar{p}_3$:

$$\begin{aligned}
 R_{\bar{p}_3;3} &\propto \lim_{s \rightarrow \bar{p}_3} [(s - \bar{p}_3) F_3(s)] \\
 &\propto \frac{e^{\bar{p}_3 t}}{\bar{p}_3 (\bar{p}_3 - p_1) (\bar{p}_3 - p_2) (\bar{p}_3 - p_3)}
 \end{aligned} \tag{31}$$

La somme entre les résidus $R_{p_1;3}$ et $R_{p_2;3}$ vaut :

$$\begin{aligned}
 R_{p_1;3} + R_{p_2;3} &\propto \frac{p_2 (p_2^2 + \omega_1^2) e^{p_1 t} - p_1 (p_1^2 + \omega_1^2) e^{p_2 t}}{p_1 p_2 (p_1 - p_2) (p_1^2 + \omega_1^2) (p_2^2 + \omega_1^2)} \\
 &\Rightarrow R_{p_1;3} + R_{p_2;3} \propto \frac{e^{at} \left(a (a^2 + 3b^2 + \omega_1^2) \operatorname{sh}(bt) - b (b^2 + 3a^2 + \omega_1^2) \operatorname{ch}(bt) \right)}{b \omega_0^2 \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta \omega_0 \omega_1)^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Pour la somme des résidus $R_{p_3;3}$ et $R_{\bar{p}_3;3}$, on a :

$$\begin{aligned} R_{p_3;3} + R_{\bar{p}_3;3} &\propto \frac{\bar{p}_3 (\bar{p}_3 - p_1) (\bar{p}_3 - p_2) e^{p_3 t} - p_3 (p_3 - p_1) (p_3 - p_2) e^{\bar{p}_3 t}}{p_3 \bar{p}_3 (p_3 - \bar{p}_3) (p_3 - p_1) (p_3 - p_2) (\bar{p}_3 - p_1) (\bar{p}_3 - p_2)} \\ &\Rightarrow R_{p_3;3} + R_{\bar{p}_3;3} \propto \frac{2a\omega_1 \sin(\omega_1 t) - (\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2 \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} \end{aligned} \quad (33)$$

Ainsi, en prenant uniquement les résidus $p_m (m = 1, 2 \dots 4)$ la somme des résidus de $F_3(s)$ donne la relation :

$$\sum_{m=1}^4 R_{p_m;3} = V_0 \omega_1^2 (rt_3(t) + rp_3(t)) \text{ avec } \begin{cases} rt_3(t) = \frac{e^{at} \left(a(a^2 + 3b^2 + \omega_1^2) \operatorname{sh}(bt) - b(b^2 + 3a^2 + \omega_1^2) \operatorname{ch}(bt) \right)}{b\omega_0^2 \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} \\ rp_3(t) = \frac{2a\omega_1 \sin(\omega_1 t) - (\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos(\omega_1 t)}{\omega_1^2 \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} \end{cases} \quad (34)$$

En substituant les expressions (19), (26), (27) et (34) dans (12), la relation de la tension de sortie $v_o(t)$ est, lorsque $\zeta > 1$:

$$v_o(t) = KV_0 + rt(t) + rp(t) \quad (35)$$

avec :

$$\begin{cases} rt(t) = \frac{K\omega_0^2}{b \left((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2 \right)} e^{at} \left\{ \left[A \left(a \left[\omega_0^2 + \omega_1^2 \right] \sin \phi + \omega_1 \left[a^2 + b^2 + \omega_1^2 \right] \cos \phi \right) + \right. \right. \\ \left. \left. aV_0 \left(\omega_0^2 + \omega_1^2 + (\omega_1/\omega_0)^2 (a^2 + 3b^2 + \omega_1^2) \right) \right] \operatorname{sh}(bt) - \right. \\ \left. b \left[A \left(\left[\omega_0^2 - \omega_1^2 \right] \sin \phi + a\omega_1 \cos \phi \right) + \right. \right. \\ \left. \left. V_0 \left(\omega_0^2 - \omega_1^2 + (\omega_1/\omega_0)^2 (b^2 + 3a^2 + \omega_1^2) \right) \right] \operatorname{ch}(bt) \right\} \\ rp(t) = \frac{AK\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2} \left\{ (\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t + \phi) - 2\zeta\omega_0\omega_1 \cos(\omega_1 t + \phi) \right\} \end{cases} \quad (36)$$

L'expression $rp(t)$ peut s'écrire différemment. En effet, son numérateur de la forme :

$$\operatorname{num}[rp(t)] \propto \alpha \sin(\omega_1 t + \phi) + \beta \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (37)$$

où :

$$\alpha = \omega_0^2 - \omega_1^2 \begin{cases} > 0 & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ < 0 & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad \text{et } \beta = -2\zeta\omega_0\omega_1 \Rightarrow \beta < 0 \quad (38)$$

se transforme en :

$$\text{num}[rp(t)] \propto \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{cases} \cos(\omega_1 t + \phi - \theta_1) \mid \theta_1 = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ \cos(\omega_1 t + \phi - \theta_2) \mid \theta_2 = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right) & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (39)$$

puis se simplifie en :

$$\text{num}[rp(t)] \propto \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \begin{cases} \sin\left(\omega_1 t + \phi - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right)\right) & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ \sin\left(\omega_1 t + \phi - \pi - \arctan\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right)\right) & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (40)$$

Remplaçant cette dernière expression ainsi que les quantités α et β dans $rp(t)$, donnée en (36), le régime permanent $rp(t)$ prend alors la forme de deux expressions, suivant que K est positif ou négatif, chacune fonction du module et de la phase de la f.d.t. de $H(s)$:

$$rp(t) = A |H(i\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \phi + \varphi) \quad (41)$$

où :

$$\begin{aligned} \forall K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |H(i\omega_1)| &= \frac{|K|\omega_0^2 \sqrt{[\omega_0^2 - \omega_1^2]^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2}}{[\omega_0^2 - \omega_1^2]^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2} \\ \Rightarrow |H(i\omega_1)| &= |K| \frac{1}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left(2\zeta \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \right\}^{1/2}} \end{aligned} \quad (42)$$

et :

$$\text{si } K > 0 \Rightarrow K = |K|e^{i0}, \quad \varphi = - \begin{cases} \arctan\left(\frac{2\zeta \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ \pi/2 & \text{si } \omega_1 = \omega_0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{2\zeta \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (43)$$

$$\text{si } K < 0 \implies K = |K|e^{i\pi}, \varphi = \begin{cases} \pi - \arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} \right) & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ \pi/2 & \text{si } \omega_1 = \omega_0 \\ -\arctan \left(\frac{2\zeta \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} \right) & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (44)$$

3.2 Cas n° 2 : $\zeta = 1$

Pour cette valeur de coefficient d'amortissement, l'expression de la f.d.t. $H(s)$ se simplifie :

$$H(s) = K \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} = K\omega_0^2 \frac{1}{(s - p_1)^2} \quad (45)$$

où $p_{1,2} = a = -\omega_0$ est un « pôle double ». De ce fait, la relation de $F(s)$ change également :

$$F(s) = K\omega_0^2 \sum_{n=0}^3 F_n(s) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_1(s) = (V_0 + A \sin \phi) \frac{se^{st}}{(s - p_1)^2 (s - p_3) (s - p_4)} \\ F_2(s) = A\omega_1 \cos \phi \frac{e^{st}}{(s - p_1)^2 (s - p_3) (s - p_4)} \\ F_3(s) = V_0\omega_1^2 \frac{e^{st}}{s (s - p_1)^2 (s - p_3) (s - p_4)} \end{cases} \quad (46)$$

Les calculs des résidus des fonctions F_n en $p = p_{1,2}$ diffèrent de ceux déterminés précédemment. Alors que les résidus en p_0, p_3 et $p_4 = \overline{p_3}$ des fonctions F_n s'effectuent de façon identique au cas précédent, seules les expressions changent.

a) Calcul des résidus de F_1

— 1^{er} résidu en p_1 :

$$\begin{aligned} R_{p_1;1}^{n^\circ 1} = R_{p_1;1} &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}} \left([s - p_1]^2 F_1(s) \right) \\ &\propto \frac{p_1 e^{p_1 t}}{p_1^2 + \omega_1^2} \end{aligned} \quad (47)$$

— 2^e résidu en p_1 :

$$\begin{aligned}
 R_{p_1;1}^{n^o 2} = R_{p_2;1} &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}} \left([s - p_1]^2 F_1(s) \right) \\
 &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{se^{st}}{s^2 + \omega_1^2} \right) \\
 &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{(e^{st} + ste^{st})(s^2 + \omega_1^2) - se^{st}2s}{(s^2 + \omega_1^2)^2} \\
 &\propto \frac{e^{p_1 t}}{(p_1^2 + \omega_1^2)^2} \left(\omega_1^2 - p_1^2 + tp_1 [\omega_1^2 + p_1^2] \right)
 \end{aligned} \tag{48}$$

— résidu en p_3 :

$$R_{p_3;1} \propto \frac{p_3 e^{p_3 t}}{(p_3 - p_1)^2 (p_3 - \bar{p}_3)} \tag{49}$$

— résidu en $p_4 = \bar{p}_3$:

$$R_{\bar{p}_3;1} \propto \frac{\bar{p}_3 e^{\bar{p}_3 t}}{(\bar{p}_3 - p_1)^2 (\bar{p}_3 - p_3)} \tag{50}$$

La somme des résidus en p_1 est :

$$\begin{aligned}
 R_{p_1;1} + R_{p_2;1} &\propto \frac{e^{p_1 t}}{(p_1^2 + \omega_1^2)^2} \left(p_1 [p_1^2 + \omega_1^2] + \omega_1^2 - p_1^2 + tp_1 [\omega_1^2 + p_1^2] \right) \\
 &\propto \frac{e^{-\omega_0 t}}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \left(\omega_1^2 - \omega_0^2 - \omega_0 [\omega_0^2 + \omega_1^2] [1 + t] \right)
 \end{aligned} \tag{51}$$

Et, la somme des résidus en p_3 et $p_4 = \bar{p}_3$ donne :

$$\begin{aligned}
 R_{p_3;1} + R_{\bar{p}_3;1} &\propto \frac{1}{p_3 - \bar{p}_3} \left(\frac{p_3 e^{p_3 t}}{(p_3 - p_1)^2} - \frac{\bar{p}_3 e^{\bar{p}_3 t}}{(\bar{p}_3 - p_1)^2} \right) \\
 &\propto \frac{1}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \left(2\omega_0 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + [\omega_0^2 - \omega_1^2] \cos(\omega_1 t) \right)
 \end{aligned} \tag{52}$$

La somme des résidus de $F_1(s)$ est :

$$\sum_{m=1}^4 R_{p_m;1} = (V_0 + A \sin \phi) (rt_1(t) + rp_1(t)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} rt_1(t) = \frac{e^{-\omega_0 t} (\omega_1^2 - \omega_0^2 - \omega_0 [\omega_0^2 + \omega_1^2] [1 + t])}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \\ rp_1(t) = \frac{2\omega_0 \omega_1 \sin(\omega_1 t) + [\omega_0^2 - \omega_1^2] \cos(\omega_1 t)}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \end{cases}$$

(53)

b) Calcul des résidus de F_2

En s'appuyant sur ce qui vient d'être fait sur F_1 pour les résidus $p_{1,2}$, on allège certains détails d'écriture.

— 1^{er} résidu en p_1 :

$$R_{p_1;2}^{n^o 1} = R_{p_1;2} \propto \frac{e^{p_1 t}}{p_1^2 + \omega_1^2} \tag{54}$$

— 2^e résidu en p_1 :

$$\begin{aligned} R_{p_1;2}^{\text{n}^\circ 2} &= R_{p_2;2} \propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{st}}{s^2 + \omega_1^2} \right) \\ &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{te^{st}(s^2 + \omega_1^2) - e^{st}2s}{(s^2 + \omega_1^2)^2} \\ &\propto \frac{e^{p_1 t} (t[p_1^2 + \omega_1^2] - 2p_1)}{(p_1^2 + \omega_1^2)^2} \end{aligned} \quad (55)$$

— résidu en p_3 :

$$R_{p_3;2} \propto \frac{e^{p_3 t}}{(p_3 - p_1)^2 (p_3 - \bar{p}_3)} \quad (56)$$

— résidu en $\bar{p}_3$:

$$R_{\bar{p}_3;2} \propto \frac{e^{\bar{p}_3 t}}{(\bar{p}_3 - p_1)^2 (\bar{p}_3 - p_3)} \quad (57)$$

Comme pour F_1 , on subodore que la somme de tous ces résidus donne la relation :

$$\boxed{\sum_{m=1}^4 R_{p_m;2} = A\omega_1 \cos \phi (rt_2(t) + rp_2(t)) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} rt_2(t) = \frac{e^{-\omega_0 t} ([\omega_0^2 + \omega_1^2] [1 + t] + 2\omega_0)}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \\ rp_2(t) = \frac{([\omega_0^2 - \omega_1^2] \sin(\omega_1 t) - 2\omega_0 \omega_1 \cos(\omega_1 t))}{\omega_1 (\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \end{cases}} \quad (58)$$

dans laquelle les résidus en $p_{1,2}$ contribuent à $rt_2(t)$, et les résidus en p_3 et $\bar{p}_3$ fournissent $rp_2(t)$.

c) Calcul des résidus de F_3

— résidu en $p_0 = 0$:

$$\begin{aligned} R_{p_0;3} &= V_0 \omega_1^2 \frac{1}{p_1^2 |p_3|^2} \\ &= V_0 \cancel{\omega_1^2} \frac{1}{\omega_0^2 \cancel{\omega_1^2}} \\ &\Rightarrow \boxed{R_{p_0;3} = \frac{V_0}{\omega_0^2}} \end{aligned} \quad (59)$$

— 1^{er} résidu en p_1 :

$$R_{p_1;3}^{\text{n}^\circ 1} = R_{p_1;3} \propto \frac{e^{p_1 t}}{p_1 (p_1^2 + \omega_1^2)} \quad (60)$$

— 2^e résidu en p_1 :

$$\begin{aligned} R_{p_1;3}^{n^o 2} &= R_{p_2;3} \propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{st}}{s(s^2 + \omega_1^2)} \right) \\ &\propto \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{te^{st}s(s^2 + \omega_1^2) - e^{st}(3s^2 + \omega_1^2)}{s^2(s^2 + \omega_1^2)^2} \\ &\propto \frac{e^{p_1 t} (tp_1 [p_1^2 + \omega_1^2] - 3p_1^2 - \omega_1^2)}{p_1^2 (p_1^2 + \omega_1^2)^2} \end{aligned} \quad (61)$$

— résidu en p_3 :

$$R_{p_3;3} \propto \frac{e^{p_3 t}}{p_3 (p_3 - p_1)^2 (p_3 - \bar{p}_3)} \quad (62)$$

— résidu en $\bar{p}_3$:

$$R_{\bar{p}_3;3} \propto \frac{e^{\bar{p}_3 t}}{\bar{p}_3 (\bar{p}_3 - p_1)^2 (\bar{p}_3 - p_3)} \quad (63)$$

Dans un esprit identique à ceux de F_1 et de F_2 , la somme de tous ces résidus donne la relation :

$$R_{p_0;3} + \sum_{m=1}^4 R_{p_m;3} = \frac{V_0}{\omega_0^2} + V_0 \omega_1^2 (rt_3(t) + rp_3(t)) \text{ avec } \begin{cases} rt_3(t) = -\frac{e^{-\omega_0 t} (\omega_0 [\omega_0^2 + \omega_1^2] [1+t] + 3\omega_0^2 + \omega_1^2)}{\omega_0^2 (\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \\ rp_3(t) = -\frac{(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos(\omega_1 t) + 2\omega_0 \omega_1 \sin(\omega_1 t)}{\omega_1^2 (\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \end{cases} \quad (64)$$

où les résidus $p_{1,2}$ fournissent rt_3 , et les résidus p_3 et $\bar{p}_3$ donnent rp_3 .

Si on substitue les relations (53), (58) et (64) dans (12), on montre, après quelques simplifications, que la tension de sortie instantanée v_o est d'expression :

$$v_o(t) = KV_0 + rt(t) + rp(t) \quad (65)$$

avec :

$$\begin{cases} rt(t) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} e^{-\omega_0 t} \left\{ A \left(2\omega_0 \omega_1 \cos \phi - (\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \phi + (\omega_0^2 + \omega_1^2) (\omega_1 \cos \phi - \omega_0 \sin \phi) (1+t) \right) - \right. \\ \left. V_0 \left(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 3\omega_1^2 + \omega_1^2 (\omega_1/\omega_0)^2 + \omega_0 (\omega_0^2 + \omega_1^2) \left(1 + (\omega_1/\omega_0)^2 \right) (1+t) \right) \right\} \\ rp(t) = \frac{AK\omega_0^2}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} \left\{ (\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin(\omega_1 t + \phi) - 2\omega_0 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \phi) \right\} \end{cases} \quad (66)$$

Le lecteur peut remarquer qu'en remplaçant $\zeta = 1$ dans la relation $rp(t)$ de (36), les expressions des régimes permanents sont identiques. De cette façon, le régime permanent de (66) peut s'écrire en fonction du module et de la phase de la f.d.t. $H(s)$ où ces derniers s'obtiennent

en remplaçant $\zeta = 1$ dans les expressions (42) à (44). Par conséquent, l'expression finale de la tension de sortie instantanée v_o est :

$$v_o(t) = KV_0 + rt(t) + rp(t) \quad (67)$$

où :

$$\begin{cases} rt(t) = \frac{K\omega_0^2}{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2} e^{-\omega_0 t} \left\{ A \left(2\omega_0\omega_1 \cos \phi - (\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \phi + (\omega_0^2 + \omega_1^2) (\omega_1 \cos \phi - \omega_0 \sin \phi) (1+t) \right) - \right. \\ \left. V_0 \left(\omega_0^2 - \omega_1^2 + 3\omega_1^2 + \omega_1^2 (\omega_1/\omega_0)^2 + \omega_0 (\omega_0^2 + \omega_1^2) \left(1 + (\omega_1/\omega_0)^2 \right) (1+t) \right) \right\} \\ rp(t) = A |H(i\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \phi + \varphi) \end{cases} \quad (68)$$

avec :

$$\forall K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |H(i\omega_1)| = |K| \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2} \quad (69)$$

et :

$$\text{si } K > 0 \implies K = |K|e^{i0}, \varphi = - \begin{cases} \arctan \left(\frac{2 \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2} \right) & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ \pi/2 & \text{si } \omega_1 = \omega_0 \\ \pi + \arctan \left(\frac{2 \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2} \right) & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (70)$$

$$\text{si } K < 0 \implies K = |K|e^{i\pi}, \varphi = \begin{cases} \pi - \arctan \left(\frac{2 \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2} \right) & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ \pi/2 & \text{si } \omega_1 = \omega_0 \\ - \arctan \left(\frac{2 \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2} \right) & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (71)$$

3.3 Cas n° 3 : $\zeta \in]0; 1[$

Lorsque $\zeta \in]0; 1[$, la quantité b des pôles $p_{1,2}$ (cf. (2)) devient un nombre imaginaire noté ib' pour donner la paire de pôles complexes conjugués suivante :

$$p_{1,2} = a \pm ib' \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = -\omega_0 \zeta \\ b' = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases} \quad (72)$$

Compte tenu de tout ce qui a été fait en amont, il est inutile de calculer à nouveau les résidus de chaque fonction $F_n(s)$ pour avoir l'expression de la tension de sortie. Seul le régime transitoire de cette dernière est modifié, le régime permanent restant inchangé. Par conséquent, en opérant le changement $b \rightarrow ib'$ dans (36), se rappelant que $\text{sh}(ix) = i \sin x$ et $\text{ch}(ix) = \cos x$, l'expression de la tension de sortie $v_o(t)$ est :

$$v_o(t) = KV_0 + rt(t) + rp(t) \quad (73)$$

où :

$$\begin{cases} rt(t) = \frac{K\omega_0^2}{b'((\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_1)^2)} e^{at} \left\{ \left[A(a[\omega_0^2 + \omega_1^2] \sin \phi + \omega_1[a^2 - b'^2 + \omega_1^2] \cos \phi) + \right. \right. \\ \left. \left. aV_0(\omega_0^2 + \omega_1^2 + (\omega_1/\omega_0)^2(a^2 - 3b'^2 + \omega_1^2)) \right] \sin(b't) - \right. \\ \left. b' \left[A([\omega_0^2 - \omega_1^2] \sin \phi + a\omega_1 \cos \phi) + \right. \right. \\ \left. \left. V_0(\omega_0^2 - \omega_1^2 + (\omega_1/\omega_0)^2(3a^2 - b'^2 + \omega_1^2)) \right] \cos(b't) \right\} \\ rp(t) = A|H(i\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \phi + \varphi) \end{cases} \quad (74)$$

avec module $|H(i\omega_1)|$ et phase φ donnés par les relations (42) à (44).

3.4 Cas n° 4 : $\zeta = 0$

Pour un coefficient d'amortissement nul, les pôles $p_{1,2}$ de (72) deviennent des imaginaires purs, soient $a = 0$ et $b' \rightarrow b''$, tels que :

$$p_{1,2} = \pm ib'' \quad \text{avec} \quad b'' = \omega_0 \quad (75)$$

En remplaçant $a = 0$ et $b' \rightarrow b''$ dans (74) ainsi que dans (42) à (44), on déduit après quelques étapes la tension de sortie $v_o(t)$:

$$v_o(t) = KV_0 + rt(t) + rp(t) \quad (76)$$

avec :

$$\begin{cases} rt(t) = -\frac{K\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \left\{ A \left(\omega_1 \cos \phi \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \sin \phi \cos(\omega_0 t) \right) + V_0 \omega_0 \left(1 - (\omega_1/\omega_0)^2 \right) \cos(\omega_0 t) \right\} \\ rp(t) = A |H(i\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \phi + \varphi) \end{cases} \quad (77)$$

où :

$$\forall K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, |H(i\omega_1)| = |K| \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \right|} \quad (78)$$

et :

$$\text{pour } K > 0 \implies K = |K|e^{i0}, \varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ -\pi/2 & \text{si } \omega_1 = \omega_0 \\ -\pi & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (79)$$

$$\text{pour } K < 0 \implies K = |K|e^{i\pi}, \varphi = \begin{cases} \pi & \text{si } \omega_1 < \omega_0 \\ \pi/2 & \text{si } \omega_1 = \omega_0 \\ 0 & \text{si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \quad (80)$$

3.5 Cas n° 5 : $\zeta \in]-1; 0[$

Ici, les pôles $p_{1,2}$ de $H(s)$ forment également une paire de pôles complexes conjugués, comme pour le cas $\zeta \in]0; 1[$, à la différence que la partie réelle a est strictement positive. Ainsi, l'expression de la tension de sortie $v_o(t)$ admet la même relation que (73) et (74) sauf que, le régime transitoire $rt(t)$ croît exponentiellement. Par conséquent, le filtre (système) est alors *instable*.

3.6 Cas n° 6 : $\zeta < -1$

Les pôles $p_{1,2}$ définis en (2) restent des nombres réels non nuls, mais le nombre a est à présent strictement positif, le nombre b reste le même qui plus est strictement positif. Pour ces raisons, la tension de sortie $v_o(t)$ possède les mêmes expressions que (35), (36), et (42) à (44), à l'exception que le régime transitoire $rt(t)$ diverge. Donc, le filtre (système) est à nouveau *instable*.

4 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, une étude rigoureuse et élégante a permis de déterminer l'expression générale de la tension en sortie d'un système électrique de nature passe-bas du 2^e ordre soumis à une tension d'entrée sinusoïdale, pour une valeur réelle quelconque de coefficient d'amortissement. Il en ressort que quel que soit la valeur de ce coefficient, la tension de sortie s'exprime toujours comme la somme de trois termes :

- un « régime transitoire » de courte durée car proportionnel à une exponentielle décroissante, pour toute valeur d'amortissement positive ;
- un « régime permanent » de même nature que le signal d'entrée et oscillant donc à la même fréquence, seule l'amplitude de la tension de sortie change. Une fois le régime transitoire dissipé, la tension de sortie est alors approximée par l'expression du régime permanent. Dans ce cas, on dit que le système fonctionne en « régime sinusoïdal forcé » ;
- un terme constant, donc indépendant du temps, vu comme une valeur moyenne (*offset*, en anglais), de la tension de sortie au cours du régime forcé.

Une poursuite à ce travail est d'exploiter ces expressions générales pour rechercher les relations des tensions en sortie des filtres du 2^e ordre de nature passe-haut, passe-bande et réjecteur (coupe-bande).