Matematica Open Source

$$\frac{d}{dx}f(x) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad \int f(x)\,dx \quad \oint_{\Gamma} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

Esercizi svolti sul Calcolo Integrale

Marcello Colozzo

$$\int f(x)\,dx$$

Indice

I Teoria dell'integrazione di una funzione reale di variabile reale 7

1 Integrale definito 9
1.1 Funzioni primitive . . . 9
1.2 Misura degli insiemi piani . . . 11
1.3 Area del rettangoloide . . . 15
1.4 Definizione di integrale definito . . . 19
1.5 Proprietà dell'integrale definito . . . 21
1.5.1 Proprietà additiva . . . 22
1.5.2 Proprietà distributiva . . . 22
1.6 Teorema della media . . . 23
1.7 Teorema fondamentale del calcolo integrale . . . 24

2 Integrale indefinito 27
2.1 Definizione di integrale indefinito . . . 27
2.2 Integrali indefiniti fondamentali . . . 28

II Esercizi sull'integrazione di una funzione reale di variabile reale 29

3 Integrali indefiniti 31
3.1 Integrali indefiniti fondamentali . . . 31
3.2 Soluzioni . . . 31
3.2.1 Soluzioni . . . 32
3.3 Integrali di somme di funzioni . . . 33
3.3.1 Soluzioni . . . 33
3.4 Integrali di una $f(\xi(x))$, con $\xi(x)$ funzione lineare . . . 34
3.4.1 Soluzioni . . . 34
3.5 Integrazione per introduzione sotto il segno di integrale . . . 37
3.5.1 Calcolare gli integrali: . . . 37
3.5.2 Soluzioni . . . 38
3.5.3 Soluzioni . . . 44
3.5.4 Calcolare gli integrali: . . . 51
3.6 Integrazione per sostituzione . . . 54
3.6.1 Calcolare gli integrali: . . . 56
3.6.2 Soluzioni . . . 57
3.6.3 Calcolare i seguenti integrali utilizzando le sostituzioni trigonometriche 60
3.7 $\int \sin^2 x dx$, $\int \cos^2 x dx$ . . . 63
3.8 Integrazione per parti . . . 63
3.8.1 Calcolare gli integrali: . . . 64
3.8.2 Soluzioni . . . 64
3.8.3 Calcolare gli integrali: . . . 67

3.8.4 Soluzioni . . . 67
3.8.5 Calcolare i seguenti integrali applicando il metodo più opportuno . . 70
3.8.6 Soluzioni . . . 70
3.9 Integrali contenenti un trinomio di secondo grado . . . 71
3.9.1 Calcolare gli integrali: . . . 74
3.9.2 Soluzioni . . . 74
3.9.3 Calcolare gli integrali . . . 78
3.9.4 Soluzioni . . . 78
3.9.5 Calcolare gli integrali . . . 80
3.9.6 Soluzioni . . . 80
3.10 Coppia di integrali notevoli . . . 84
3.11 Esercizi riepilogativi sugli integrali contenenti un trinomio di secondo grado . 85
3.11.1 Calcolare i seguenti integrali . . . 85
3.11.2 Calcolare i seguenti integrali . . . 87
3.11.3 Soluzioni . . . 87
3.12 Integrazione delle funzioni razionali . . . 88
3.12.1 Funzioni razionali proprie . . . 89
3.12.2 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ . . . 95
3.12.3 Calcolare i seguenti integrali . . . 95
3.12.4 Soluzioni . . . 95
3.12.5 Calcolare i seguenti integrali . . . 102
3.12.6 Soluzioni . . . 103
3.12.7 Calcolare i seguenti integrali . . . 108
3.12.8 Soluzioni . . . 109
3.12.9 Calcolare i seguenti integrali . . . 115
3.12.10 Soluzioni . . . 115
3.12.11 Funzioni razionali improprie . . . 121
3.12.12 Calcolare i seguenti integrali . . . 121
3.12.13 Soluzioni . . . 122
3.13 $I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2-1)^n}$, $J_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ . . . 126
3.14 Integrali di funzioni irrazionali . . . 130
3.14.1 Integrali del “tipo 1” . . . 130
3.14.2 Calcolare i seguenti integrali . . . 130
3.14.3 Soluzioni . . . 130
3.14.4 Integrali del “tipo 2” . . . 137
3.14.5 Calcolare i seguenti integrali . . . 138
3.14.6 Integrali del “tipo 3” . . . 140
3.14.7 Calcolare i seguenti integrali . . . 141
3.14.8 Soluzioni . . . 141
3.14.9 Integrali del “tipo 4” . . . 143
3.14.10 Calcolare i seguenti integrali . . . 144
3.14.11 Soluzioni . . . 144
3.15 Esercizi riepilogativi sugli integrali di funzioni irrazionali . . . 148
3.15.1 Calcolare i seguenti integrali . . . 148
3.15.2 Soluzioni . . . 149
3.16 Integrali di funzioni trigonometriche . . . 159
3.16.1 Integrali del “tipo 1” . . . 159
3.16.2 Integrali del “tipo 2” . . . 164
3.16.3 Esercizi . . . 165
3.16.4 Soluzioni . . . 165
3.16.5 Integrali del “tipo 3” . . . 172
3.16.6 Esercizi . . . 173

3.16.7 Soluzioni . . . 173
3.16.8 Integrali del "tipo 4" . . . 174
3.16.9 Esercizi . . . 175
3.16.10 Soluzioni . . . 176
3.16.11 Esercizi riepilogativi sugli integrali trigonometrici . . . 183
3.17 Integrazione delle funzioni iperboliche . . . 188
3.17.1 Esercizi . . . 189

4 Integrali definiti **191**
4.1 Somme integrali . . . 191
4.1.1 Soluzioni . . . 191
4.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale. . . . 194

5 Estensione del concetto di integrale **205**
5.1 Introduzione . . . 205
5.2 Rettangoloide generalizzato . . . 207

A Integrali notevoli **219**
A.1 $\int \sin^2 x dx, \int \cos^2 x dx$ . . . 219
A.2 $\int \frac{dx}{(x^2-1)^n}$ . . . 219
A.3 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ . . . 220
A.4 $\int \frac{dx}{(\sin x)^n}; \int \frac{dx}{(\cos x)^n}$ . . . 220
A.5 $\int (\tan x)^n \, dx; \int (\cot x)^n \, dx$ . . . 221

Parte I

Teoria dell'integrazione di una funzione reale di variabile reale

Capitolo 1

Integrale definito

1.1 Funzioni primitive

Sia $f(x)$ una funzione reale definita in $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Definizione. Dicesi ***funzione primitiva*** o semplicemente ***primitiva*** di $f(x)$, ogni funzione reale $F(x)$ definita in (a,b) e tale che:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \tag{1.1}$$

Il problema fondamentale del calcolo integrale consiste nel determinare eventuali primitive di una assegnata funzione $f(x)$.
Osserviamo innanzitutto che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, per ogni $c \in \mathbb{R}$, $F(x)+c$ è ancora una primitiva di $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+c\right] = f(x) \tag{1.2}$$

In altri termini se una funzione è dotata di una primitiva, tale funzione ammette infinite primitive. Inoltre:

$$\left(F_1(x)\,,\ F_2(x)\ \text{ primitive di } f(x)\right) \Longrightarrow \left(F_1'(x) = f(x)\,,\ F_2'(x) = f(x)\right)$$

da cui:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0 \Longrightarrow F_1(x) - F_2(x) = C, \quad \text{essendo } C \text{ una costante reale}$$

Cioè due primitive di un'assegnata funzione $f(x)$ differiscono per una costante additiva.
Si conclude che se $f(x)$ ammette una primitiva $F(x)$ in (a,b), la totalità delle primitive di $f(x)$ è:

$$G(x) = F(x) + c, \tag{1.3}$$

con c variabile da $-\infty$ a $+\infty$.

***

Supponiamo ora che $f(x)$ sia continua in $[a,b]$ e non negativa. Consideriamo il grafico di $f(x)$, cioè la curva di equazione $\Gamma)y = f(x)$[1]. Sussite la seguente

Definizione. Dicesi ***rettangoloide di base*** $[a,b]$ ***relativo alla funzione*** $f(x)$, il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le f(x)\right\} \tag{1.4}$$

[1] Tale curva giace nel semipiano $y \ge 0$, giacché $f(x)$ è non negativa per ipotesi.

Ciò premesso, consideriamo il sottoinsieme di R:

$$\mathcal{R}(\xi) = \{(x, y) \in R \mid a \leq x \leq \xi,\ \ 0 \leq y \leq f(x)\}, \tag{1.5}$$

essendo $\xi \in [a, b]$. Quindi la funzione reale di variabile reale:

$$F : \xi \to mis\mathcal{R}(\xi), \tag{1.6}$$

essendo $mis\mathcal{R}(\xi)$ l'area di $\mathcal{R}(\xi)$.
Incrementiamo la variabile ξ:

$$\xi \to \xi + \Delta\xi \mid (\ \xi + \Delta\xi) \in [a, b]$$

Da cui l'incremento di $F(\xi)$:

$$\Delta F = F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)$$

Siano:

$$m(\xi) \stackrel{def}{=} \min_{[\xi, \xi+\Delta\xi]} f(x)$$
$$M(\xi) \stackrel{def}{=} \max_{[\xi, \xi+\Delta\xi]} f(x)$$

Senza perdita di generalità supponiamo che sia $\Delta\xi > 0$:

$$m(\xi)\Delta\xi \leq \Delta F \leq M(\xi)\Delta\xi \Longrightarrow m(\xi) \leq \frac{\Delta F}{\Delta\xi} \leq M(\xi)$$

Per una nota proprietà delle funzioni continue in un intervallo chiuso:

$$\left(m(\xi) \leq \frac{\Delta F}{\Delta\xi} \leq M(\xi)\right) \underset{\substack{f(x)\ \text{è continua} \\ \text{in}\ [\xi, \xi+\Delta\xi]}}{\Longrightarrow} \left(\exists \xi_* \in [\xi, \xi + \Delta\xi] \mid f(\xi_*) = \frac{\Delta F}{\Delta\xi}\right)$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\exists \theta \in [0, 1] \mid \frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi + \theta\Delta\xi)$$

Da ciò segue (tenendo conto della continuità di $f(x)$):

$$\lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{F(\xi + \Delta\xi) - F(\xi)}{\Delta\xi} = f(\xi) \tag{1.7}$$

Poiché ξ è una variabile muta, la (1.7) può scriversi:

$$F'(x) = f(x) \tag{1.8}$$

Cioè la funzione (1.6) che associa ad ogni $\xi \in [a, b]$ l'area di $\mathcal{R}(\xi)$ è una primitiva di $f(x)$. Da tale conclusione si evince che il problema della ricerca delle funzioni primitive di un'assegnata funzione $f(x)$ è direttamente connesso al problema della misura di un insieme piano.

1.2 Misura degli insiemi piani

Fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale (Oxy). Siano $A(a', a'')$, $B(b', b'')$ punti del piano, essendo $a' \leq a''$, $b' \leq b''$.

Definizione. Dicesi ***rettangolo chiuso di estremi*** A, B, l'insieme di punti:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ a' \leq x \leq b',\, a'' \leq y \leq b''\right\} \tag{1.9}$$

Definizione. Dicesi ***rettangolo aperto di estremi*** A, B, l'insieme di punti:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ a' < x < b',\, a'' < y < b''\right\} \tag{1.10}$$

Le suddette definizioni si specializzano nel caso in cui vale la disuguaglianza in senso stretto a sinistra o a destra (**reattangolo semiaperto a sinistra e rettangolo semiaperto a destra**, rispettivamente).

Definizione. Il ***centro*** del rettangolo (1.9 o 1.10) è il punto $C(x_0, y_0)$ tale che:

$$x_0 = \frac{a' + b'}{2}, \quad y_0 = \frac{a'' + b''}{2}$$

Le ***dimensioni*** del rettangolo (1.9 o 1.10) sono i numeri reali non negativi:

$$2\alpha = b' - a', \quad 2\beta = b'' - a''$$

Le ***semidimensioni*** del rettangolo sono i numeri reali non negativi α, β.

Assegnato il rettangolo chiuso (1.9):

$$\begin{aligned} 2x_0 &= a' + b' \\ 2\alpha &= b' - a', \end{aligned}$$

da cui:

$$x_0 - \alpha \leq x \leq x_0 + \alpha,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$|x - x_0| \leq \alpha$$

Similmente:

$$|y - y_0| \leq \beta$$

Si conclude che il rettangolo chiuso (1.9) può essere scritto come:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x - x_0| \leq \alpha,\ |y - y_0| \leq \beta\right\}$$

mentre il rettangolo chiuso (1.10):

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x - x_0| < \alpha,\ |y - y_0| < \beta\right\}$$

Definizione. Dicesi ***intorno rettangolare*** di centro P_0, ogni rettangolo aperto di centro P_0.

***

Assegnato un punto $P_0(x_0, y_0)$ e un $r \in (0, +\infty)$:

Definizione. Dicesi ***cerchio chiuso di centro*** P_0 **e raggio** r, l'insieme:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2\right\}$$

Definizione. Dicesi ***cerchio aperto di centro*** P_0 **e raggio** r, l'insieme:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\right\}$$

Definizione. Dicesi ***intorno circolare*** di centro P_0, ogni cerchio aperto di centro P_0.

Nel seguito ci riferiremo indifferentemente ad un intorno rettangolare o circolare di un assegnato punto P del piano. Indicheremo tale intorno con $I(P)$.

***

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$.

Definizione. A è ***limitato*** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ cerchio $\gamma \supset A$ di centro $O(0,0)$
A è ***non limitato*** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall$ cerchio γ di centro $O(0,0)$, $(\mathbb{R}-\gamma) \cap A \neq \emptyset$.

Definizione. P_0 è ***interno*** ad $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists I(P_0) \subset A$
P_0 è ***esterno*** ad $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists I(P_0) : I(P_0) \cap A = \emptyset$
P_0 è ***punto di frontiera*** per $A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall I(P_0),\ I(P_0) \nsubseteq A,\ I(P_0) \cap A \neq \emptyset$

Definizione. Dicesi ***frontiera*** di A l'insieme di punti:

$$\partial A = \{P \mid \ P \text{ è di frontiera per } A\}$$

Indichiamo con il simbolo $\mathring{A}$ l'insieme dei punti interni di A:

$$\mathring{A} \overset{def}{=} \{P \in A \mid \ P \text{ è punto interno}\}$$

Ciò premesso, sia u l'unità di misura dei segmenti. Conseguentemente l'unità di misura delle aree è u^2. Indichiamo con $\mathcal{P}$ la classe dei poligoni. Ad ogni poligono $\pi \in \mathcal{P}$ possiamo associare la sua misura $\mu(\pi) \in [0,+\infty)$ rispetto all'unità di misura u. Resta perciò definita la seguente funzione non negativa:

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \tag{1.11}$$

La (1.11) verifica le seguenti proprietà:

1. Proprietà additiva:

$$\forall \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P} : \quad \mathring{\pi}_1 \cap \mathring{\pi}_2 = \emptyset \Longrightarrow \mu(\pi_1 \cup \pi_2) = \mu(\pi_1) + \mu(\pi_2) \tag{1.12}$$

2. Invarianza per conguenza:

$$\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P} : \pi_1, \pi_2 \ \text{ congruenti} \Longrightarrow \mu(\pi_1) = \mu(\pi_2)$$

Consideriamo ora un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Se $A \notin \mathcal{P}$, si pone il problema della definizione di $\mu(A)$. A tale scopo costruiamo gli insiemi:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\pi \in \mathcal{P} \mid \pi \subset A\} \\ \Sigma_2 &= \{\Pi \in \mathcal{P} \mid \Pi \supset A\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Osservazione. Se A è privo di punti interni, allora $\Sigma_1 = \emptyset$.

Poniamo:

$$\alpha(A) \overset{def}{=} \{\mu(\pi) \mid \pi \in \Sigma_1\}$$
$$\beta(A) \overset{def}{=} \{\mu(\Pi) \mid \Pi \in \Sigma_2\}$$

Evidentemente:

$$(\forall \pi \in \Sigma_1, \forall \Pi \in \Sigma_2, \pi \subseteq \Pi) \Longrightarrow \mu(\pi) \leq \mu(\Pi),$$

cioè $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ sono insiemi separati.

Definizione. Si definisce ***misura interna*** di A il numero reale non negativo

$$\mu_i(A) = \sup \alpha(A)$$

Definizione. Si definisce ***misura esterna*** di A il numero reale non negativo

$$\mu_e(A) = \inf \beta(A)$$

Risulta:

$$\mu_i(A) \leq \mu_e(A)$$

Osservazione. Se A è privo di punti interni:

$$\Sigma_1 = \emptyset \Longrightarrow \alpha(A) = \emptyset \overset{def}{\Longrightarrow} \mu_i(A) = 0$$

Definizione. L'insieme A è ***misurabile*** (***secondo Peano - Jordan***) se risulta $\mu_i(A) = \mu_e(A)$. In tal caso si pone:

$$\mu(A) \overset{def}{=} \mu_i(A) = \mu_e(A),$$

essendo $\mu(A)$ la ***misura*** di A.

Osservazione. Se A è misurabile ed è privo di punti interni, segue necessariamente che $\mu(A) = 0$, poiché è $\mu_i(A) = 0$.
Dalla definizione di misurabilità segue che A è misurabile se e solo se gli insiemi $\alpha(A)$ e $\beta(A)$ sono contigui:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \pi_\varepsilon \in \Sigma_1, \exists \Pi_\varepsilon \in \Sigma_2 \mid \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon \tag{1.14}$$

Nel caso speciale in cui A è misurabile e privo di punti interni, la (1.14) si scrive:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Pi_\varepsilon \in \Sigma_2 \mid \mu(\Pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

Resta così definita la misura μ degli insiemi limitati $A \subset \mathbb{R}^2$ non appartenenti a $\mathcal{P}$:

$$\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_0^+ \tag{1.15}$$

essendo:

$$\mathcal{M} = \left\{A \subset \mathbb{R}^2 \mid A \text{ è limitato e misurabile}\right\} \tag{1.16}$$

Teorema 1. $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$

Dimostrazione. Osserviamo che i poligoni sono particolari insiemi limitati e misurabili, donde:

$$\forall \pi \in \mathcal{P},\ \pi \in \mathcal{M} \tag{1.17}$$

Consideriamo ora un qualunque cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio r:

$$\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\right\}$$

Abbiamo: $\mu(\gamma) = \pi r^2$; cioè γ è limitato e misurabile $\Longrightarrow \gamma \in \mathcal{M}$. Ma $\gamma \notin \mathcal{P}$, donde (tenendo conto della (1.15)) l'asserto. □

***

La misura (1.15) conserva le proprietà (additività e congruenza) della misura (1.11). Rispetto a quest'ultima possiede la **proprietà di monotonia**:

$$\forall A, B \in \mathcal{M} \mid A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

Altre proprietà.
Se $A, B \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} &A \cup B \in \mathcal{M},\ A - B \in \mathcal{M},\ A \cap B \in \mathcal{M} \\ &A \overset{\circ}{\cap} B = \emptyset \Longrightarrow \mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B) \\ &\qquad A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B) \\ &\forall A, B \in \mathcal{M},\ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Dall'ultima delle (1.18) segue:

$$A, B \in \mathcal{M},\ \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) \tag{1.19}$$

Ciò si esprime dicendo che la misura (1.15) è **subadditiva**.

***

La nozione di misura di un insieme si estende facilmente al caso di insiemi non limitati. A tale scopo sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme non limitato.

Definizione.

$$A \text{ è } \textit{misurabile} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall X \in \mathcal{M},\ A \cap X \in \mathcal{M}$$

In tal caso, la misura di A è:

$$\mu(A) = \sup_{X \in \mathcal{M}} \mu(A \cap X) \leq +\infty$$

Precisamente:

$$\mu(A) < +\infty \Longrightarrow A \text{ è di } \textbf{\textit{misura finita}}$$
$$\mu(A) = +\infty \Longrightarrow A \text{ è di } \textbf{\textit{misura infinita}}$$

Indichiamo con $\mathcal{R}$ la classe dei rettangoli $\Theta(\alpha, \beta)$ di centro l'origine e dimensioni α, β:

$$\Theta(\alpha, \beta) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq \alpha,\ |y| \leq \beta\right\}$$

Ciò premesso, sussiste il seguente

Teorema 2.

$$(A \text{ è misurabile}) \Longleftrightarrow (\forall \Theta \in \mathcal{R},\ A \cap \Theta \in \mathcal{M})$$

Se A è misurabile:

$$\mu(A) = \sup_{\Theta \in \mathcal{R}} \mu(A \cap \Theta)$$

Dimostrazione. **Implicazione diretta** Abbiamo:

$$(A \text{ è misurabile}) \Longrightarrow (\forall X \in \mathcal{M},\ A \cap X \in \mathcal{M}) \underset{\mathcal{R} \subset \mathcal{M}}{\Longrightarrow} (\forall \Theta \in \mathcal{R},\ \Theta \cap A \in \mathcal{M})$$

Implicazione inversa L'ipotesi è:

$$\forall \Theta \in \mathcal{R},\ A \cap \Theta \in \mathcal{M}$$

Preso ad arbitrio $X \in \mathcal{M}$ scegliamo $\Theta \in \mathcal{R}$ tale che $\Theta \supset X$, donde:

$$A \cap X = (A \cap \Theta) \cap X$$

Quindi

$$A \cap \Theta \in \mathcal{M} \Longrightarrow A \cap X \in \mathcal{M}$$

cioè la tesi. Inoltre, nelle medesime ipotesi:

$$\sup_{\Theta \in \mathcal{R}} \mu(A \cap \Theta) \leq \mu(A) \leq \mu(A \cap \Theta) \Longrightarrow \mu(A) = \sup_{\Theta \in \mathcal{R}} \mu(A \cap \Theta)$$

□

1.3 Area del rettangoloide

Premettiamo la seguente

Definizione. Sia $A \neq \emptyset$. Gli insiemi non vuoti $A_1, A_2, ..., A_n$ costituiscono una **partizione** di A se:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A$$

$$\mathring{A}_k \bigcap \mathring{A}_{k'} = \emptyset, \text{ per } k, k' \in \{1, 2, ..., n\} \text{ con } k \neq k'$$

Sia $f(x)$ continua in $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e ivi non negativa. Eseguiamo una partizione dell'intervallo $[a, b]$ attraverso $n + 1$ punti:

$$x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$$

Precisamente:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

Si tratta di una partizione, poiché:

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, b] = [a, b]$$

$$\forall k, k' \in \{0, 1, ..., n-1\} \text{ con } k \neq k',\quad (x_k, x_{k+1}) \cap (x_{k'}, x_{k'+1}) = \emptyset$$

Indichiamo tale partizione con il simbolo convenzionale $D(x_0, x_1, ..., x_n)$. Poniamo per definizione:

$$\delta = \max_{k \in \mathcal{N}} (x_{k+1} - x_k), \ \ \mathcal{N} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

Il numero reale $\delta > 0$ si chiama **ampiezza** della partizione. Inoltre, se $f(x)$ non è identicamente nulla consideriamo il minimo e il massimo di $f(x)$ in $[x_k, x_{k+1}]$:

$$m_k = \min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$
$$M_k = \max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

Quindi:

$$r_k \stackrel{def}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}, \ 0 \leq y \leq m_k\right\} \tag{1.20}$$
$$R_k \stackrel{def}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}, \ 0 \leq y \leq M_k\right\}$$

Cioè r_k è il rettangolo di base $[x_k, x_{k+1}]$ e altezza m_k, mentre R_k è il rettangolo di base $[x_k, x_{k+1}]$ e altezza M_k. Restano così definiti i seguenti poligoni:

$$\pi(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1} r_k \tag{1.21}$$
$$\Pi(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k$$

Definizione. $\pi(D)$ è il **plurirettangolo inscritto a** R associato alla partizione D.
$\Pi(D)$ è il **plurirettangolo circoscritto a** R associato alla partizione D.

Evidentemente:

$$s_D \stackrel{def}{=} \mu[\pi(D)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(r_k) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \tag{1.22}$$
$$S_D \stackrel{def}{=} \mu[\Pi(D)] = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(R_k) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

Inoltre:

$$\forall D, D', \pi(D) \subseteq \Pi(D') \Longrightarrow \forall D, D', \ \ s_D \leq S_{D'}$$

Teorema 3. Nelle suddette ipotesi il rettangoloide

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \, 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

è misurabile, risultando:

$$\mu(R) = \sup_D s_D = \inf_D S_D$$

Dimostrazione. Se $f(x)$ è identicamente nulla, l'asserto è banale:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \, y = 0\right\} \Longrightarrow \mu(R) = 0$$
$$\forall D, \ s_D = S_D = 0 \Longrightarrow \sup_D s_D = \inf_D S_D = 0$$

Consideriamo quindi il caso non banale, cioè $f(x)$ non identicamente nulla in $[a,b]$. Per il teorema di Heine-Cantor, la funzione è ivi uniformemente continua, per cui:

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta_\varepsilon > 0 : x', x'' \in [a,b]\,,\ \ |x' - x''| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Eseguiamo una partizione $\bar{D}(x_0, x_1, ..., x_n)$ dell'intervallo $[a,b]$ di ampiezza $\bar{\delta} < \delta_\varepsilon$. Siano

$$\bar{x}_k, \bar{x}'_k \in [x_k, x_{k+1}] : f(\bar{x}_k) = m_k,\ f(\bar{x}'_k) = M_k$$

Quindi:

$$|\bar{x}'_k - \bar{x}_k| \leq x_{k+1} - x_k \leq \bar{\delta} < \delta_\varepsilon \Longrightarrow M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Inoltre:

$$S_{\bar{D}} - s_{\bar{D}} = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \varepsilon$$

Ma $S_{\bar{D}}$ e $s_{\bar{D}}$ sono le aree di due poligoni:

$$\pi\left(\bar{D}\right) = \pi_\varepsilon$$
$$\Pi\left(\bar{D}\right) = \Pi_\varepsilon$$

Perciò:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \Pi_\varepsilon, \pi_\varepsilon : \mu(\Pi_\varepsilon) - \mu(\pi_\varepsilon) < \varepsilon$$

ciò implica la misurabilità di R. Infine:

$$s_{\bar{D}} \leq \mu(R)\,,\ s_{\bar{D}} > S_D - \varepsilon,$$

cioè:

$$S_{\bar{D}} - \mu(R) < \varepsilon \tag{1.23}$$

Similmente:

$$\mu(R) \leq S_{\bar{D}},\ S_{\bar{D}} < s_{\bar{D}} + \varepsilon$$

per cui:

$$\mu(R) - s_{\bar{D}} < \varepsilon \tag{1.24}$$

Dalle (1.23)-(1.24) segue:

$$\mu(R) = \sup_D s_{\bar{D}} = \inf_D S_{\bar{D}}$$

□

***

Dal teorema appena dimostrato segue che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall D(x_0, x_1, ..., x_n)$:

$$s_D = \text{ valore approssimato per difetto di } \mu(R)$$
$$S_D = \text{ valore approssimato per eccesso di } \mu(R)$$

Scegliere come valore approssimato di $\mu(R)$ la somma s_D, equivale ad approssimare $\forall k \in \mathcal{N}$, il rettangoloide:

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1},\, 0 \leq y \leq f(x)\right\} \tag{1.25}$$

con il rettangolo r_k in esso inscritto. Viceversa, scegliere come valore approssimato di $\mu(R)$ la somma S_D, equivale ad approssimare $\forall k \in \mathcal{N}$, il rettangoloide (1.25) con il rettangolo R_k ad esso circoscritto.
Ora poniamo:

$$\forall k \in \mathcal{N},\, \tau_k \overset{def}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_k \leq x \leq x_{k+1},\, 0 \leq y \leq \eta_k\right\},$$

essendo $\eta_k \in [m_k, M_k]$.
Il poligono:

$$\tau(D) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \tau_k$$

è un plurirettangolo che non è inscritto ad R e al tempo stesso non è circoscritto ad R.

$$\sigma_D \overset{def}{=} \mu(\tau(D)) \Longrightarrow s_D \leq \sigma_D \leq S_D$$

Il numero reale σ_D è comunque un valore approssimato di $\mu(R)$. Inoltre:

$$(m_k \leq \eta_k \leq M_k) \underset{\substack{f(x) \text{ è continua} \\ \text{in } [x_k, x_{k+1}]}}{\Longrightarrow} (\exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \mid f(\xi_k) = \eta_k)$$

Quindi:

$$\mu(\tau_k) = f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \Longrightarrow \sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(\tau_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{1.26}$$

Dalla (1.26) segue che σ_D dipende da ξ_k per ogni $k \in \mathcal{N}$.

$$\forall \xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \ \text{(con } k \in \mathcal{N}),\, s_D \leq \sigma_D \leq S_D \Longrightarrow |\sigma_D - \mu(R)| \leq S_D - s_D$$

Dalla dimostrazione dell'ultimo teorema segue

Teorema 4.

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall D \ (\delta < \delta_\varepsilon),\ |\sigma_D - \mu(R)| < \varepsilon \tag{1.27}$$

La (1.27) può essere scritta nela forma simbolica:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_D = \mu(R) \tag{1.28}$$

Si osservi che la (1.28) non è l'usuale operazione di passaggio al limite, giacché σ_D non una funzione ad un sol valore di δ. Infatti, assegnato un numero reale positivo $\delta < b - a$, esistono infinite partizioni di ampiezza δ, e per ciascuna partizione esistono infiniti valori di σ_D, giacché questi ultimi dipendono dai punti ξ_k (che possono essere scelti in infiniti modi). Da ciò si conclude che σ_D è una funzione ad infiniti valori di δ. Pertanto, la (1.28) andrebbe riscritta nella forma:

$$\sigma_D \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} \mu(R),$$

e cioè le somme σ_D tendono all'area del rettangoloide, quando la loro ampiezza tende a zero.

***

Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e ivi non positiva. In tal caso il rettangoloide di base $[a,b]$, relativo a $f(x)$, si ridefinisce:

$$R \overset{def}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\, f(x) \leq y \leq 0\right\}$$

Indichiamo con R' il rettangoloide di base $[a,b]$, relativo a $-f(x)$. È facile convincersi che R' è simmetrico a R rispetto all'asse x.

Per i teoremi precedenti si ha che R' è misurabile:

$$\mu(R') = \lim_{\delta \to 0} \sigma'_D, \tag{1.29}$$

essendo:

$$\begin{aligned} \sigma'_D &= \sum_{k=0}^{n-1} [-f(\xi_k)](x_{k+1} - x_k) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= -\sigma_D, \end{aligned} \tag{1.30}$$

per una generica partizione D di ampiezza δ, e per ogni $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Dalle (1.29)-(1.30) segue

$$\mu(R') = -\lim_{\delta \to 0} \sigma_D$$

Dalla misurabilità di R' e dalla simmetria tra R' e R, segue che R è misurabile:

$$\mu(R) = \mu(R'),$$

donde:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_D = -\mu(R) \tag{1.31}$$

1.4 Definizione di integrale definito

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$. Eseguiamo ad arbitrio una partizione $D(x_0, x_1, ..., x_n)$ di ampiezza δ dell'intervallo $[a, b]$. Per ogni $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, consideriamo le somme:

$$\sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Posto

$$\lambda = \lim_{\delta \to 0} \sigma_D, \tag{1.32}$$

risulta:

$$\lambda = \begin{cases} \mu(R), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -\mu(R), & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}, \tag{1.33}$$

essendo R il rettangoloide di base $[a, b]$ relativo a $f(x)$.

Teorema 5.

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R} \mid \lim_{\delta \to 0} \sigma_D = \lambda \tag{1.34}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$f^+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, \; f^-(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2} \tag{1.35}$$

Le funzioni continue $f^{\pm}(x)$ sono rispettivamente la **parte non negativa** $(+)$ e la **parte non positiva** $(-)$ di $f(x)$. Evidentemente:

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x) \tag{1.36}$$

Se $\Gamma^+)y = f^+(x)$:

$$x \in [a,b] : f(x) > 0 \Longrightarrow f^+(x) = f(x)$$
$$x \in [a,b] : f(x) < 0 \Longrightarrow f^+(x) = 0$$

Cioè Γ^+ è composto dalle parti del grafico $\Gamma)y = f(x)$ di ordinata positiva, e dai punti dell'asse x le cui ordinate sono negative. Similmente $\Gamma^-)y = f^-(x)$

$$x \in [a,b] : f(x) < 0 \Longrightarrow f^-(x) = f(x)$$
$$x \in [a,b] : f(x) > 0 \Longrightarrow f^+(x) = 0$$

$\forall D$, $\forall \xi_k$

$$\sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$
$$\sigma_D^{\pm} = \sum_{k=0}^{n-1} f^{\pm}(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Dalle (1.36):

$$\sigma_D = \sigma_D^+ + \sigma_D^-$$

Inoltre:

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_D^+ = \mu(R_+), \lim_{\delta \to 0} \sigma_D^- = -\mu(R_-),$$

essendo $R_{\pm}$ il rettangoloide di base $[a,b]$, relativo a $f^{\pm}(x)$. Per una nota proprietà del valore assoluto:

$$|\sigma_D - [\mu(R_+) - \mu(R_-)]| \leq \underbrace{\left|\sigma_D^+ - \mu(R_+)\right|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\left|\sigma_D^- - \mu(R_-)\right|}_{<\varepsilon/2} = \varepsilon$$

Posto

$$\lambda = \mu(R_+) - \mu(R_-), \tag{1.37}$$

segue:

$$|\sigma_D - \lambda| \leq \varepsilon \Longrightarrow \lim_{\delta \to 0} \sigma_D = \lambda$$

La (1.37) implica esistenza e unicità di λ. □

***

Per il teorema appena dimostrato, assegnata una funzione $f(x)$ continua in $[a,b]$, esiste ed è unico il limite λ dato dall'equazione (1.32). Tale numero reale si chiama **integrale** della funzione $f(x)$ **esteso all'intervallo** $[a,b]$:

$$\lambda = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1.38}$$

Cioè:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1.39}$$

L'interpretazione geometrica dell'integrale (1.39) è:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(R)\,, \quad \text{se } f(x) \geq 0 \tag{1.40}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mu(R)\,, \quad \text{se } f(x) \leq 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(R_+) - \mu(R_-)\,, \quad \text{altrimenti}$$

Se $f(x)$ è una funzione definita nell'intervallo X ed è ivi continua, per ogni $a, b \in X$ con $a < b$, risulta definito l'oggetto:

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.41}$$

Poniamo quindi per definizione:

$$\int_b^a f(x)\,dx \overset{def}{=} -\int_a^b f(x)\,dx \tag{1.42}$$

Da ciò segue che (1.41) ha senso per ogni coppia di punti $x', x'' \in X$:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx \tag{1.43}$$

Il numero reale (1.43) si chiama **integrale definito** della funzione $f(x)$ esteso **all'intervallo orientato** di estremi x' e x''.
Seguono le denominazioni:

$\int$ **segno di integrale**
x', x'' **limiti di integrazione**
x' **limite inferiore**
x'' **limite superiore**
$f(x)$ **funzione integranda**

Osservazione. Il numero reale (1.41) dipende da a, b e da $f(x)$, ma non dalla variabile x. Ciò si esprime dicendo che x è una ***variabile muta***, donde possiamo scrivere:

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \int_{x'}^{x''} f(y)\,dy = \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt = \int_{x'}^{x''} f(\xi)\,d\xi = \int_{x'}^{x''} f(\eta)\,d\eta = ... \tag{1.44}$$

1.5 Proprietà dell'integrale definito

Sia $f(x)$ funzione continua nell'intervallo X e ivi non negativa. Sussistono le seguenti proprietà di cui omettiamo le dimostrazioni:

$$\forall a, b \in X,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longleftrightarrow f(x) \equiv 0$$

$$a < b \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$a > b \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$$

$$a < b,\ \forall [a', b'] \subset [a, b],\ \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Qualunque sia il segno di $f(x)$:

$$\forall a, b \in X, \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|$$

1.5.1 Proprietà additiva

$$\forall a, b, c \in X, \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{1.45}$$

1.5.2 Proprietà distributiva

$f_1(x),\ f_2(x), ..., f_n(x)$ funzioni continue in X:

$$\forall c_1, c_2, ...c_n \in \mathbb{R}, \tag{1.46}$$

$$\int_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)]\,dx$$

$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + ... + c_n \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Nel caso particolare: $f_k(x) \equiv 0$, per ogni $k \in \{2, 3, ...n\}$, la (1.46) si scrive:

$$\int_a^b c_1 f_1(x)\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx,$$

che in generale si riscrive:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c \int_a^b f(x)\,dx$$

Ciò si esprime dicendo che *ogni costante moltiplicativa può essere portata fuori dal segno di integrale.*

1.6 Teorema della media

Teorema della media.

$$f(x) \text{ è continua in } [a,b] \Longrightarrow \exists \xi \in [a,b] \mid f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \tag{1.47}$$

Dimostrazione. Poniamo:

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Eseguiamo quindi una partizione $D(x_0, x_1, ..., x_n)$ di $[a,b]$ con ampiezza δ. Presi ad arbitrio i punti $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, costruiamo la somma σ_D:

$$\sigma_D = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{1.48}$$

La (1.48) verifica la doppia disuguaglianza:

$$m(b-a) \leq \sigma_D \leq M(b-a), \tag{1.49}$$

essendo $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$. Eseguendo nella (1.49) l'operazione di passaggio al limite per $\delta \to 0$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Longleftrightarrow m \leq \mu \leq M \underset{\substack{f(x) \text{ è continua} \\ \text{in } [a,b]}}{\Longrightarrow} \Longrightarrow \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \mu,$$

da cui l'asserto. □

Definizione. Il numero reale μ si chiama ***media integrale***.

Interpretazione geometrica.
Eseguiamo una **equipartizione** di $[a,b]$, cioè una partizione D_n attraverso n punti equidistanti. Ad esempio:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

Abbiamo:

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \delta_n = \max_{k \in \mathcal{N}} (x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n}$$

Determiniamo una somma σ_{D_n} assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Passiamo dalle somme all'integrale:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} \\
&= (b-a) \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}{n}
\end{aligned}
$$

Da cui:

$$
\mu = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}
$$

$[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]/n$ è la media aritmetica dei valori assunti da $f(x)$ in n punti equidistanti di $[a, b]$, e μ si presenta come il limite di tale media per $n \to +\infty$. Da qui la denominazione di media integrale.

1.7 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Siamo ora in grado di risolvere il problema della ricerca della primitiva di una funzione continua $f(x)$ in un intervallo X.
Assegnato un punto $x_0 \in X$, consideriamo:

$$
\forall x \in X, \;\; F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi \tag{1.50}
$$

La funzione $F(x)$ dicesi **funzione integrale** della funzione $f(x)$ **di punto iniziale** x_0.

Proposizione (Teorema fondamentale del calcolo integrale) 6. La funzione integrale (1.50) è derivabile in X, risultando:

$$
\forall x \in X, \quad F'(x) = f(x),
$$

cioè $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

Dimostrazione.

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi}{\Delta x} \\
&= \frac{\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi + \int_{x}^{x_0} f(\xi)\,d\xi}{\Delta x} \\
&= \frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Per il teorema della media:

$$\exists\theta \in [0,1] : f(x+\theta\Delta x) = \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

La continuità di $f(x)$ implica:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x),$$

donde l'asserto. □

***

Per l'equazione (1.3) la famiglia delle primitive di una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo X, è:

$$G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi + c, \qquad \text{con } c \in (-\infty, +\infty) \tag{1.51}$$

In particolare, nella (1.51) possiamo porre $c = G(x_0)$, onde:

$$G(x) = G(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \tag{1.52}$$

La differenza tra la (1.51) e la (1.52) è evidente: mentre nella (1.51) la primitiva è indeterminata, in quanto definita a meno di una costante additiva, nella (1.52) essa è univocamente determinata. Inoltre, ponendo nella (1.52) $x_0 = a$, $x = b$, si ottiene:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = G(b) - G(a) \tag{1.53}$$

La (1.52) è la **formula fondamentale del calcolo integrale**, poiché fornisce l'integrale definito della funzione $f(x)$ tra a e b, attraverso la differenza dei valori assunti in a e in b da una qualunque primitiva.
La (1.52) viene spesso scritta con la notazione simbolica:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = G(x)\big|_a^b \tag{1.54}$$

Capitolo 2

Integrale indefinito

2.1 Definizione di integrale indefinito

Definizione. Dicesi ***integrale indefinito***, la totalità dele primitive di una assegnata funzione $f(x)$ continua in un intervallo X, e si indica con il simbolo:

$$\int f(x)\,dx \tag{2.1}$$

Una qualunque primitiva di $f(x)$ è una **determinazione** dell'integrale indefinito (2.1).
Se $F(x)$ è una primitiva, in forza della (1.3) si ha:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad \text{con } c \in (-\infty, +\infty) \tag{2.2}$$

Il numero reale c si chiama **costante di integrazione**.

Osservazione. L'integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

è un numero reale. Viceversa, l'integrale indefinito:

$$\int f(x)\,dx,$$

è un insieme di funzioni.

L'integrale indefinito rappresenta l'operazione inversa della derivazione. Più precisamente l'operazione di derivazione è definita da:

$$Df(x) = f'(x), \tag{2.3}$$

essendo D l'operatore di derivazione e $f(x)$ una qualunque funzione derivabile. L'integrazione indefinita esegue l'operazione inversa della (2.3), giacché:

$$D\int f(x)\,dx = f(x)$$

Si osservi che il risultato dell'applicazione dell'operatore di derivazione su una qualunque funzione dotata di espressione elementare, è a sua volta una funzione dotata di espressione elementare. Ci si può chiedere se tale circostanza si verifica per l'operatore di integrazione indefinita. La risposta è negativa, nel senso che esistono funzioni le cui primitive non sono dotate di espressioni elementari.

2.2 Integrali indefiniti fondamentali

Introdotta la nozione di integrale indefinito, si pone il problema della ricerca delle funzioni primitive di una assegnata funzione dotata di espressione elementare (quando ciò è possibile, secondo quanto esposto nella sezione precedente). Il punto di partenza per la soluzione di tale problema è fornito dalla tabella degli integrali indefiniti fondamentali:

1) $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \ \text{ per } n \neq -1$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \ \ a \neq 0$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \ \ (a \neq 0)$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \ \ (a > 0)$

8) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ \ (a > 0)$

9) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

10) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

11) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$

15) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

16) $\displaystyle\int \sinh dx = \cosh x + C$

17) $\displaystyle\int \cosh dx = \sinh x + C$

18) $\displaystyle\begin{cases} \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C \\ \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \coth x + C \end{cases}$

Una coppia di integrali notevoli è la 14)-15) che può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C \end{aligned} \tag{2.4}$$

Parte II

Esercizi sull'integrazione di una funzione reale di variabile reale

Capitolo 3

Integrali indefiniti

3.1 Integrali indefiniti fondamentali

Calcolare i seguenti integrali, utilizzando la tabella degli integrali indefiniti fondamentali:

1) $\int x^3 dx$	7) $\int 2^x dx$	13) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-5}}$
2) $\int \sqrt{x} dx$	8) $\int 3\sin x dx$	14) $\int \frac{dx}{5+5x^2}$
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$	9) $\int 2\sinh x dx$	15) $\int \frac{3dx}{x^2-1}$
4) $\int x\sqrt{x} dx$	10) $\int \frac{3}{x} dx$	16) $\int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ax^2+a}} dx \quad (a > 0)$
5) $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} dx$	11) $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx$	17) $\int 5a^2x^6 dx$
6) $\int e^{x/2} dx$	12) $\int \frac{-3dx}{\sqrt{x^2-1}}$	18) $\int \sqrt{2px} dx$

3.2 Soluzioni

1. $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

2. $\int \sqrt{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$

4. $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

5. $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} dx = 20\frac{x}{\sqrt[4]{x^3}} + C = 20\sqrt[4]{x} + C$

6. $\int e^{x/2} dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C = 2e^{\frac{1}{2}x} + C$

7. $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + C$

8. $\int 3\sin x dx = 3\int \sin x dx = -3\cos x + C$

9. $\int 2\sinh x dx = 2\int \sinh x dx = 2\cosh x + C$

10. $\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{dx}{x} = 3 \ln x + C$

11. $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{3}{2} \arcsin x + C$

12. $\int \frac{-3dx}{\sqrt{x^2-1}} = -3 \ln \left| x + \sqrt{(-1+x^2)} \right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{5+5x^2} = \frac{1}{5} \arctan x + C$

15. $\int \frac{3dx}{x^2-1} = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$

16. $\int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{ax^2+a}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln \left| x^2 + \sqrt{x^2+1} \right| + C$

17. $\int 5a^2x^6 dx == 5a^2 \int x^6 dx = \frac{5}{7} a^2 x^7 + C$

18. $\int \sqrt{2px} dx = 2px \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{3/2} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{2px} + C$

Altri esercizi:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$	3) $\int \frac{dx}{x^2+7}$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$
2) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$	4) $\int \frac{dx}{x^2-10}$	6) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

3.2.1 Soluzioni

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \frac{n}{n-1} x^{1-\frac{1}{n}} + C = \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1}} + C$

2. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \frac{x^{\frac{1-n}{n}+1}}{\frac{1-n}{n}+1} + C = n^{1/n} x^{1/n} = \sqrt[n]{nx}$

3. $\int \frac{dx}{x^2+7} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right| + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+4} \right) + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{8}} + C$

3.3 Integrali di somme di funzioni

Calcolare i seguenti integrali, utilizzando la proprietà additiva:

1) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$
2) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$
3) $\int \frac{3x^5-2x^3+1}{x} dx$
4) $\int \frac{3x^5-2x^3+1}{x^3} dx$
5) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx$
6) $\int \frac{\sin 2x + 2\cos x}{\cos x} dx$
7) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}\right) dx$
8) $\int \frac{2x^4-3x^2+5x}{x^2} dx$
9) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx$
10) $\int \left(2\sin x + \frac{\sin 2x}{\sin x}\right) dx$
11) $\int \left(e^{3x} + \frac{5}{x}\right) dx$
12) $\int \left(-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$
13) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$
14) $\int (ax+b)^3\, dx$
15) $\int (2x+1)^4\, dx$
16) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$
17) $\int (6x^2+8x+3)\, dx$
18) $\int x(x+a)(x+b)\, dx$

3.3.1 Soluzioni

1. $\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x dx + \int \cos x dx = (-\cos x + C_1) + (\sin x + C_2)$
$= \sin x - \cos x + C$

2. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx = \int \sqrt[3]{x^2} dx - \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C_1 - \left(\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C_2\right) = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + C$

3. $\int \frac{3x^5-2x^3+1}{x} dx = 3\int x^4 dx - 2\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{3}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + \ln|x| + C$

4. $\int \frac{3x^5-2x^3+1}{x^3} dx = 3\int x^2 dx - 2\int dx + \int x^{-3} dx = x^3 - 2x - \frac{1}{2x^2} + C$

5. $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} + 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} = 3(\tan x + C_1) + 2(-\cot x + C_2)$
$= 3\tan x - 2\cot x + C$

6. $\int \frac{\sin 2x + 2\cos x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx + 2\int dx = 2(-\cos x + C_1) + 2(x + C_2) = -2(\cos x - x) + C$

7. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}\right) dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - 2\int \frac{dx}{1+x^2} = 3\arcsin x - 2\arctan x + C$

8. $\int \frac{2x^4-3x^2+5x}{x^2} dx = 2\int x^2 dx - 3\int dx + 5\int \frac{dx}{x}$
$= 2\left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right) - 3(x + C_2) + 5(\ln|x| + C_3) = \frac{2}{3}x^3 - x + 5\ln|x| + C$

9. $\int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} dx$
$= -\int \sin x dx - \int \cos x dx = \cos x - \sin x + C$

10. $\int \left(2\sin x + \frac{\sin 2x}{\sin x}\right) dx = 2\int \sin x dx + 2\int \cos x dx = -2\cos x + 2\sin x$
$= 2(\sin x - \cos x) + C$

11. $\int \left(e^{3x}+\frac{5}{x}\right)dx = \int e^{3x}dx + 5\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1 + 5\ln|x| + C_2$
$= \frac{1}{3}e^{3x} + 5\ln x + C$

12. $\int \left(-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = -2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = 2\arccos x + \tan x + C$

13. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x+\sin x}dx = \int \cos x dx - \int \sin x dx = \cos x + \sin x + C$

14. $\int (ax+b)^3 dx = \int \left(a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3b^2ax + b^3\right)dx$
$= \frac{1}{4}a^3x^4 + a^2bx^3 + \frac{3}{2}b^2ax^2 + b^3x + C$

15. $\int (2x+1)^4 dx = \int \left(16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1\right)dx$
$= \frac{16}{5}x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 4x^2 + x + C$

16. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{(2-x^2)(2+x^2)}}dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2-x^2)(2+x^2)}}dx$
$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right) + C$

17. $\int (6x^2+8x+3)\,dx = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$

18. $\int x(x+a)(x+b)\,dx = \int x^3dx + (a+b)\int x^2dx + ab\int xdx$
$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(a+b)x^3 + \frac{1}{2}abx^2$

3.4 Integrali di una $f(\xi(x))$, con $\xi(x)$ funzione lineare

Calcolare gli integrali:

1) $\int \sin(ax+b)\,dx$	5) $\int \frac{dx}{(ax+b)^n}$	9) $\int \frac{5}{3}\sinh(5x)\,dx$
2) $\int (ax+b)^n\,dx$	6) $\int (3-5x)^3\,dx$	10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$
3) $\int e^{ax+b}dx$	7) $\int \cos(5x-2)\,dx$	11) $\int \frac{adx}{a-x}$
4) $\int \cos(ax+b)\,dx$	8) $\int 3e^{-2x+5}dx$	

3.4.1 Soluzioni

1. $I(x) = \int \sin(ax+b)\,dx$; poniamo

$$\xi = ax+b \Longrightarrow d\xi = adx, \tag{3.1}$$

donde:

$$I(\xi) = \frac{1}{a}\int \sin\xi d\xi = -\frac{1}{a}\cos\xi + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

2. $I(x) = \int (ax+b)^n \, dx$; eseguendo il cambio di varibile (3.1):

$$I(\xi) = \frac{1}{a}\int \xi^n d\xi = \frac{1}{a(n+1)}\xi^{n+1} + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad \text{per } n \neq -1$$

3. $I(x) = \int e^{ax+b} dx$; eseguendo il cambio di varibile (3.1):

$$I(\xi) = \frac{1}{a}\int e^{\xi} d\xi = \frac{1}{a}e^{\xi},$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

4. $I(x) = \int \cos(ax+b) \, dx$; eseguendo il cambio di varibile (3.1):

$$I(\xi) = \frac{1}{a}\int \cos\xi d\xi = \frac{1}{a}\sin\xi,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{a\sin(ax+b)} + C$$

5. $I(x) = \int \frac{dx}{(ax+b)^n}$; eseguendo il cambio di varibile (3.1):

$$I(\xi) = \frac{1}{a}\int \frac{d\xi}{\xi^n} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-n}\xi^{1-n} + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{(ax+b)^{1-n}}{a(1-n)} + C, \quad \text{per } n \neq 1$$

6. $I(x) = \int (3-5x)^3 \, dx$; eseguendo il cambio di varibile (3.1):

$$I(\xi) = -\frac{1}{5}\int \xi^3 d\xi = -\frac{1}{5}\frac{\xi^4}{4} + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\frac{(3-5x)^4}{20} + C$$

7. $I(x) = \int \cos(5x-2)\,dx$; eseguendo il cambio di variabile del tipo (3.1):

$$I(\xi) = \frac{1}{5}\int \cos\xi d\xi = \frac{1}{5}\sin\xi + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{\sin(5x-2)}{5} + C$$

8. $I(x) = \int 3e^{-2x+5}dx$; eseguendo il cambio di varibile del tipo (3.1):

$$I(\xi) = -\frac{3}{2}\int e^{\xi}d\xi = -\frac{3}{2}e^{\xi} + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\frac{3}{2}e^{-2x+5} + C$$

9. $I(x) = \int \frac{5}{3}\sinh(5x)\,dx$; eseguendo il cambio di varibile del tipo (3.1):

$$I(\xi) = \frac{1}{3}\int \sinh\xi d\xi = \frac{1}{3}\cosh\xi + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{3}\cosh(2x) + C$$

10. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; eseguendo il cambio di varibile:

$$\xi = 2x,$$

segue:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\xi + C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2}\arcsin(2x) + C$$

11. $I(x) = \int \frac{adx}{a-x}$; eseguendo il cambio di varibile:

$$\xi = a - x,$$

segue:

$$I(\xi) = -a\int \frac{d\xi}{\xi} = -a\ln|\xi| + C_1,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -a\ln|a-x| + C_1$$

Poniamo:

$$C_1 = a\ln|C|,$$

da cui:

$$I(x) = a\ln\left|\frac{C}{a-x}\right|$$

3.5 Integrazione per introduzione sotto il segno di integrale

Esempio 1:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+(x^2)^2}}$$

Poniamo

$$\xi = x^2,$$

donde:

$$xdx = \frac{1}{2}d\xi \Longrightarrow \int \frac{xdx}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right) + C$$

Quindi:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

Esempio 2

$$I_n(x) = \int x^{n-1}e^{x^n}dx$$

Poniamo:

$$\xi = x^n \Longrightarrow x^{n-1}dx = \frac{d\xi}{n},$$

donde:

$$I_n(\xi) = \frac{1}{n}\int e^{\xi}d\xi = \frac{1}{n}e^{\xi^n} + C \Longrightarrow I_n(x) = \frac{1}{n}e^{x^n} + C$$

***

3.5.1 Calcolare gli integrali:

1) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$

2) $\int \tan x dx$

3) $\int \cot x dx$

4) $\int \tan\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

5) $\int x\cot(x^2+1)\,dx$

6) $\int \sin^3 6x\cos 6x dx$

7) $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}dx$

8) $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$

9) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}dx$

10) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

11) $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

12) $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx$

13) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx$

14) $\int \frac{xdx}{x^2-5}$

15) $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$

16) $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx$

17) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

18) $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$

19) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

20) $\int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$

21) $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx$

22) $\int e^{-\left(x^2+1\right)}dx$

23) $\int x7^{x^2}dx$

24) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

25) $\int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

26) $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}dx$

27) $\int \frac{a^{2x}-1}{\sqrt{a^x}}dx$

28) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

29) $\int e^x\sqrt{a-be^x}dx$

30) $\int \left(e^{x/a}+1\right)^{1/3}e^{x/a}dx$

3.5.2 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$; eseguiamo il cambio di variabile

$$\xi = x^2 \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}d\xi,$$

quindi:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\cos^2 \xi} = \frac{1}{2}\tan \xi + C \Longrightarrow I(x) = \frac{1}{2}\tan x^2 + C$$

2. $I(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$; eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \cos x \Longrightarrow d\xi = -\sin x dx \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow I(\xi) = -\int \frac{d\xi}{\xi} = -\ln|\xi| + C \Longrightarrow I(x) = -\ln|\cos x| + C$$

3. $I(x) = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$; eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sin x \Longrightarrow d\xi = \sin x dx \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow I(\xi) = \int \frac{d\xi}{\xi} = -\ln|\xi| + C \Longrightarrow I(x) = \ln|\sin x| + C$$

4. $I(x) = \int \tan \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\cos \sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \cos \sqrt{x} \Longrightarrow d\xi = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} dx,$$

quindi:

$$I(\xi) = -2\int \frac{d\xi}{\xi} = -2\ln|\xi| + C$$
$$I(x) = -2\ln\left|\cos \sqrt{x}\right| + C$$

5. $\int x \cot(x^2+1)\, dx = \int x \frac{\cos(x^2+1)}{\sin(x^2+1)} dx$; eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sin\left(x^2+1\right) \Longrightarrow d\xi = 2x\cos\left(x^2+1\right) dx,$$

quindi:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\ln|\xi| + C$$
$$I(x) = -2\ln\left|\sin\left(x^2+1\right)\right| + C$$

6. $I(x) = \int \sin^3 6x \cos 6x dx = \frac{1}{6}\int \sin^3 6x d(\sin 6x) = \frac{1}{24}\sin^4 6x$

7. $I(x) = \int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax} dx = \frac{1}{a}\int \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{a}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\xi^{-4} + C \Longrightarrow I(x) = -\frac{1}{4a\sin^4 ax} + C$

8. $I(x) = \int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x} dx$; eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = 3 + \cos 3x \Longrightarrow d\xi = -3 \sin 3x dx$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\frac{1}{3} \int \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{1}{3} \ln |\xi| + C \Longrightarrow I(x) = -\frac{1}{3} \ln |3 + \cos 3x| + C$$

9. $I(x) = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$; eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \cos 2x \Longrightarrow d\xi = -2 \sin 2x dx$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\frac{1}{4} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\xi} + C \Longrightarrow I(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{\cos 2x} + C$$

10. $I(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = x^2 + 1 \Longrightarrow d\xi = 2x dx$$

Quindi:

$$I(\xi) = \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\xi} + C \Longrightarrow I(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 1} + C$$

11. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x} \right) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int \frac{\ln x}{x} dx = (2\sqrt{x} + C_1) + \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \left(4\sqrt{x} + \ln^2 x \right) + C$

12. $I(x) = \int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx = \int \left(\frac{2x}{3x^2-2} - \frac{5}{3x^2-22} \right) dx = 2 \int \frac{x dx}{3x^2-2} - 5 \int \frac{dx}{3x^2-2} = 2I_1(x) - 5I_2(x)$

Calcolo di $I_1(x)$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = 3x^2 - 2 \Longrightarrow d\xi = 6x dx$$

Quindi:

$$I_1(\xi) = \frac{1}{6} \int \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{6} \ln |\xi| + C_1 \Longrightarrow I_1(x) = \frac{1}{6} \ln \left| 3x^2 - 2 \right| + C_1$$

Calcolo di $I_2(x)$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sqrt{3} x \Longrightarrow d\xi = \sqrt{3} dx$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_2(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\xi}{\xi^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \ln \left| \frac{\xi - \sqrt{2}}{\xi + \sqrt{2}} \right| + C_2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\xi - \sqrt{2}}{\xi + \sqrt{2}} \right| + C_2 \\ \Longrightarrow I_1(x) &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{2}}{\sqrt{3}x + \sqrt{2}} \right| + C_2 \end{aligned}$$

donde:

$$I(x) = \frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right| - \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right| + C$$

13. $I(x) = \int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx = 3\int \frac{1}{5x^2+7}dx - 2\int \frac{x}{5x^2+7}dx = 3I_1(x) - 2I_2(x)$

Calcolo di $I_1(x) = \int \frac{1}{5x^2+7}dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{5}x\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}dx$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sqrt{5}x \Longrightarrow d\xi = \sqrt{5}dx$$

Quindi:

$$I_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\xi}{\xi^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{\xi}{\sqrt{7}} + C_1$$

$$\Longrightarrow I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{35}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right) + C_1$$

Calcolo di $I_2(x) = \frac{1}{5}\int \frac{d\left(5x^2+7\right)}{5x^2+7} = \frac{1}{10}\ln\left|5x^2+7\right| + C_2$, donde:

$$I(x) = \frac{3}{\sqrt{35}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5}{7}}x\right) - \frac{1}{5}\ln\left|5x^2+7\right| + C$$

14. $I(x) = \int \frac{xdx}{x^2-5} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-5\right)}{x^2-5} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5\right| + C$

15. $I(x) = \int \frac{xdx}{2x^2+3} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(2x^2+3\right)}{2x^2+3} = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+3\right) + C$

16. $I(x) = \int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}dx = a\int \frac{xdx}{a^2x^2+b^2} + b\int \frac{dx}{a^2x^2+b^2} = aI_1(x) + bI_2(x)$

Calcolo di $I_1(x) = \int \frac{xdx}{a^2x^2+b^2}$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = a^2x^2+b^2 \Longrightarrow d\xi = 2a^2xdx$$

Quindi:

$$I_1(\xi) = \frac{1}{2a^2}\int \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2a^2}\ln|\xi| + C_1$$

$$\Longrightarrow I_1(x) = \frac{1}{2a^2}\ln\left|a^2x^2+b^2\right| + C_1$$

Calcolo di $I_2(x) = \int \frac{dx}{a^2x^2+b^2}$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = ax \Longrightarrow d\xi = adx$$

Quindi:

$$I_2(\xi) = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\xi}{\xi^2+b^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\arctan\left(\frac{\xi}{b}\right) + C_2$$
$$\Longrightarrow I_2(x) = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}x\right) + C_2$$

donde:

$$I(x) = \frac{1}{2a^2}\ln\left|a^2x^2+b^2\right| + \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{a}{b}x\right) + C$$

17. $I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = x^2 \Longrightarrow d\xi = 2xdx$$

Quindi:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2)^2-\xi^2}} = \arcsin\left(\frac{\xi}{a^2}\right) + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + C$$

18. $I(x) = \int \frac{x^2dx}{1+x^6} = \int \frac{x^2dx}{1+(x^3)^2}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = x^3 \Longrightarrow d\xi = 3x^2dx$$

Quindi:

$$I(\xi) = \frac{1}{3}\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{3}\arctan\xi + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{1}{3}\arctan\left(x^3\right) + C$$

19. $I(x) = \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \arcsin x \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \sqrt{\xi}d\xi = \frac{2}{3}\xi^{3/2} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{2}{3}(\arcsin x)^{3/2} + C$$

20. $I(x) = \int \frac{\arctan\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \arctan\frac{x}{2} \Longrightarrow d\xi = \frac{1}{2}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \Longrightarrow \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int \xi d\xi = \frac{1}{4}\xi^2 + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{1}{4}\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2 + C$$

21. $I(x) = \int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx = \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx = I_1(x) - I_2(x)$

Calcolo di $I_1(x) = \int \frac{x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{d\left(1+4x^2\right)}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right) + C_1$

Calcolo di $I_2(x) = \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \arctan 2x \Longrightarrow d\xi = \frac{2}{1+4x^2}dx \Longrightarrow \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}d\xi$$

Quindi:

$$I_2(\xi) = \frac{1}{2}\int \sqrt{\xi}d\xi = \frac{1}{3}\xi^{3/2} + C_1$$
$$\Longrightarrow I_2(x) = \frac{1}{3}\left(\arctan 2x\right)^{3/2} + C_2,$$

donde:

$$I(x) = \frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right) - \frac{1}{3}\left(\arctan 2x\right)^{3/2} + C$$

22. $I(x) = \int e^{-\left(x^2+1\right)}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = -\left(x^2+1\right) \Longrightarrow d\xi = -2xdx \Longrightarrow xdx = -\frac{1}{2}d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int e^{\xi}d\xi = -\frac{1}{2}\xi^2 + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -\frac{1}{2}e^{-\left(x^2+1\right)} + C$$

23. $I(x) = \int x7^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 7^{x^2}d\left(x^2\right) = \frac{7^{x^2}}{2\ln 7} + C$

24. $I(x) = \int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \frac{1}{x} \Longrightarrow d\xi = -\frac{dx}{x^2} \Longrightarrow \frac{dx}{x^2} = -d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\int e^{\xi}d\xi = -e^{\xi} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -\frac{1}{2}e^{1/x} + C$$

25. $I(x) = \int 5^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sqrt{x} \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\int 5^{\xi}d\xi = 2\frac{5^{\xi}}{\ln 5} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = 2\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5} + C$$

26. $I(x) = \int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx = \int \left(\frac{a^x}{b^x} - 2 + \frac{b^x}{a^x}\right) dx = I_1(x) - 2(x - C_2)$, essendo:

$$I_1(x) = \int \frac{a^x}{b^x} dx + \int \frac{b^x}{a^x} dx \overset{def}{=} J_1(x) + J_2(x)$$

Qui è:

$$J_1(x) = \int \frac{a^x}{b^x} dx,\ J_2(x) = \int \frac{b^x}{a^x} dx$$

Risulta:

$$J_1(x) = \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln a - \ln b} + K_1$$

Scambiando a con b:

$$J_2(x) = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln b - \ln a} + K_2$$

Quindi:

$$I_1(x) = \frac{a^x b^{-x} - a^{-x} b^x}{\ln a - \ln b} + C_1 \Longrightarrow I(x) = \frac{a^x b^{-x} - a^{-x} b^x}{\ln a - \ln b} - 2x + C$$

27. $I(x) = \int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}} dx = \int \left(\frac{a^{2x}}{a^{x/2}} - a^{-x/2}\right) dx = \int \left(a^{2x - \frac{x}{2}} - a^{-x/2}\right) dx$

$= \int a^{\frac{3}{2}x} dx - \int a^{-x/2} dx = I_1(x) - I_2(x)$,

essendo:

$$I_1(x) = \frac{2}{3} \int a^{\frac{3}{2}x} d\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{2}{3} \frac{a^{\frac{3}{2}x}}{\ln a} + C_1$$

$$I_2(x) = -2 \int a^{-\frac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \frac{a^{-\frac{x}{2}}}{\ln a} + C_2$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{2}{3 \ln a} \left(a^{\frac{3}{2}x} + 3a^{-\frac{x}{2}}\right) + C$$

28. $I(x) = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = e^x \Longrightarrow e^x dx = d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \frac{d\xi}{\xi - 1} = \int \frac{d(\xi - 1)}{\xi - 1} = \ln|\xi - 1| + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \ln|e^x - 1| + C$$

29. $I(x) = \int e^x \sqrt{a - be^x} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = a - be^x \Longrightarrow e^x dx = -\frac{1}{b} d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\frac{1}{b} \int \sqrt{\xi d\xi} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \xi^{3/2} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -\frac{2}{3b} \sqrt{(a - be^x)^3} + C$$

30. $I(x) = \int \left(e^{x/a}+1\right)^{1/3} e^{x/a} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = e^{x/a} \Longrightarrow d\xi = \frac{1}{a} e^{x/a} dx$$

Quindi:

$$I(\xi) = a\int (\xi+1)^{1/3} d\xi = \frac{3a}{4}(\xi+1)^{4/3} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{3a}{4}\left(e^{x/a}+1\right)^{4/3} + C$$

***

3.5.2.1 Calcolare gli integrali

1) $\int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$

2) $\int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}} dx$

3) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

4) $\int (\cos ax + \sin ax)^2 dx$

5) $\int \sin(\ln x) \frac{dx}{x}$

6) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx$

7) $\int x \sin(1-x^2) dx$

8) $\int \frac{(\cot x)^{2/3}}{\sin^2 x} dx$

9) $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^3 3x} dx$

10) $\int \frac{dx}{b-a\cot 3x}$

11) $\int (2\sinh 5x - 3\cosh 5x) dx$

12) $\int \tanh dx$

13) $\int x\sqrt[n]{n-x^2} dx$

14) $\int x e^{-x^2} dx$

15) $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2} dx$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$

17) $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx$

18) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

19) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2-\tan^2 x}}$

20) $\int \left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$

21) $\int a^{\sin x}\cos x dx$

22) $\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[n]{x^n+1}} dx$

23) $\int \tan^2 ax dx$

24) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$

25) $\int \tan\sqrt{x-1}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

26) $\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln\left(1+x^2\right)+1}{1+x^2} dx$

27) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x} dx$

28) $\int \frac{x^2}{x^2-2} dx$

29) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$

30) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$

3.5.3 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{a^x dx}{1+a^{2x}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = a^x \Longrightarrow 1+a^{2x} = 1+\xi^2;\ \ d\xi = a^{xdx}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \arctan\xi + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \arctan(a^x) + C$$

2. $I(x) = \int \frac{e^{-bx}}{1-e^{-2bx}} dx$; Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = e^{-bx} \Longrightarrow 1-e^{-2bx} = 1-\xi^2;\ \ d\xi = -be^{-bxdx}$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\frac{1}{b}\int \frac{d\xi}{1-\xi^2} = -\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+\xi}{1-\xi}\right| + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right| + C$$

3. $I(x) = \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = e^x \Longrightarrow e^x dx = d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \arcsin\xi + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \arcsin(e^x) + C$$

4. $I(x) = \int (\cos ax + \sin ax)^2 dx = \int \left(\cos^2 ax + \sin^2 ax + \sin 2ax\right) dx = \int dx +$
$+\frac{1}{2a}\int \sin 2axd(2ax) = (x + C_1) + \frac{1}{2a}(-\cos 2ax + C_2) = x - \frac{1}{2a}\cos 2ax + C$

5. $I(x) = \int \sin(\ln x)\frac{dx}{x}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \ln x \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{x}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \sin\xi d\xi = -\cos\xi + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -\cos(\ln x) + C$$

6. $I(x) = \int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \tan x \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \sqrt{\xi}d\xi = \frac{2}{3}\xi^{3/2} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + C$$

7. $I(x) = \int x\sin(1-x^2)\,dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = 1 - x^2 \Longrightarrow xdx = -\frac{1}{2}d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\frac{1}{2}\int \sin\xi d\xi = \frac{1}{2}\cos\xi + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right) + C$$

8. $I(x) = \int \frac{(\cot x)^{2/3}}{\sin^2 x} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \cot x \Longrightarrow d\xi = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\int \xi^{2/3} d\xi = -\frac{3}{5}\xi^{5/3} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -\frac{3}{5}(\cot x)^{5/3} + C$$

9. $I(x) = \int \frac{1+\sin 3x}{\cos^3 3x} dx = \int \frac{dx}{\cos^3 3x} + \int \frac{\sin 3x}{\cos^3 3x} dx = I_1(x) + I_2(x)$

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{\cos^3 3x} = \frac{1}{3}\tan 3x + C_1$$
$$I_2(x) = \int \frac{\sin 3x}{\cos^3 3x} dx$$

Per calcolare $I_2(x)$ eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \cos 3x \Longrightarrow d\xi = -3\sin 3x dx$$

Quindi:

$$I_2(\xi) = -\frac{1}{3}\int \frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{\xi} + C_2$$
$$\Longrightarrow I_2(x) = \frac{1}{3\cos 3x} + C_2 \Longrightarrow I(x) = \frac{1}{3}\left(\tan 3x + \frac{1}{\cos 3x}\right) + C$$

10. $I(x) = \int \frac{dx}{b - a\cot 3x}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \cot 3x \Longrightarrow \frac{dx}{\sin^2 3x} = -\frac{1}{3}d\xi$$

Quindi:

$$I(\xi) = -\frac{1}{3}\int \frac{d\xi}{b - a\xi} = \frac{1}{3a}\int \frac{d(b - a\xi)}{b - a\xi} = \frac{1}{3a}\ln|b - a\xi| + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{1}{3a}\ln|b - a\cot 3x| + C$$

11. $I(x) = \int (2\sinh 5x - 3\cosh 5x)\, dx = 2 \cdot \frac{1}{5}\int \sinh 5x d(5x) - \frac{3}{5}\int \cosh 5x d(5x)$
$= \frac{2}{5}\cosh 5x - \frac{3}{5}\sinh 5x + C = \frac{1}{5}(2\cosh 5x - 3\sinh 5x) + C$

12. $I(x) = \int \tanh dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{d(\cosh x)}{\cosh x} dx = \ln(\cosh x) + C$

13. $I_n(x) = \int x\sqrt[n]{n - x^2} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = n - x^2 \Longrightarrow d\xi = -2x dx \Longrightarrow x dx = -\frac{1}{2}d\xi$$

Quindi:

$$I_n(\xi) = -\frac{n}{2(1+n)}\xi^{\frac{1+n}{n}} + C$$
$$\Longrightarrow I_n(x) = -\frac{3}{5}\sqrt[n]{(n-x^2)^{1+n}}$$

14. $I(x) = \int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

15. $I(x) = \int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx = 3\int \frac{dx}{2+3x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}} = 3I_1(x) - I_2(x)$

$I_1(x) = \int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C_1$

$I_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}\right| + C_2,$

donde:

$$I(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}\right| + C$$

16. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x}} = \int e^{-\frac{1}{2}x}dx = -2\int e^{-\frac{1}{2}x}d\left(-\frac{1}{2}x\right) = 2e^{-x/2} + C$

17. $I(x) = \int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx = \int \frac{d(x+\cos x)}{x+\cos x} = \ln|x+\cos x| + C$

18. $I(x) = \int \frac{dx}{x\ln^2 x}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \ln x \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{x}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{1}{\xi} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -\frac{1}{\ln x} + C$$

19. $I(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2-\tan^2 x}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \tan x \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}} = \arcsin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \arcsin\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

20. $I(x) = \int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right) \frac{dx}{2x^2+1} = 2\int \frac{dx}{2x^2+1} + \int \frac{xdx}{(2x^2+1)^2} = 2I_1(x) + I_2(x)$

Qui è:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int \frac{dx}{2x^2+1} \\ &= \int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}x\right)^2}{2x^2+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}x\right) + C_1; \end{aligned}$$

$$I_2(x) = \int \frac{d(2x^2+1)}{(2x^2+1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{2x^2+1} + C_2$$

Quindi:

$$I(x) = \sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}x\right) - \frac{1}{4(2x^2+1)} + C$$

21. $I(x) = \int a^{\sin x} \cos x dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \cos x \Longrightarrow d\xi = \cos x dx$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int a^{\xi} d\xi = \frac{a^{\xi}}{\ln a} + C \\ \Longrightarrow I(x) &= -\frac{a^{\sin x}}{\ln a} + C \end{aligned}$$

22. $I(x) = \int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[n]{x^n+1}} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = x^n + 1 \Longrightarrow d\xi = nx^{n-1}dx$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_n(\xi) &= \frac{1}{n}\int \frac{d\xi}{\xi^{1/n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\xi^{1-\frac{1}{n}} + C \\ \Longrightarrow I_n(x) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n-1}(x^n+1)^{1-\frac{1}{n}} + C \\ &= \frac{1}{n-1}\sqrt[n]{(x^n+1)^{n-1}} + C \end{aligned}$$

23. $I(x) = \int \tan^2 ax dx = \int \frac{\sin^2 ax}{\cos^2 ax} dx =$

$= \int \frac{1-\cos^2 ax}{\cos^2 ax} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} - \int dx = \frac{1}{a}\tan ax - x$

24. $I(x) = \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \ln x \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{x}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int (1+\xi)^{1/3} d\xi = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\xi)^4} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4} + C$$

25. $I(x) = \int \tan\sqrt{x-1}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sqrt{x-1} \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$$

Quindi:

$$I(\xi) = 2\int \frac{\sin\xi}{\cos\xi} d\xi = -2\int \frac{d(-\cos\xi)}{\cos\xi} = -2\ln|\sin\xi| + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = -2\ln\left|\sin\sqrt{x-1}\right| + C$$

26. $I(x) = \int \frac{e^{\arctan x} + x\ln\left(1+x^2\right)+1}{1+x^2} dx = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)$, essendo:

$$I_1(x) = \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$$
$$I_2(x) = \int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$$
$$I_3(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} dx$$

Calcolo di $I_1(x)$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \arctan x \Longrightarrow \frac{dx}{1+x^2} = d\xi$$

Quindi:

$$I_1(\xi) = 2\int e^{\xi} d\xi = e^{\xi} + C_1$$
$$\Longrightarrow I_1(x) = e^{\arctan x} + C_1$$

Calcolo di $I_2(x)$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \ln\left(1+x^2\right) \Longrightarrow d\xi = \frac{2xdx}{1+x^2}$$

Quindi:

$$I_2(\xi) = \frac{1}{2}\int \xi d\xi = \frac{1}{4}\xi^2 + C_2$$
$$\Longrightarrow I_2(x) = \frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right) + C_2$$

Calcolo di $I_3(x)$

$$I_3(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C_3$$

Quindi:

$$I(x) = e^{\arctan x} + \frac{1}{4}\ln^2\left(1+x^2\right) + \arctan x + C$$

27. $I(x) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = -\ln|\sin x + \cos x| + C$

28. $I(x) = \int \frac{x^2}{x^2-2} dx = \int \frac{x^2-2+2}{x^2-2} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2-2}\right) dx$

$= \int dx + 2\int \frac{dx}{x^2-2} = x + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|\right) + C = x + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$

29. $I(x) = \int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sin^2 x \Longrightarrow d\xi = \sin 2x dx$$

Quindi:

$$I(\xi) = \int e^{\xi} d\xi = e^{\xi} + C$$
$$\Longrightarrow I(x) = e^{\sin^2 x} + C$$

30. $I(x) = \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx = 5I_1(x) - 3I_2(x)$, essendo:

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$$
$$I_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$$

Calcolo di $I_1(x)$

$$I_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C_1$$

Calcolo di $I_2(x)$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = 4 - 3x^2 \Longrightarrow x dx = -\frac{1}{6} d\xi$$

Quindi:

$$I_2(\xi) = -\frac{1}{6} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -\frac{1}{3}\sqrt{\xi} + C_2$$
$$\Longrightarrow I_2(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{4-3x^2} + C_2$$

Da ciò segue:

$$I(x) = \frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{4-3x^2} + C$$

3.5.4 Calcolare gli integrali:

1) $\int \sin\left(\frac{2\pi}{T}+\phi_0\right)dt$
2) $\int \frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}$
3) $\int \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}dx$
4) $\int e^{-\tan x}\frac{dx}{\cos^2 x}$
5) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx$
6) $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
7) $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}dx$
8) $\int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}dx$
9) $\int x^2\cosh\left(x^3+3\right)dx$
10) $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x}dx$

1. $I(t)=\int \sin\left(\frac{2\pi}{T}+\phi_0\right)dt$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\tau=\frac{2\pi}{T}+\phi_0 \Longrightarrow d\tau=\frac{2\pi}{T}dt \Longrightarrow dt=\frac{T}{2\pi}d\tau$$

Quindi:

$$I(\tau)=\frac{2\pi}{T}\int \sin\tau d\tau=-\frac{T}{2\pi}\cos\tau+C \Longrightarrow I(t)=-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}+\phi_0\right)+C$$

2. $I(x)=\int \frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi=\ln x \Longrightarrow \frac{dx}{x}=d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int \frac{d\xi}{4-\xi^2} \\ &= \int \frac{d\xi}{2^2-\xi^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\xi}{2-\xi}\right|+C \\ I(x) &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|+C \end{aligned}$$

3. $I(x)=\int \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi=\arccos\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=-d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\int \xi d\xi \\ &= -\frac{1}{2}\xi^2+C \\ I(x) &= -\frac{1}{2}\left[\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2+C \end{aligned}$$

4. $I(x) = \int e^{-\tan x} \frac{dx}{\cos^2 x}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = -\tan x \Longrightarrow d\xi = -\frac{dx}{\cos^2 x}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\int e^{\xi} d\xi \\ &= -e^{\xi} + C \\ I(x) &= -e^{\tan x} + C \end{aligned}$$

5. $I(x) = \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sin^2 x \Longrightarrow \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{2-\xi^2}} \\ &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right) + C \\ I(x) &= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$

6. $I(x) = \int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Poniamo:

$$I_1(x) \overset{def}{=} \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad I_2(x) \overset{def}{=} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Calcolo di $I_1(x)$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \arcsin x \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_1(\xi) &= \frac{1}{2} \int \xi d\xi \\ &= \frac{1}{2} \xi^2 + C_1 \\ I_1(x) &= \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C_1 \end{aligned}$$

Calcolo di $I_2(x)$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = 1 - x^2 \Longrightarrow \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{d\xi}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_2(\xi) &= -\frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \\ &= -\sqrt{\xi} + C_2 \\ I_1(x) &= -\sqrt{1-x^2} + C_2 \end{aligned}$$

L'integrale $I(x)$ è:

$$I(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 - \sqrt{1-x^2} + C$$

7. $I(x) = \int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x} dx = \int \frac{\cos 2x}{5-\sin^2 2x} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sin 2x \Longrightarrow \cos 2x dx = \frac{d\xi}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{5-\xi^2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}+\xi}{\sqrt{5}-\xi}\right| + C \\ I(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}\right) + C \end{aligned}$$

8. $I(x) = \int \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int \sqrt{\xi} d\xi \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\xi^3} + C \\ I(x) &= \frac{2}{3}\sqrt{\ln^3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} + C \end{aligned}$$

9. $I(x) = \int x^2 \cosh(x^3+3)\, dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = x^2 + 3 \Longrightarrow x^2 dx = \frac{d\xi}{3}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{3}\int \cosh \xi d\xi \\ &= \frac{1}{3}\sinh \xi + C \\ I(x) &= \frac{1}{3}\sinh\left(x^3+3\right) + C \end{aligned}$$

10. $I(x) = \int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \tanh x \Longrightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int 3^{\xi} d\xi \\ &= \frac{3^{\xi}}{\ln 3} + C \\ I(x) &= \frac{3^{\tanh x}}{\ln 3} + C \end{aligned}$$

3.6 Integrazione per sostituzione

Assegnato l'integrale:

$$\int f(x)\, dx \tag{3.2}$$

si esegue la sostituzione:

$$x = \phi(\xi) \tag{3.3}$$

In tal modo l'integrale (3.2) diventa:

$$\int f[\phi(\xi)]\, \phi'(\xi)\, d\xi \tag{3.4}$$

La scelta della funzione $\phi(\xi)$ deve essere tale che (3.4) è riconducibile agli integrali fondamentali.

Esempio 1

$$I(x) = \int x\sqrt{x-1} dx$$

Poniamo:

$$\xi = \sqrt{x-1},$$

da cui:

$$\begin{aligned} x &= \xi^2 + 1 \\ dx &= 2\xi d\xi \end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$I(\xi) = 2\int \left(\xi^2 + 1\right) \xi^2 d\xi = 2\left(\frac{1}{5}\xi^5 + \frac{1}{3}\xi^3\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$$

Esempio 2

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$$

Poniamo:

$$\xi = 5x - 2$$

da cui:

$$d\xi = 5dx$$

L'integrale diventa:

$$I(\xi) = \frac{1}{5}\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \frac{2}{5}\sqrt{\xi} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$$

Esempio 3

$$I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$$

Poniamo:

$$\xi = x^2$$

da cui:

$$d\xi = 2xdx$$

L'integrale diventa:

$$I(\xi) = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{x^4+1}\right) + C$$

***

In molti casi è conveniente eseguire le **sostituzioni trigonometriche**. Precisamente, se l'integrando contiene uno dei seguenti radicali:

$$\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{x^2-a^2}, \sqrt{x^2+a^2},$$

si eseguono le sostituzioni:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a^2-x^2}, \quad x = a\sin\xi \Longrightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a\cos\xi \\
&\sqrt{x^2-a^2}, \quad x = \frac{a}{\cos\xi} \Longrightarrow \sqrt{x^2-a^2} = a\tan\xi \\
&\sqrt{x^2+a^2}, \quad x = a\tan\xi \Longrightarrow \sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos\xi}
\end{aligned}$$

Esempio 4

$$I(x) = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}dx$$

Poniamo:

$$x = \tan \xi$$

da cui:

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos \xi}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int \frac{d\xi}{\sin^2 \xi \cos \xi} \\ &= \int \frac{\sin^2 \xi + \cos^2 \xi}{\sin^2 \xi \cos \xi} d\xi \\ &= I_1(\xi) + I_2(\xi), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} I_1(\xi) &= \int \frac{d\xi}{\cos \xi} = \ln \left| \frac{1}{\cos \xi} + \tan \xi \right| + C_1 \\ I_1(\xi) &= \int \frac{\cos \xi}{\sin^2 \xi} d\xi = \int \frac{d(\sin \xi)}{\sin^2 \xi} = -\frac{1}{\sin \xi} + C_2, \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(\xi) = \ln \left| \frac{1}{\cos \xi} + \tan \xi \right| - \frac{1}{\sin \xi} + C$$

Ripristinando la variabile x e osservando che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \xi} &= \sqrt{1+\tan^2 \xi} = \sqrt{1+x^2} \\ \frac{1}{\sin \xi} &= \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 \xi}} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$I(x) = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

3.6.1 Calcolare gli integrali:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$

2) $\int \frac{dx}{e^x+1}$

3) $\int x(5x^2-3)^7 dx$

4) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

6) $\int x(2x+5)^{10} dx$

7) $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$

8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

10) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}$

11) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

12) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} dx$

3.6.2 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$. Procediamo per sostituzione:

$$\xi = \frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{d\xi}{\xi}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\left(\xi\sqrt{2}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\xi\sqrt{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\xi\sqrt{2}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\xi\sqrt{2}\right) + C \\ I(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + C \end{aligned}$$

2. $I(x) = \int \frac{dx}{e^x+1}$. Procediamo per sostituzione:

$$x = -\ln\xi \Longrightarrow \frac{dx}{e^x+1} = -\frac{d\xi}{\xi+1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\int \frac{d\xi}{\xi+1} \\ &= -\ln|\xi+1| + C \\ I(x) &= -\ln\left(1+e^{-x}\right) + C \end{aligned}$$

3. $I(x) = \int x\left(5x^2-3\right)^7 dx$. Procediamo per sostituzione:

$$5x^2 - 3 = \xi \Longrightarrow xdx = \frac{d\xi}{10}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{10}\int \xi^7 d\xi \\ &= \frac{1}{80}\xi^8 + C \\ I(x) &= \frac{1}{80}\left(5x^2-3\right)^8 + C \end{aligned}$$

4. $I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$. Procediamo per sostituzione:

$$\xi = \sqrt{x+1} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= 2\int \left(\xi^2 - 1\right) d\xi \\ &= \frac{2}{3}\xi^3 - 2\xi + C \\ I(x) &= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

5. $I(x) = \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$. Procediamo per sostituzione:

$$\xi = \sin\xi \Longrightarrow \cos x dx = d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= 2\int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \\ &= \ln\left|\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right| + C \\ I(x) &= \ln\left|\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right| + C \end{aligned}$$

6. $I(x) = \int x(2x+5)^{10} dx$. Poniamo

$$\xi = 2x + 5 \Longrightarrow d\xi = 2dx$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\xi}{2} - \frac{5}{2}\right)\xi^{10} d\xi \\ &= \frac{1}{24}\xi^{12} - \frac{5}{44}\xi^{11} + C \\ I(x) &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}(2x+5)^{12} - \frac{5}{11}(2x+5)^{11}\right] + C \end{aligned}$$

7. $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1+\sqrt{x}} dx = \int dx - \int \sqrt{x} dx = x - \frac{3}{2}\sqrt{x^3} + C$

8. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$. Poniamo

$$\xi = \sqrt{2x+1} \Longrightarrow d\xi = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= 2\int \frac{d\xi}{\xi^2 - 1} \\ &= \ln\left|\frac{\xi - 1}{\xi + 1}\right| + C \\ I(x) &= \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{2x+1} + 1}\right| + C \end{aligned}$$

9. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$. Poniamo

$$\xi = \sqrt{e^x - 1} \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\frac{d\xi}{\xi^2 + 1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= 2\int \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} \\ &= \arctan \xi + C \\ I(x) &= 2\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) + C \end{aligned}$$

10. $I(x) = \int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x} = \int \frac{\ln 2 + \ln x}{\ln 4 + \ln x}\frac{dx}{x}$. Poniamo

$$\xi = \ln x \Longrightarrow \frac{dx}{x} = d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int \frac{\ln 2 + \xi}{\ln 4 + \xi} d\xi \\ &= \int \left(1 + \frac{\ln 2 - \ln 4}{\ln 4 + \xi}\right) d\xi \\ &= \xi - \ln 2 \int \frac{d(\xi + \ln 4)}{\ln 4 + \xi} \\ &= \xi - \ln 2 \ln|\xi + \ln 4| + C \\ I(x) &= \ln x - \ln 2 \ln|\ln x + \ln 4| + C \end{aligned}$$

11. $I(x) = \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$. Poniamo

$$\xi = \sqrt{e^x + 1} \Longrightarrow \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x + 1}} = 2\left(\xi^2 - 1\right) d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= 2\int \left(\xi^2 - 1\right) d\xi \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\xi^3 - \xi\right) + C \\ I(x) &= \frac{2}{3}\left(e^x - 2\right)\sqrt{e^x + 1} + C \end{aligned}$$

12. $I(x) = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$. Poniamo

$$\xi = \cos x \Longrightarrow \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = -\frac{1 - \xi^2}{\sqrt{\xi}} d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int \left(\xi^{3/2} - \xi^{-1/2}\right) d\xi \\ &= \frac{2}{5}\xi^{5/2} - 2\xi^{1/2} + C \\ I(x) &= 2\sqrt{\cos x}\left(\frac{1}{5}\cos^2 x - 1\right) + C \end{aligned}$$

13. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} dx$. Poniamo

$$\xi = \frac{1}{x} \Longrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{d\xi}{\xi}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \\ &= -\ln\left|\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right| + C \\ I(x) &= -\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C \end{aligned}$$

***

3.6.3 Calcolare i seguenti integrali utilizzando le sostituzioni trigonometriche

1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$	5) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$
2) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$	6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$
3) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$	7) $\int \sqrt{1-x^2} dx$
4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

1. $I(x) = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Poniamo

$$x = \sin\xi \Longrightarrow \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^2\xi d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int \sin^2\xi d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}\left(\int d\xi - \frac{1}{2}\int \cos 2\xi d(2\xi)\right) \\ &= \frac{\xi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\xi \\ I(x) &= \arcsin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

2. $I(x) = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$. Poniamo

$$\xi = \sqrt{2}\sin\xi \Longrightarrow \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}} = 2^{3/2}\sin^3\xi d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= 2^{3/2}\int \sin^2\xi \sin\xi d\xi \\
&= 2^{3/2}\int \left(\cos^2\xi - 1\right) d\left(\cos\xi\right) \\
&= 2^{3/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\xi - \cos\xi\right) + C \\
&= 2^{3/2}\left[\frac{1}{3}\left(1-\sin^2\xi\right)\sqrt{1-\sin^2\xi} - \sqrt{1-\sin^2\xi}\right] + C \\
I(x) &= 2^{3/2}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} - \sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right] + C \\
&= -\frac{1}{3}\left(4+x^2\right)\sqrt{2-x^2} + C
\end{aligned}$$

3. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$. Poniamo

$$x = \frac{a}{\cos\xi} \Longrightarrow \tan\xi = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2};\ \ dx = \frac{a}{\cos^2\xi}\sin\xi d\xi$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= a\int \frac{\sin^2\xi}{\cos\xi}d\xi \\
&= a\int \frac{1-\cos^2\xi}{\cos\xi}d\xi \\
&= a\left(\int \frac{d\xi}{\cos\xi} - \int \cos\xi d\xi\right) \\
&= a\left(\ln\left|\tan\xi + \frac{1}{\cos\xi}\right| - \sin\xi + C\right) \\
I(x) &= a\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{a}\right| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right) + C
\end{aligned}$$

4. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Anziché eseguire una sostituzione trigonometrica, è conveniente porre:

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{\xi} &\Longrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{d\xi}{\xi} \\
I(\xi) = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} &= -\arccos\xi \\
I(x) &= -\arccos\frac{1}{x} + C
\end{aligned}$$

5. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$. Poniamo

$$x = \tan\xi \Longrightarrow dx = \frac{d\xi}{\cos^2\xi}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= \int \frac{d\xi}{\sin\xi\cos^2\xi} \\
&= \int \frac{\sin^2\xi + \cos^2\xi}{\sin\xi\cos^2\xi} d\xi \\
&= \int \frac{\sin\xi}{\cos^2\xi} d\xi + \int \frac{d\xi}{\sin\xi} \\
&= -\int \frac{d(\cos\xi)}{\cos^2\xi} + \int \frac{d\xi}{\sin\xi} \\
&= \frac{1}{\cos\xi} + \ln\left|\frac{1}{\sin\xi} - \cot\xi\right| + C
\end{aligned}$$

Osservando che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\xi} = \sqrt{1+\tan^2\xi} &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \\
\frac{1}{\cos\xi} &= \sqrt{x^2+1},
\end{aligned}$$

si ottiene:

$$I(x) = \sqrt{x^2+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$$

6. $I(x) = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$. Anziché eseguire una sostituzione trigonometrica, è conveniente porre:

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{\xi} &\Longrightarrow \frac{dx}{x^2} = -d\xi \\
I(\xi) &= -\int d\xi \frac{\xi}{\sqrt{4\xi^2-1}} \\
&= -\frac{1}{8}\int \frac{d(4\xi^2-1)}{\sqrt{4\xi^2-1}} \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{4\xi^2-1} + C \\
I(x) &= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C
\end{aligned}$$

7. $I(x) = \int \sqrt{1-x^2}dx$. Poniamo

$$x = \sin\xi \Longrightarrow \left(dx = \cos\xi d\xi,\ \ \sqrt{1-x^2} = \cos\xi\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= \int \cos^2 d\xi \\
&= \int \frac{\cos 2\xi + 1}{2} d\xi \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int \cos 2\xi d(2\xi) + \int d\xi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\xi + \xi\right) + C \\
I(x) &= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

8. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Poniamo

$$x = \sin^2 \xi \Longrightarrow \left(dx = 2 \sin \xi \cos \xi d\xi, \quad \sqrt{x(1-x)} = \sin \xi \cos \xi \right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= 2 \int d\xi \\ &= 2\xi + C \\ I(x) &= 2 \arcsin \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

3.7 $\int \sin^2 x dx$, $\int \cos^2 x dx$

Dagli esercizi precedenti, risulta:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C = \frac{1}{4}(2x - \sin 2x) + C \\ \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C = \frac{1}{4}(2x + \sin 2x) + C \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.8 Integrazione per parti

Proposizione. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni derivabili, sussiste la **formula di integrazione per parti:**

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx, \tag{3.6}$$

che può essere riscritta come:

$$\int f(x) dg(x) = f(x) g(x) - \int g(x) df(x) \tag{3.7}$$

Dimostrazione. È immediata: basta applicare l'operatore di derivazione ad ambo i membri della (3.7). □

Esempio 1

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C \\ &= \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + C \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x d(-\cos x) \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx, \end{aligned}$$

risolvendo rispetto a $\int e^x \cos x dx$:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

3.8.1 Calcolare gli integrali:

1) $\int \ln x dx$	6) $\int \frac{x}{e^x} dx$	11) $\int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$
2) $\int \arctan x dx$	7) $\int x \cdot 2^{-x} dx$	12) $\int x^2 \ln x dx$
3) $\int \arcsin x dx$	8) $\int x^2 e^{3x} dx$	13) $\int \ln^2 x dx$
4) $\int x \sin x dx$	9) $\int x^3 e^{-x/3} dx$	14) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$
5) $\int x \cos 3x dx$	10) $\int x \sin x \cos x dx$	15) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3.8.2 Soluzioni

1. $I(x) = \int \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C$

2. $I(x) = \int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

3. $I(x) = \int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
$= x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$

4. $I(x) = \int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx$
$= -x \cos x + \sin x + C$

5. $I(x) = \int x \cos 3x dx = \int x d\left(\frac{1}{3} \sin 3x\right) = \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{9} \int \sin 3x d(3x)$
$= \frac{1}{3}\left(x \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x\right) + C$

6. $I(x) = \int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx = \int x d(-e^{-x}) = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int e^{-x} d(-x)$
$= x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int e^{-x} d(-x) = -x e^{-x} - e^{-x} + C = -\frac{x+1}{e^x} + C$

7. $I(x) = \int x \cdot 2^{-x} dx = \int x \cdot d\left(-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right) = -\frac{1}{\ln 2} x \cdot 2^{-x} + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} dx = -\frac{x+1}{2^x \ln 2} + C$

8. $I(x) = \int x^2 e^{3x} dx$. Anzichè integrare per parti, è conveniente utilizzare il **metodo dei coefficienti indeterminati**. Assegnato l'integrale:

$$I_{n,m}(x) = \int p_n(x) e^{mx} dx,$$

essendo $p_n(x)$ un polinomio di grado n:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

risulta:

$$I_{n,m}(x) = q_n(x)\, e^{mx}, \tag{3.8}$$

qui è:

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$$

Applichiamo l'operatore di derivazione ad ambo i membri della (3.8):

$$D\int p_n(x)\, e^{mx} dx = D\left[q_n(x)\, e^{mx}\right],$$

ottenendo:

$$p_n(x) = q_n'(x) + m q_n(x) \tag{3.9}$$

Il principio di identità dei polinomi applicato alla (3.9) conduce ad un sistema di equazioni lineari che permette di ricavare i coefficienti indeterminati b_k, e quindi l'integrale $I_{n,m}(x)$.

Nel caso in esame è:

$$\begin{aligned} I_{2,3}(x) = \int x^2 e^{3x} dx &= \left(b_2 x^2 + b_1 x + b_0\right) e^{3x} \\ x^2 &= 3b_2 x^2 + (3b_1 + 2b_2)\, x + b_2 + 3b_0 \end{aligned}$$

Affinchè sia verificata l'ultima, deve essere:

$$\begin{aligned} 3b_2 &= 1 \\ 3b_1 + 2b_2 &= 0 \\ b_2 + 3b_0 &= 0, \end{aligned}$$

da cui i coeffcienti indeterminati:

$$(b_2, b_1, b_0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right),$$

quindi l'integrale:

$$I_{2,3}(x) = \frac{e^{3x}}{27}\left(9x^2 - 6x + 2\right)$$

9. $I(x) = \int x^3 e^{-x/3} dx$. Procedendo come nell'esercizio precedente:

$$\int x^3 e^{-x/3} dx = \left(b_3 x^2 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0\right) e^{-\frac{x}{3}},$$

donde:

$$\begin{aligned} x^3 e^{-x/3} &= \left(3b_3 x^2 + 2b_2 x + b_1\right) e^{-x/3} - \frac{1}{3}\left(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0\right) e^{-x/3} \\ &= -\frac{b_3}{3} x^3 + \left(3b_3 - \frac{b_2}{3}\right) x^2 + \left(2b_2 - \frac{b_1}{3}\right) x + b_1 - \frac{b_2}{3} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} b_3 + 3 &= 0 \\ 3b_3 - \frac{b_2}{3} &= 0 \\ 2b_2 - \frac{b_1}{3} &= 0 \\ b_0 - 3b_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\int x^3 e^{-x/3} dx = -3\left(x^3 + 9x^2 + 54x + 162\right) e^{-x/3}$$

10. $I(x) = \int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int x \sin 2x dx$
$= \frac{1}{2}\int x d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x)\right]$
$= \frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x) + C$

11. $I(x) = \int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x dx$. Anziché procedere per un'integrazione per parti, conviene applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. Più in generale, consideriamo l'integrale:

$$I_{n,\alpha}(x) \stackrel{def}{=} \int p_n(x)\cos(\alpha x)\, dx \tag{3.10}$$

L'integrale (3.10) ha la forma:

$$I_{n,\alpha}(x) = q_n(x)\cos(\alpha x) + r_n(x)\sin(\alpha x), \tag{3.11}$$

essendo:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \\ q_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} b_k x^k \\ r_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} c_k x^k \end{aligned}$$

Applicando l'operatore di derivazione ad ambo i membri della (3.11) ed eseguendo le dovute semplificazioni:

$$I_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha^3}\left[(a_1 + 2a_2 x)\alpha\cos(\alpha x) + \left((a_0 + a_1 x)\alpha^2 + a_2\left(-2 + \alpha^2 x^2\right)\right)\sin(\alpha x)\right]$$

Nel caso in esame è:

$$I_{2,2}(x) = \frac{1}{4}\left[(5 + 2x)\cos(2x) + \left(2x^2 + 10x + 11\right)\sin(2x)\right]$$

12. $I(x) = \int x^2 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C$

13. $I(x) = \int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + C$

14. $I(x) = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = \int \ln x d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}\ln x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\frac{dx}{x}$
$= -\frac{1}{2x^2}\ln x - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + C = -\frac{1+\ln x}{4x^2} + C$

15. $I(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int \ln x d\left(2\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x}\frac{dx}{x}$
$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-1/2} dx = 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right) + C$

***

3.8.3 Calcolare gli integrali:

1) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
2) $\int x \arctan x dx$
3) $\int x \arcsin x dx$
4) $\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx$
5) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$
6) $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}$
7) $\int e^x \sin x dx$
8) $\int 3^x \cos x dx$
9) $\int e^{ax} \sin bx dx$
10) $\int \sin\left(\ln x\right) dx$

3.8.4 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int \ln x d\left(2\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \sqrt{x}\frac{dx}{x}$
$= 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right) + C$

2. $I(x) = \int x \arctan x dx = \int \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$
Poniamo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x^2}{x^2+1} dx \\ &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \\ &= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= x - \arctan x + C_1, \end{aligned}$$

donde:

$$I(x) = \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C$$

3. $I(x) = \int x \arcsin x dx = \int \arcsin x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$
Poniamo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte $\int \sqrt{1-x^2}dx$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &\underset{x=\sin\xi}{=} \int \sin^2\xi d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\xi)\, d\xi \\ = \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{2}\sin 2\xi\right) + C_1 &\underset{\xi=\arcsin x}{=} \frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C_1,\end{aligned}$$

donde:

$$I(x) = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{4}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

4. $I(x) = \int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$
$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}} = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2} + C$

5. $I(x) = \int \frac{xdx}{\sin^2 x} = \int xd(-\cot x) = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$
$= -x\cot x + \ln|\sin x| + C$

6. $I(x) = \int \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x} = \int x\cos x d(-\cot x) = -x\cos x\cot x + \int \cot x(\cos x - x\sin x)\, dx$
Poniamo:

$$\begin{aligned}J(x) &= \int \cot x(\cos x - x\sin x)\, dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x - x\cos x\sin x}{\sin x}dx \\ &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx - \int x\cos x dx \\ &= \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx - \left(x\sin x - \int \sin x dx\right) \\ &= \int \frac{dx}{\sin x} - x\sin x = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - x\sin x + C,\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}I(x) &= -x\cos x\cot x + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - x\sin x + C \\ &= -\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

7. $I(x) = \int e^x \sin x dx = \int e^x d(-\cos x) = -e^x\cos x + \int \cos x d(e^x)$
Poniamo:

$$\begin{aligned}J(x) &= \int e^x \cos x dx \\ &= \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - I(x),\end{aligned}$$

da cui:

$$I(x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

8. $I(x) = \int 3^x \cos x dx = \int 3^x d(\sin x) = 3^x \sin x - \int \sin x d(3^x) = 3^x \sin x - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x \sin x dx$

Poniamo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int 3^x \sin x dx = \int 3^x d(-\cos x) \\ &= -3^x \cos x + \frac{1}{\ln 3} \int 3^x \cos x dx \end{aligned}$$

Quindi

$$I(x) = 3^x \sin x - \ln 3 \left[-3^x \cos x + I(x) \ln 3\right]$$

Risolvendo rispetto a $I(x)$:

$$I(x) = \frac{3^x (\cos x \ln 3 + \sin x)}{1 + \ln^3} + C$$

9. $I_{a,b}(x) = \int e^{ax} \sin bx dx$

Abbiamo

$$\begin{aligned} I_{a,b}(x) &= \int e^{ax} d\left(-\frac{1}{b} \cos bx\right) \\ = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx &+ \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} J_{a,b}(x) = \int e^{ax} \cos bx dx &= \int e^{ax} d\left(\frac{1}{b} \sin bx\right) \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I_{a,b}(x), \end{aligned}$$

donde:

$$I_{a,b}(x) = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

10. $I(x) = \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \sin(\ln x) - J(x)$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \cos(\ln x) dx \\ &= x \cos(\ln x) + I(x), \end{aligned}$$

quindi:

$$I(x) = \frac{x}{2} \left[x \sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$$

3.8.5 Calcolare i seguenti integrali applicando il metodo più opportuno

1) $\int x^3 \sin x dx$
2) $\int \sqrt{x} \ln(2x)\, dx$
3) $\int x^3 e^{-x^2} dx$
4) $\int e^{\sqrt{x}} dx$
5) $\int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$
6) $\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$
7) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
8) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$
9) $\int x^2 \arctan 3x dx$
10) $\int x (\arctan x)^2\, dx$
11) $\int (\arcsin x)^2\, dx$
12) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$
13) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$
14) $\int x \tan^2 2x dx$
15) $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx$

3.8.6 Soluzioni

1. $I(x) = \int x^3 \sin x dx$

   Poniamo:
$$\int x^3 \sin x dx = \sin x \sum_{k=1}^{3} b_k x^k + \cos x \sum_{k=1}^{3} c_k x^k$$
   Derivando primo e secondo membro, e risolvendo rispetto ai coefficienti b_k, c_k:
$$\int x^3 \sin x dx = -x\left(x^2 - 6\right)\cos x + 3\left(x^2 - 2\right)\sin x + C$$

2. $I(x) = \int \sqrt{x} \ln(2x)\, dx = \int \ln(2x)\, d\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) = \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(2x) - \frac{2}{3}\int x^{1/2} dx$
   $= \frac{2}{3}x^{3/2}\ln(2x) - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C,$
   donde:
$$I(x) = \frac{2}{9}\sqrt{x^3}\left[3\ln(2x) - 2\right] + C$$

3. $I(x) = \int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x^2} d\left(x^2\right)$
   $\underset{\xi = x^2}{=} \int \xi e^{-\xi} d\xi$. Calcoliamo a parte quest'integrale utilizzando il metodo dei coefficienti indeterminati:
$$\int \xi e^{-\xi} d\xi = \left(b_0 + b_1 \xi\right) e^{-\xi} + C$$
   Derivando primo e secondo membro:
$$\xi e^{-\xi} = \left(b_0 + b_1 \xi\right) e^{-\xi},$$
   da cui:
$$(b_0, b_1) = (-1, -1) \Longrightarrow \int \xi e^{-\xi} d\xi = -\left(1 + \xi\right) e^{-\xi} + C$$
   Ripristinando la variabile x:
$$I(x) = -\frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) e^{-x^2} + C$$

4. $I(x) = \int e^{\sqrt{x}} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sqrt{x} \Longrightarrow dx = 2\xi d\xi,$$

donde:

$$I(\xi) = 2\int \xi e^{\xi} d\xi = 2\left(\xi e^{\xi} - \int e^{\xi} d\xi\right) = 2(\xi - 1)e^{\xi} + C,$$

ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2\left(\sqrt{x} - 1\right)e^{\sqrt{x}} + C$$

5. $\int (x^2 - 2x + 3)\ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 - (\ln x)x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 3x\ln x - 3x + C$

6. $\int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx = \frac{x^2-1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C$

7. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = - - \frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C$

8. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \ln x\left[\ln(\ln x) - 1\right] + C$

9. $\int x^2 \arctan 3x dx = \frac{1}{3}x^3 \arctan 3x - \frac{1}{18}\left[x^2 - \frac{1}{9}\ln(1 + 9x^2)\right] + C$

10. $\int x(\arctan x)^2 dx = \frac{x^2+1}{2}(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$

11. $\int (\arcsin x)^2 dx = \arcsin x\left(x\arcsin x + 2\sqrt{1 - x^2}\right) - 2x + C$

12. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$

13. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = -2\sqrt{1 - x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

14. $\int x\tan^2 2x dx = \frac{1}{2}x\tan 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}\ln(1 + \tan^2 2x) + C$

15. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx = \frac{1}{5}\frac{-\sin x - 2\cos x}{e^x}\sin x - \frac{2}{5e^x} + C$

3.9 Integrali contenenti un trinomio di secondo grado

Consideriamo gli integrali del tipo:

$$F(x) = \int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx, \tag{3.12}$$

essendo $m, n, a, b, c \in \mathbb{R}$. Senza perdita di generalità, consideriamo $a > 0$.
Poniamo:

$$mx + n = A(2ax + b) + B, \tag{3.13}$$

da cui:

$$A = \frac{m}{2a},\ B = n - \frac{mb}{2a}, \tag{3.14}$$

donde:

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx &= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \\ &= \frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + C_1 + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)G(x),\end{aligned}$$

essendo:

$$G(x) = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

Per calcolare $G(x)$ procediamo nel modo seguente:

$$ax^2+bx+c = a(x+k)^2 + l, \tag{3.15}$$

da cui si ricava:

$$k = \frac{b}{2a},\quad l = c - \frac{b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}, \tag{3.16}$$

essendo

$$\Delta = b^2 - 4ac, \tag{3.17}$$

il discriminante del trinomio.
Distinguiamo i tre casi:

1. $\Delta < 0$
2. $\Delta > 0$
3. $\Delta = 0$

Iniziamo con il caso 1:

$$G(x) = \frac{1}{l}\int \frac{dx}{1+\left[\sqrt{\frac{a}{l}}(x+k)\right]^2}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\sqrt{\frac{a}{l}}(x+k) = \xi \Longrightarrow dx = \sqrt{\frac{l}{a}}d\xi \tag{3.18}$$

L'integrale $G(\xi)$ diventa:

$$G(\xi) = \sqrt{\frac{1}{al}}\int \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{al}}\arctan\xi + C_2$$

Ripristinando la variabile x:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{al}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a}{l}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right] + C_2$$

Osserviamo che:

$$\frac{a}{l} = -\frac{4a^2}{\Delta} \qquad a \cdot l = -\frac{\Delta}{4}, \tag{3.19}$$

quindi:

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C_2 \tag{3.20}$$

Finalmente l'integrale (3.12):

$$F(x) = \frac{m}{2a} \ln\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(n - \frac{mb}{2a}\right) \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C \tag{3.21}$$

Esempio 7. Calcoliamo:

$$F(x) = \int \frac{x+2}{x^2-3x+10} dx$$

Qui è $\Delta = -31$, quindi applichiamo la (3.21):

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2-3x+10\right) + \frac{7}{\sqrt{31}} \arctan\left(\frac{2x-3}{\sqrt{31}}\right) + C$$

Nel caso speciale $m = 0$, $n = 1$:

$$F(x) = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C \tag{3.22}$$

***

Nel caso 2, la (3.15) si scrive:

$$ax^2+bx+c = a(x+k)^2 - |l|, \tag{3.23}$$

giacché $l < 0$. Quindi

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{dx}{a(x+k)^2 - |l|} \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{d(x+k)}{(x+k)^2 - \frac{|l|}{a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a|l|}} \ln\left|\frac{x+k-\sqrt{\frac{|l|}{a}}}{x+k+\sqrt{\frac{|l|}{a}}}\right| + C_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| + C_2, \end{aligned}$$

Esempio 8.

$$G(x) = \int \frac{dx}{x^2-2x-3}$$

Qui è: $\Delta = 16$, quindi:

$$G(x) = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$$

cioè:

$$F(x) = \frac{m}{2a} \ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(n - \frac{mb}{2a}\right) \ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| + C \tag{3.24}$$

***

Caso 3 ($\Delta = 0$): $l = 0$, per cui

$$\begin{aligned} G(x) &= \int \frac{dx}{a(x+k)^2} \\ &= \frac{1}{a}\int \frac{d(x+k)}{(x+k)^2} \\ &= -\frac{2}{2ax+b} + C_2, \end{aligned}$$

cioè:

$$F(x) = \frac{m}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) - \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\frac{2}{2ax+b} + C \tag{3.25}$$

Esempio 9.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{3x+2}{x^2-4x+4}dx \\ &= \frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+4\right) - \frac{8}{x-2} + C \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\Delta < 0 \Longrightarrow F(x) = \frac{m}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(n - \frac{mb}{2a}\right)\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C$$

$$\Delta > 0 \Longrightarrow F(x) = \frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(n - \frac{mb}{2a}\right)\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| + C$$

$$\Delta = 0 \Longrightarrow F(x) = \frac{m}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) - \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\frac{2}{2ax+b} + C$$

3.9.1 Calcolare gli integrali:

1) $\int \frac{x^2-1}{x^2-x-1}dx$ 4) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$ 7) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$

2) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ 5) $\int \frac{(x-2)^2}{x^2+3x+4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2+2x}$ 6) $\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}dx$

3.9.2 Soluzioni

1. $F(x) = \int \frac{x^2-1}{x^2-x-1}dx = \int\left(1 + \frac{x}{x^2-x-1}\right)dx = x + \int \frac{x}{x^2-x-1}dx$
   $= x + \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2-x-x\right| + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|\right] + C$

2. $F(x) = \int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

3. $F(x) = \int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$

4. $F(x) = \int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right) + 4\arctan(x-2) + C$

5. $F(x) = \int \frac{(x-2)^2}{x^2+3x+4} dx = x - \frac{7}{2}\left[\ln\left(x^2+3x+4\right) - \frac{6}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{7}}\right)\right] + C$

6. $F(x) = \int \frac{x^2}{x^2-6x+10} dx = x + 3\ln\left(x^2-6x+10\right) + 8\arctan(x-3) + C$

7. $F(x) = \int \frac{dx}{3x^2-x+1} = \frac{2\sqrt{11}}{11} \arctan\left(\frac{6x-1}{\sqrt{11}}\right) + C$

***

Consideriamo integrali del tipo:

$$H(x) = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \tag{3.26}$$

Qui vanno distinti i casi:

1. $a > 0$
2. $a < 0$

Consideriamo $a > 0$
Applicando l'artificio (3.13):

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + C_1 + \left(n - \frac{mb}{2a}\right) K(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Per calcolare $K(x)$ applichiamo l'artificio (3.15):

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a(x+k)^2+l}},$$

cosicchè vanno distinti i tre casi:

1. $\Delta < 0$
2. $\Delta > 0$
3. $\Delta = 0$

Iniziamo con il caso 1:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\left[\sqrt{\frac{a}{l}}(x+k)\right]^2}}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to \xi = \sqrt{\frac{a}{l}}(x+k)$:

$$K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\xi + \sqrt{\xi^2+1}\right| + C_2$$

Ripristinando la variabile x:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \sqrt{\frac{a}{l}} (x+k) + \sqrt{1 + \frac{a}{l} (x+k)^2} \right| + C_2$$

Per le (3.19):

$$\xi = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}},$$

donde:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + \sqrt{1 + \frac{(2ax+b)^2}{|\Delta|}} \right| + C_2$$

Finalmente l'integrale (3.26):

$$H(x) = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left(n - \frac{mb}{2a} \right) \ln \left| \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + \sqrt{1 + \frac{(2ax+b)^2}{|\Delta|}} \right| + C \qquad (3.27)$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx \\ &= \sqrt{x^2+2x+2} + 2 \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2+2x+2} \right| + C \end{aligned}$$

Caso 2 ($\Delta > 0$) vale la (3.23), donde:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{|l|}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left[\sqrt{\frac{a}{|l|}} (x+k) \right]^2 - 1}}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sqrt{\frac{a}{|l|}} (x+k)$$

$$\begin{aligned} K(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right| + C_2 \end{aligned}$$

Per le (3.19):

$$\xi = \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}},$$

donde:

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{\frac{(2ax+b)^2}{\Delta} - 1} \right| + C_2$$

Quindi:

$$H(x) = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} + \sqrt{\frac{(2ax+b)^2}{\Delta} - 1}\right| + C \tag{3.28}$$

Caso 3 ($\Delta = 0$):

$$\begin{aligned} K(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{a(x+k)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|x+k| + C_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2a}\right| + C_2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$H(x) = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2a}\right| + C \tag{3.29}$$

Consideriamo $a < 0$

$$H(x) = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + C_1 + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)K(x)$$

Qui è:

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{-|a|(x+k)^2 + l}}$$

con k e l dati dalla (3.16). Consideriamo solo il caso $\Delta > 0$, giacché per $\Delta \leq 0$ l'integrando è immaginario.

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left[\sqrt{\frac{|a|}{l}}(x+k)\right]^2}}$$

Eseguendo il cambio di variabile

$$\xi = \sqrt{\frac{|a|}{l}}(x+k)$$

otteniamo:

$$K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\xi + C_2$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{4a^2}{\Delta}}\frac{2ax+b}{2a} = -\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow K(x) = -\frac{1}{\sqrt{|a|}}\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C_2, \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde:

$$H(x) = \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{1}{\sqrt{|a|}}\left(n - \frac{mb}{2a}\right)\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C \tag{3.31}$$

Esempi

1. $H(x) = \int \frac{2x-3}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx = -\sqrt{-2x^2+3x+2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right) + C$

2. $H(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+5}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right) + C$

3.9.3 Calcolare gli integrali

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$	4) $\int \frac{-x+2}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$
2) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$	5) $\int \frac{10x-4}{\sqrt{2+5x-7x^2}}dx$
3) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-4x-6x^2}}dx$	6) $\int \frac{-2x+3}{\sqrt{14+5x-7x^2}}dx$

3.9.4 Soluzioni

1. $H(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \arcsin(2x-1) + C$

2. $H(x) = \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = -2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C$

3. $H(x) = \int \frac{3x+2}{\sqrt{1-4x-6x^2}}dx = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4x-6x^2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\arcsin\left[\frac{\sqrt{10}}{5}(3x+1)\right] + C$

4. $H(x) = \int \frac{-x+2}{\sqrt{2-x-x^2}}dx = \sqrt{2-x-x^2} + \frac{5}{2}\arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$

5. $H(x) = \int \frac{10x-4}{\sqrt{2+5x-7x^2}}dx = -\frac{10}{7}\sqrt{2+5x-7x^2} - \frac{3\sqrt{7}}{49}\arcsin\left(\frac{14x-5}{9}\right) + C$

6. $H(x) = \int \frac{-2x+3}{\sqrt{14+5x-7x^2}}dx$
   $= \frac{2}{7}\sqrt{(14+5x-7x^2)} + \frac{16}{49}\sqrt{7}\arcsin\frac{14}{417}\sqrt{417}\left(x - \frac{5}{14}\right) + C$

Esercizio 10. Calcolare:

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$$

Soluzione 11. $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}$
Risulta $\Delta = p^2 - 4q$, per cui se $\Delta < 0$ abbiamo:

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}\left\{1 + \left[\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)\right]^2\right\}}}$$

Poniamo:

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left(x+\frac{p}{2}\right),$$

donde:

$$K(\xi) = \ln\left|\xi + \sqrt{1+\xi^2}\right|$$

Cioè:

$$\begin{aligned} K(x) &= \ln\left[\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|\right] + C_1 \\ &= \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| + C, \end{aligned}$$

essendo $C = \ln\left[\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\right] + C_1$.
Se $\Delta > 0$:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{|4q-p^2|}{4},$$

donde:

$$K(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{|4q-p^2|}{4}\left\{\left[\frac{2}{\sqrt{|4q-p^2|}}\left(x+\frac{p}{2}\right)-1\right]^2\right\}}}$$

Eseguendo il cambio di variabile:

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{|4q-p^2|}}\left(x+\frac{p}{2}\right),$$

otteniamo:

$$K(\xi) = \ln\left|\xi+\sqrt{\xi-1}\right| + C_1$$

In funzione di x:

$$\begin{aligned} K(x) &= \ln\left[\frac{2}{\sqrt{|4q-p^2|}}\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right|\right] + C_1 \\ &= \ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+px+q}\right| + C, \end{aligned}$$

essendo $C = \ln\left[\frac{2}{\sqrt{|4q-p^2|}}\right] + C_1$.
Se $\Delta = 0$:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

donde:

$$K(x) = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = \ln\left|x+\frac{p}{2}\right| + C$$

***

Consideriamo gli integrali del tipo:

$$L(x) = \int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3.32}$$

essendo $m, n, a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $(m,n) \neq (0,0)$.
Gli integrali di questo tipo si riducono a quelli del tipo (3.26) eseguendo il cambio di variabile:

$$\xi = \frac{1}{mx+n}$$

Esempio

$$L(x) = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Esegiamo il cambio di variabile:

$$x + 1 = \frac{1}{\xi} \Longrightarrow dx = -\frac{d\xi}{\xi^2},$$

donde:

$$\begin{aligned} L(\xi) &= -\int \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi^2 - 2\xi + 1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| 2\xi - 1 + \sqrt{4\xi^2 - 4\xi + 2} \right| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile indipendente:

$$L(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 - x + \sqrt{2(1+x^2)}}{1+x} \right| + C$$

3.9.5 Calcolare gli integrali

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ 3) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$ 4) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

3.9.6 Soluzioni

1. $L(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x = \frac{1}{\xi},$$

donde:

$$\begin{aligned} L(\xi) &= -\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \\ &= -\ln \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$L(x) = \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C$$

2. $L(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x = \frac{1}{\xi},$$

donde:

$$L(\xi) = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + \xi + 1}}$$

Applicando la (3.30):

$$L(\xi) = \arcsin\left(\frac{-2\xi+1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$L(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{x\sqrt{5}}\right) + C$$

3. $L(x) = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x - 1 = \frac{1}{\xi},$$

donde:

$$L(\xi) = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2+2\xi+1}}$$

Applicando la (3.30):

$$L(\xi) = \arcsin\left(\frac{-\xi+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$L(x) = \arcsin\left[\frac{x-2}{\sqrt{2}(x-1)}\right] + C$$

4. $L(x) = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x + 1 = \frac{1}{\xi},$$

donde:

$$\begin{aligned} L(\xi) &= -\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ &= -\arcsin\xi + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$L(x) = -\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right) + C$$

***

Consideriamo gli integrali del tipo:

$$M(x) = \int \sqrt{ax^2+bx+c}dx \tag{3.33}$$

Qui vanno distinti i casi:

1. $a > 0$
2. $a < 0$

Consideriamo $a > 0$
Ricaviamo dal trinomio un quadrato completo applichando l'artificio (3.15):

$$M(x) = \int \sqrt{a(x+k)^2 + l} dx$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = x + k \tag{3.34}$$

Quindi:

$$M(\xi) = \sqrt{a} \int \sqrt{\xi^2 + \frac{l}{a}} d\xi \tag{3.35}$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro della (3.35), ponendo $\alpha = l/a$. Integrando per parti:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\xi^2 + \alpha} d\xi &= \xi \sqrt{\xi^2 + \alpha} - \int \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \alpha}} \\
&= \xi \sqrt{\xi^2 + \alpha} - \int \frac{(\xi^2 + \alpha) - \alpha}{\sqrt{\xi^2 + \alpha}} d\xi \\
&= \xi \sqrt{\xi^2 + \alpha} - \int \sqrt{\xi^2 + \alpha} d\xi + \alpha \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \alpha}},
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\xi^2 + \alpha} d\xi &= \frac{\xi}{2} \sqrt{\xi^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \alpha}} \\
&= \frac{\xi}{2} \sqrt{\xi^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln \left| \xi + \sqrt{\xi^2 + \alpha} \right| + C_1
\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\xi &= x + k = \frac{2ax + b}{2a} \\
\alpha &= -\frac{\Delta}{4a^2} \Longrightarrow \xi^2 + \alpha = \frac{ax^2 + bx + c}{a}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
M(x) &= \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{\Delta \sqrt{a}}{8a^2} \ln \left| \frac{2ax + b}{2a} + \sqrt{\frac{ax^2 + bx + c}{a}} \right| + C_2 \\
&= \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{\Delta \sqrt{a}}{8a^2} \left[\ln \left| \sqrt{a} \frac{2ax + b}{2a} + \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| - \ln \sqrt{a} \right] + C_2
\end{aligned}$$

Incorporando $\ln \sqrt{a}$ nella costante di integrazione:

$$C = C_2 + \frac{\Delta \sqrt{a}}{8a^2} \ln \sqrt{a},$$

otteniamo:

$$M(x) = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{\Delta \sqrt{a}}{8a^2} \ln \left| \sqrt{a} \frac{2ax + b}{2a} + \sqrt{ax^2 + bx + c} \right| + C \tag{3.36}$$

Esempi

$M(x) = \int \sqrt{x^2+2x-3}dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x-3} - 2\ln\left(1+x+\sqrt{x^2+2x-3}\right) + C$

$M(x) = \int \sqrt{3x^2+x+2}dx$

$= \frac{1}{72}\left[6(6x+1)\sqrt{3x^2+x+2} + 23\sqrt{3}\ln\left|\frac{1+6x}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3x^2+x+2}\right|\right] + C$

$M(x) = \int \sqrt{25x^2+4x+7}dx$

$= \frac{1}{250}\left[5(2+25x)\sqrt{25x^2+4x+7} + 171\ln\left|\frac{2}{5}+5x+\sqrt{25x^2+4x+7}\right|\right] + C$

Consideriamo $a < 0$

L'integrale diventa (3.33)

$$M(x) = \sqrt{|a|}\int \sqrt{\beta^2 - (x+k)^2}dx,$$

essendo

$$\beta^2 = \frac{l}{|a|} = \frac{\Delta}{4a^2}$$

da ciò segue affinchè l'integrando sia reale, deve essere $\Delta > 0$. Eseguendo il cambio di variabile (3.34):

$$M(\xi) = \sqrt{|a|}\int \sqrt{\beta^2 - \xi^2}d\xi \tag{3.37}$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\beta^2-\xi^2}d\xi &= \xi\sqrt{\beta^2-\xi^2} + \int \frac{\xi^2}{\sqrt{\beta^2-\xi^2}}d\xi \\
&= \xi\sqrt{\beta^2-\xi^2} - \int \frac{(\beta^2-\xi^2)-\beta^2}{\sqrt{\beta^2-\xi^2}}d\xi \\
&= \xi\sqrt{\beta^2-\xi^2} - \int \sqrt{\beta^2-\xi^2}d\xi + \beta^2\int \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2-\xi^2}} \\
&= \xi\sqrt{\beta^2-\xi^2} - \int \sqrt{\beta^2-\xi^2}d\xi + \beta^2\arcsin\left(\frac{\xi}{\beta}\right),
\end{aligned}$$

da cui:

$$\int \sqrt{\beta^2-\xi^2}d\xi = \frac{\xi}{2}\sqrt{\beta^2-\xi^2} + \frac{\beta^2}{2}\arcsin\left(\frac{\xi}{\beta}\right) + C_1$$

Sostituendo nella (3.37) e ripristinando la variabile x:

$$M(x) = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{\Delta\sqrt{|a|}}{8a^2}\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C$$

Esempi

$M(x) = \int \sqrt{-x^2-2x+1}dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{-x^2-2x+1} + \arcsin\left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right) + C$

$M(x) = \int \sqrt{x-x^2}dx = \frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-1) + C$

$M(x) = \int \sqrt{2-x-x^2}dx = \frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$

***

Riassumendo:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx \tag{3.38}$$
$$= \frac{m}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \begin{cases} +\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+C, & \text{se } \Delta<0 \\ +\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right|+C, & \text{se } \Delta>0 \\ -\frac{2}{2ax+b}+C, & \text{se } \Delta=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{3.39}$$
$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}+\sqrt{1+\frac{(2ax+b)^2}{|\Delta|}}\right|+C, & \text{se } a>0,\Delta<0 \\ \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}+\sqrt{\frac{4a(ax^2+bx+c)}{\Delta}}\right|+C, & \text{se } a>0,\Delta>0 \\ \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2a}\right|+C, & \text{se } a>0,\Delta=0 \\ -\frac{1}{\sqrt{|a|}}\left(n-\frac{mb}{2a}\right)\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)+C, & \text{se } a<0,\Delta>0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{3.40}$$

si riconduce alla forma (3.39)
mediante la sostituzione

$$\xi = \frac{1}{mx+n}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx \tag{3.41}$$
$$= \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \begin{cases} -\frac{\Delta\sqrt{a}}{8a^2}\ln\left|\sqrt{a}\frac{2ax+b}{2a}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C, & \text{se } a>0 \\ -\frac{\Delta\sqrt{|a|}}{8a^2}\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)+C, & \text{se } a<0 \end{cases}$$

3.10 Coppia di integrali notevoli

Dai calcoli precedenti segue l'esistenza della coppia di integrali notevoli:

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}d\xi = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\alpha}\right|+C \tag{3.42}$$
$$\int \sqrt{\beta^2-x^2}d\xi = \frac{x}{2}\sqrt{\beta^2-x^2}+\frac{\beta^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\beta}\right)+C$$

3.11 Esercizi riepilogativi sugli integrali contenenti un trinomio di secondo grado

3.11.1 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	11) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$	21) $\int \sqrt{4x^2-4x+5}dx$
2) $\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}$	12) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx$	22) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}}$
3) $\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$	13) $\int \frac{2x-3}{4x^2-11}dx$	23) $\int \frac{2x-3}{x^2+6x+13}dx$
4) $\int \frac{dy}{y^2+10y+30}$	14) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx$	24) $\int \frac{x-1}{3x^2-4x+3}dx$
5) $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx$	15) $\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3}dx$	25) $\int \frac{x}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx$
6) $\int \frac{2x-7}{x^2+9}dx$	16) $\int \sqrt{25-x^2}dx$	26) $\int \frac{5-4x}{\sqrt{12x-4x^2-8}}dx$
7) $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}}$	17) $\int \sqrt{3-4x^2}dx$	27) $\int \sqrt{16-9x^2}dx$
8) $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}}$	18) $\int \sqrt{x^2-36}dx$	28) $\int \sqrt{x^2-16}dx$
9) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$	19) $\int \sqrt{3x^2+5}dx$	29) $\int \sqrt{4x^2+9}dx$
10) $\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx$	20) $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$	30) $\int \sqrt{x^2-2x-3}dx$

3.11.1.1 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x = \frac{1}{\xi},$$

donde:

$$I(\xi) = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\arcsin \xi + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

2. $\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right)$

3. $\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8| + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$

4. $\int \frac{dy}{y^2+10y+30} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{y+5}{\sqrt{5}}\right) + C$

5. $\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + 3\arcsin x + C$

6. $\int \frac{2x-7}{x^2+9}dx = \ln(x^2+9) - \frac{7}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x-4}{6}\right) + C$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x+6}{8}\right) + C$

9. $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) + C$

10. $\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx = \frac{1}{9}\ln|9x^2-12x+8| + \frac{13}{18}\arctan\left(\frac{3}{2}x-1\right) + C$

11. $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = 4\arcsin\left(\frac{1}{2}x-1\right) - \sqrt{4x-x^2} + C$

12. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}dx = \sqrt{x^2+9} + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C$

13. $\int \frac{2x-3}{4x^2-11}dx = \frac{1}{4}\ln|4x^2-11| - \frac{3}{4\sqrt{11}}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{11}}{2x+\sqrt{11}}\right| + C$

14. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}dx = \ln\left|1+x+\sqrt{x^2+2x-3}\right| + \sqrt{x^2+2x-3} + C$

15. $\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3}dx =$

$= -\frac{1}{8}\ln|4x^2+4x-3| + \frac{5}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C$

$= -\frac{1}{8}\left(\ln|2x+3| + \ln|2x-1|\right) + \frac{5}{16}\left(\ln|2x-1| - \ln|2x+3|\right) + C$

$= -\frac{7}{16}\ln|2x+3| + \frac{3}{16}\ln|2x-1| + C$

16. $\int \sqrt{25-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5} + C$

17. $\int \sqrt{3-4x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$

18. $\int \sqrt{x^2-36}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-36} - 18\ln\left|x+\sqrt{x^2-36}\right| + C$

19. $\int \sqrt{3x^2+5}dx = \frac{x}{2}\sqrt{3x^2+5} + \frac{5\sqrt{3}}{6}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+5}\right| + C$

20. $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{1+x}{2}\right) + C$

21. $\int \sqrt{4x^2-4x+5}dx = \frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+5} + \ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right| + C$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{x}\right) + C$

23. $\int \frac{2x-3}{x^2+6x+13}dx = \ln|x^2+6x+13| - \frac{9}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$

24. $\int \frac{x-1}{3x^2-4x+3}dx = \frac{1}{6}\ln|3x^2-4x+3| - \frac{\sqrt{5}}{15}\arctan\left(\frac{3x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{27+6x-x^2}}dx = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\arcsin\left(\frac{x-3}{6}\right) + C$

26. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{12x-4x^2-8}}dx = \frac{1}{2}\arcsin(3-2x) + 2\sqrt{3x-x^2-2} + C$

27. $\int \sqrt{16-9x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{16-9x^2} + \frac{8}{3}\arcsin\left(\frac{3}{4}x\right) + C$

28. $\int \sqrt{x^2-16}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} - 8\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right| + C$

29. $\int \sqrt{4x^2+9}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{(4x^2+9)} + \frac{9}{4}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+9}\right| + C$

30. $\int \sqrt{x^2-2x-3}dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-3} - 2\ln\left|-1+x+\sqrt{x^2-2x-3}\right| + C$

3.11.2 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \sqrt{12+4x-x^2}dx$	5) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$
2) $\int \sqrt{x^2+4x}dx$	6) $\int \frac{\sin 8x}{9+\sin^4 4x}dx$
3) $\int \sqrt{x^2-8x}dx$	7) $\int \frac{xdx}{x^4-4x^2+3}$
4) $\int \sqrt{6x-x^2}dx$	8) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}dx$

3.11.3 Soluzioni

1. $\int \sqrt{12+4x-x^2}dx = \frac{x-2}{2}\sqrt{12+4x-x^2} + 8\arcsin\left(\frac{x-2}{4}\right) + C$

2. $\int \sqrt{x^2+4x}dx = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2+4x} - 2\ln\left|2+x+\sqrt{x^2+4x}\right| + C$

3. $\int \sqrt{x^2-8x}dx = \frac{x-4}{2}\sqrt{x^2-8x} - 8\ln\left|x-4+\sqrt{x^2-8x}\right| + C$

4. $\int \sqrt{6x-x^2}dx = \frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\left(-1+\frac{1}{3}x\right) + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{2}x + C$

6. $I(x) = \int \frac{\sin 8x}{9+\sin^4 4x}dx = 2\int \frac{\sin 4x\cos 4x}{9+\sin^4 4x}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sin 4x,$$

donde:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2}\int \frac{\xi d\xi}{9+(\xi^2)^2} \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{d(\xi^2)}{9+(\xi^2)^2} \\ &= \frac{1}{36}\int \frac{d(\xi^2)}{1+\left(\frac{\xi^2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{12}\arctan\left(\frac{\xi^2}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{12}\arctan\left(\frac{\sin^2 4x}{3}\right) + C$$

7. $I(x) = \int \frac{xdx}{x^4-4x^2+3}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = x^2,$$

donde:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\xi^2 - 4\xi + 3} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\xi - 3}{\xi - 1}\right| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2 - 3}{x^2 - 1}\right| + C$$

8. $I(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sin x,$$

donde:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\xi^2 - 6\xi + 12} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\xi - 3}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left|\frac{\sin x - 3}{\sqrt{3}}\right| + C$$

3.12 Integrazione delle funzioni razionali

Consideriamo l'integrale indefinito:

$$\int f(x)\, dx, \tag{3.43}$$

essendo:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{3.44}$$

con $p(x)$, $q(x)$ polinomi in x di grado m e n rispettivamente:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \tag{3.45}$$

Definizione. La funzione $f(x)$ espressa dalla (3.44) è una ***funzione razionale***. Più precisamente, è una ***funzione razionale propria*** se $m < n$; una ***funzione razionale impropria*** se $m \geq n$.

3.12.1 Funzioni razionali proprie

Sotto ragionevoli ipotesi, la funzione (3.44) ammette una **decomposizione in frazioni parziali**, cioè somme di fattori del tipo:

$$\frac{A_i}{x-\xi_i}, \frac{A_{i,j}}{(x-\xi_i)^{\nu_j}}, \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \frac{A_i x+B_i}{(ax^2+bx+c)^i}$$

Ad esempio, se $q(x)$ ha r radici reali distinte:

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r$$

Se ν_k la molteciplità di ξ_k:

$$\sum_{k=1}^{r} \nu_k = n,$$

donde:

$$q(x) = \prod_{k=1}^{r} (x-\xi_k)^{\nu_k} \tag{3.46}$$

In tal caso la decomposizione in frazioni parziali è

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{A_{i,j}}{(x-\xi_i)^j}, \tag{3.47}$$

essendo $A_{i,j}$ **coefficienti indeterminati**. Esplicitando il secondo membro della (3.47):

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_{1,1}}{x-\xi_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-\xi_1)^2} + ... + \frac{A_{1,\nu_1}}{(x-\xi_1)^{\nu_1}} \\ & + \frac{A_{2,1}}{x-\xi_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-\xi_2)^2} + ... + \frac{A_{2,\nu_2}}{(x-\xi_1)^{\nu_2}} \\ & ... + \frac{A_{r,1}}{x-\xi_r} + \frac{A_{r,2}}{(x-\xi_r)^2} + ... + \frac{A_{r,\nu_r}}{(x-\xi_r)^{\nu_r}} \end{aligned} \tag{3.48}$$

Nel caso speciale $r = n$ (cioè $q(x)$ ammette n radici reali e distinte ciascuna di molteplicità 1), la decomposizione (3.47) è:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x-\xi_i} = \frac{A_1}{x-\xi_1} + \frac{A_2}{x-\xi_2} + ... + \frac{A_n}{x-\xi_n} \tag{3.49}$$

La (3.49) esprime una decomposizione in **fattori lineari distinti**.

Esempio 12.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_1}{x-2} \\ &= \frac{(A_1+A_2)x + 2(A_1-A_2)}{x^2-4} \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0 \\ 2(A_1 - A_2) &= 1 \end{aligned} \tag{3.50}$$

La soluzione del sistema (3.50) è:

$$(A_1, A_2) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right),$$

donde la demposizione in fattori lineari distinti è:

$$f(x) = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$$

Nel caso generale $r \in \{1, 2, ...n-1\}$, si applica la (3.47) che esprime una decomposizione in **fattori lineari ripetuti**.

Esempio 13.

$$p(x) = x, \quad q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

Cerchiamo le radici reali di $q(x)$:

$$q(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1, -1$$

Precisamente:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1, \quad (\nu_1 = 1) \\ \xi_2 &= -1, \quad (\nu_2 = 2), \end{aligned}$$

per cui:

$$q(x) = (x-1)(x+1)^2$$

La decomposizione si scrive:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_{1,1}}{x-1} + \frac{A_{2,1}}{x+1} + \frac{A_{2,2}}{(x+1)^2}$$

Per non appesantire la notazione, ridefiniamo i coefficienti della decomposizione:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}$$

Abbiamo:

$$(A + B_1)x^2 + (2A + B_2 - 1)x + A - B_1 - B_2 = 0$$

da cui il sistema lineare:

$$\begin{aligned} A + B_1 + 0 &= 0 \\ 2A + 0 + B_2 &= 1 \\ A - B_1 - B_2 &= 0 \end{aligned}$$

che è compatibile e determinato:

$$(A, B_1, B_2) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

Perciò:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

Quindi l'integrale:

$$\int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C$$

Esempio 14.

$$I(x) = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

essendo:

$$p(x) = 1,\ q(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2,$$

donde:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} A + B_1 + 0 &= 0 \\ 2A + B_1 - B_2 &= 0 \\ A + 0 + 0 &= 1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A, B_1, B_2) = (1, -1, 1)$$

Quindi $I(x) = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C$

Se $q(x)$ contiene dei fattori irriducibili ax^2+bx+c, a ciascuno di essi corrisponde una frazione parziale propria:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

con A, B coefficienti indeterminati. In tal caso si ha una decomposizione in **fattori quadratici distinti**.

Esempio 15. Sia:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

La decomposizione è:

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Deve essere:

$$\begin{aligned} A + 0 + C + 0 &= 1 \\ 0 + B + 0 + D &= 1 \\ A + 0 + 2C + 0 &= 1 \\ 0 + B + 0 + 2D &= 2 \end{aligned}$$

Tale sistema lineare è compatibile e determinato:

$$(A, B, C, D) = (1, 0, 0, 1)$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

L'integrale vale:

$$\int f(x)\, dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + C$$

Se $q(x)$ contiene dei fattori irriducibili $(ax^2+bx+c)^\beta$, a ciascuno di essi corrisponde una somma di β frazioni parziali proprie:

$$\sum_{i=1}^{\beta} \frac{A_i x + B_i}{(ax^2+bx+c)^i},$$

con A_i, B_i coefficienti indeterminati. In tal caso si ha una decomposizione in **fattori quadratici ripetuti**.

Esempio 16. Sia:

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

Abbiamo:

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} A+0+0+0 &= 0 \\ 0+B+0+0 &= 2 \\ A+0+C+0 &= 0 \\ 0+B+0+D &= 3, \end{aligned}$$

che è compatibile e determinato, con soluzione:

$$(A, B, C, D) = (0, 2, 0, 1)$$

donde:

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

Ciò implica che l'integrale è:

$$I(x) = \int f(x)\,dx = 2\arctan x + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro attraverso il cambio di variabile:

$$x = \tan\xi,$$

per cui:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \cos^2\xi d\xi = \frac{1}{2}(\xi + \sin\xi\cos\xi) + C$$

Per ripristinare la variabile x è necessario esplicitare:

$$\sin(\arctan x),\ \cos(\arctan x)$$

A tale scopo osserviamo che:

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 x + 1}},$$

quindi:

$$\begin{aligned} \cos(\arctan x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \sin(\arctan x) &= \sqrt{1-\cos^2(\arctan x)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned} \tag{3.51}$$

Dalle (3.51) otteniamo:

$$\sin\xi\cos\xi = \frac{x}{x^2+1},$$

quindi l'integrale:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C_1 \tag{3.52}$$

Finalmente:

$$\int f(x)\,dx = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

Esempio 17. Sia:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$$

Abbiamo:

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$$

Eseguendo i calcoli:

$$\begin{aligned}
A+0+0+0+0+0 &= 1 \\
0+B+0+0+0+0 &= -1 \\
4A+0+C+0+0+0 &= 4 \\
0+4B+0+D+0+0 &= -4 \\
4A+0+2C+0+E+0 &= 8 \\
0+4B+0+2D+0+F &= -4,
\end{aligned}$$

la cui unica soluzione è:

$$(A, B, C, D, E, F) = (1, -1, 0, 0, 4, 0)$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+2} + \frac{4x}{(x^2+2)^3}$$

L'integrale:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{x}{x^2+2}dx - \int \frac{dx}{x^2+2} + 4\int \frac{xdx}{(x^2+2)^3} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C
\end{aligned}$$

La tabella seguente riassume i vari casi:

Fattore	**Frazioni parziali**	N
$ax+b$	$\frac{A}{ax+b}$	1
$(ax+b)^\alpha$	$\frac{A}{(ax+b)^i}, \quad i = 1, 2, ..., \alpha$	α
ax^2+bx+c	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$	1
$(ax^2+bx+c)^\beta$	$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^i}, \quad i = 1, 2, ..., \beta$	β

Se il polinomio $q(x)$ ha radici reali e complesse multiple, per il calcolo dell'integrale (3.43) si applica la seguente formula di riduzione:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \tag{3.53}$$

Nella (3.53) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x) = \frac{d}{dx}q(x)$, mentre $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati di grado $r-1$, essendo r il grado di $q_1(x)$. Il polinomio $q_2(x)$ è:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Esempio 18. $p(x) = 1$, $q(x) = (x^3 - 1)^2$. Abbiamo $q'(x) = 6x^2(x^3 - 1)$, per cui $q_1(x) = q_2(x) = x^3 - 1$. Per la (3.53)

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 - 1} + \int \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 - 1}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x^3-1)^2} &= \frac{(2Ax + B)(x^3 - 1) - 3x^2(Ax^2 + Bx + C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2 + Ex + F}{x^3 - 1} \\ &= \frac{Dx^5 + (E - A)x^4 + (F - 2B)x^3 + (-D - 3C)x^2 + (-E - 2A)x - F - B}{(x^3-1)^2}\end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 + D + 0 + 0 &= 0 \\ -A + 0 + 0 + 0 + E + 0 &= 0 \\ 0 - 2B + 0 + 0 + 0 + F &= 0 \\ 0 + 0 - 3C - D + 0 + 0 &= 0 \\ -2A + 0 + 0 + 0 - E + 0 &= 0 \\ 0 - B + 0 + 0 + 0 - F &= 1 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Dalla prima e dalla quarta equazione del sistema (3.54):

$$D = C = 0,$$

donde otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} -A + 0 + E + 0 &= 0 \\ 0 - 2B + 0 + F &= 0 \\ -2A + 0 - E + 0 &= 0 \\ 0 - B + 0 - F &= 1 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Dalla prima e dalla terza:

$$A = E = 0$$

Quindi:

$$B = -\frac{1}{3},\ F = -\frac{2}{3}$$

Riassumendo:

$$A = 0,\ B = -\frac{1}{3},\ C = 0,\ D = 0,\ E = 0,\ F = -\frac{2}{3}$$

donde:

$$I(x) = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3 - 1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3 - 1}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} J(x) &\overset{def}{=} \int \frac{dx}{x^3 - 1} \\ &\overset{def}{=} \int \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)} dx \end{aligned}$$

Dove:

$$\tilde{p}(x) = 1,\ \tilde{q}(x) = x^3 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

cioè $\tilde{q}(x)$ ha radici complesse. In tal caso la riduzione è:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

Da cui:

$$(L, M, N) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),$$

cioè:

$$J(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

L'integrale a secondo membro si calcola con la (3.38):

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2$$

Quindi l'integrale $J(x)$:

$$J(x) = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$

L'integrale $I(x)$:

$$I(x) = \frac{x}{3(1-x^3)} + \frac{1}{9}\ln\left[\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\right] + \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

3.12.2 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

Dai calcoli precedenti segue un integrale che compare spesso:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right] + C \tag{3.56}$$

***

3.12.3 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, $(a \neq b)$
2) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$
3) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$
4) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$
5) $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$
6) $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$
7) $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$
8) $\int \frac{x^5-7x+1}{(x^2-3x+2)^3}dx$
9) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$
10) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
11) $\int \frac{dx}{x^4+1}$
12) $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

3.12.4 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+a)(x+b)} &= \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} \\ &= \frac{(A+B)x + (Ab+Ba)}{(x+a)(x+b)}\end{aligned}$$

da cui:

$$(A, B) = \left(\frac{1}{b-a}, -\frac{1}{b-a}\right)$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{b-a} \ln \left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$$

2. $I(x) = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. Abbiamo:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Quindi il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ 5A + 2B - C &= 0 \\ 6A - 3B - 2C &= 1, \end{aligned}$$

che è compatibile e determinato:

$$(A, B, C) = \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{12} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x+3| + C$$

3. $I\ (x) = \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$. Abbiamo:

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Quindi il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ -A - 5B + 2C &= 41 \\ -12A + 4B - 3C &= -91, \end{aligned}$$

che è compatibile e determinato:

$$(A, B, C) = (4, -7, 5)$$

Quindi:

$$I(x) = 4 \ln|x-1| - 7 \ln|x+3| + 5 \ln|x-4| + C$$

4. $I(x) = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$. Qui è:

$$p(x) \equiv 1, \quad q(x) \equiv x(x+1)$$

La (3.47) porge:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} &= \frac{A_{1,1}}{x} + \frac{A_{2,1}}{x+1} + \frac{A_{2,2}}{(x+1)^2} \\ &\overset{def}{=} \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} A + B_1 + 0 &= 0 \\ 2A + B_1 + B_2 &= 0 \\ A + 0 + 0 &= 1, \end{aligned}$$

la cui soluzione è:

$$(A, B_1, B_2) = (1, -1, -1)$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

5. $I(x) = \int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$. Qui è:

$$p(x) \equiv 5x^2 + 6x + 9, \quad q(x) \equiv (x-3)^2 (x+1)^2$$

La (3.47) porge:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-3} + \frac{A_{1,2}}{(x-3)^2} + \frac{A_{2,1}}{x+1} + \frac{A_{2,2}}{(x+1)^2} \\ &\overset{def}{=} \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{aligned} A + 0 + C + 0 &= 0 \\ -A + B - 5C + D &= 5 \\ -5A + 2B + 3C - 6D &= 6 \\ -3A + B + 9C + 9D &= 9, \end{aligned}$$

Tale sistema è compatibile e determinato, con soluzione

$$(A, B, C, D) = \left(0, \frac{9}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi:

$$I(x) = -\frac{5x+3}{(x-3)(x+1)} + K$$

6. $I(x) = \int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2} dx$. Qui è:

$$p(x) \equiv x^2 - 8x + 7, \quad q(x) \equiv \left(x^2 - 3x - 10\right)^2$$

Le radici di $q(x) = 0$ e le relative moltepicità sono:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 5, \quad (\nu_1 = 2) \\ \xi_2 &= -2, \quad (\nu_2 = 2) \end{aligned}$$

donde:

$$q(x) = (x-5)^2 (x+2)^2$$

La (3.47) porge:

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{\nu_i}\frac{A_{i,j}}{(x-\xi_i)^j}\\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{A_{i,1}}{x-\xi_i}+\frac{A_{i,2}}{(x-\xi_i)^2}+...+\frac{A_{i,\nu_i}}{(x-\xi_i)^{\nu_i}}\right)\\ &= \frac{A_{1,1}}{x-\xi_1}+\frac{A_{1,2}}{(x-\xi_1)^2}+\frac{A_{2,1}}{x-\xi_2}+\frac{A_{2,2}}{(x-\xi_2)^2}\end{aligned}$$

Per non appesantire la notazione, ridefiniamo:

$$(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}) \stackrel{def}{=} (A, B, C, D)$$

per cui:

$$\begin{aligned}&\frac{p(x)}{q(x)} =\\ &\quad = \frac{A(x-5)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x-5)^2(x+2)+D(x-5)^2}{(x-5)^2(x+2)^2}\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}&(A+C)x^3+(-A+B-8C+D)x^2+(-16A+4B+5C-10D)x\\ &+(-20A+4B+50C+25D)\\ &=x^2-8x+7\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi deve essere:

$$\begin{aligned}A+0+C+0&=0\\ -A+B-8C+D&=1\\ -16A+4B+5C-10D&=-8\\ -20A+4B+50C+25D&=7\end{aligned}$$

Tale sistema è compatibile e determinato. La soluzione è:

$$(A, B, C, D) = \left(\frac{30}{343}, -\frac{8}{49}, -\frac{30}{343}, -\frac{27}{49}\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{30}{343}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+2}\right)-\frac{1}{49}\left[\frac{8}{(x-5)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}\right]$$

L'integrale:

$$I(x) = \frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right| - \frac{19x-151}{49(x^2-3x-10)}+K$$

7. $I(x) = \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}dx$. L'integrazione è immediata:

$$\begin{aligned}I(x) &= \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)^3}dx\\ &= -\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}+K\end{aligned}$$

8. $I(x) = \int \frac{x^5-7x+1}{(x^2-3x+2)^3} dx$. Qui è:

$$p(x) \equiv x^5 - 7x + 1, \;\; q(x) \equiv \left(x^2 - 3x + 2\right)^3$$

Le radici di $q(x) = 0$ e le relative moltepicità sono:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2, \quad (\nu_1 = 3) \\ \xi_2 &= 1, \quad (\nu_2 = 3) \end{aligned}$$

donde:

$$q(x) = (x-2)^3 (x-1)^3$$

La (3.47) porge:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{A_{i,j}}{(x-\xi_i)^j} \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{A_{i,1}}{x-\xi_i} + \frac{A_{i,2}}{(x-\xi_i)^2} + ... + \frac{A_{i,\nu_i}}{(x-\xi_i)^{\nu_i}} \right) \\ &= \frac{A_{1,1}}{x-\xi_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-\xi_1)^2} + \frac{A_{1,3}}{(x-\xi_1)^3} + \frac{A_{2,1}}{x-\xi_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-\xi_2)^2} + \frac{A_{2,3}}{(x-\xi_2)^3} \end{aligned}$$

Per non appesantire la notazione, ridefiniamo:

$$(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}) \stackrel{def}{=} (A, B, C, D, E, F)$$

per cui:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \\ &= \frac{1}{q(x)} \cdot \{A(x-2)^2 (x-2)^3 + B(x-2)(x-1)^3 + C(x-1)^3 \\ &+ D(x-1)^2 (x-2)^3 + E(x-1)(x-2)^3 + F(x-2)^3\} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{19}{(x-2)^3} + \frac{16}{(x-2)^2} - \frac{25}{x-2} + \frac{5}{(x-1)^3} + \frac{17}{(x-1)^2} + \frac{26}{x-1}$$

L'integrale:

$$I(x) = \frac{9-14x}{2(x^2-3x+2)^2} + \frac{38-33x}{x^2-3x+2} - 25 \ln|-2+x| + 26 \ln|x-1| + K$$

9. $I(x) = \int \frac{1}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$. Qui è:

$$p(x) \equiv 1, \;\; q(x) \equiv \left(x^2 - 4x + 3\right)\left(x^2 + 4x + 5\right)$$

Le radici reali di $q(x)$ sono:

$$\xi_1 = 3, \;\; \xi_2 = 1$$

con molteplicità:

$$\nu_1 = \nu_2 = 1$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}, \tag{3.57}$$

giacché x^2+4x+5 ha radici complesse coniugate. La (3.57) implica

$$\begin{aligned} A+B+C+0 &= 0 \\ 3A+B-4C+D &= 0 \\ A-7B+3C-4D &= 0 \\ -5A-15B++0+3d &= 1, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è:

$$(A,B,C,D) = \left(\frac{1}{52}, -\frac{1}{20}, \frac{2}{65}, \frac{3}{26}\right)$$

onde:

$$I(x) = \frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + J(x),$$

essendo:

$$J(x) = \frac{1}{130}\int \frac{4x+15}{x^2+4x+5},$$

che si calcola attraverso la (3.38), ottenendo:

$$J(x) = \frac{1}{65}\ln\left|x^2+4x+5\right| + \frac{7}{130}\arctan(x+2) + K_1$$

Finalmente:

$$I(x) = \frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{1}{65}\ln\left|x^2+4x+5\right| + \frac{7}{130}\arctan(x+2)$$

10. $I(x) = \int \frac{dx}{x^3+1}$. Qui è:

$$p(x) \equiv 1,\ q(x) \equiv x^3+1$$

Risulta:

$$q(x) = (x+1)\left(x^2-x+1\right),$$

donde:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

che conduce al sistema:

$$\begin{aligned} A+B+0 &= 0 \\ -A+B+C &= 0 \\ A+0+C &= 1 \end{aligned}$$

compatibile e determinato:

$$(A,B,C) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

cioè

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Quindi l'integrale:

$$I(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}J(x),$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx,$$

che si calcola attraverso la (3.38), ottenendo:

$$J(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K_1$$

Finalmente:

$$I(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

11. $I(x) = \int \frac{dx}{x^4+1}$. Qui è:

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(Ax+B)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + (Cx+D)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{q(x)}$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned} A+0+C+0 &= 0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D &= 0 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D &= 0 \\ 0+B+0+D &= 1 \end{aligned}$$

compatible e determinato

$$(A,B,C,D) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Quindi l'integrale:

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[J_1(x) - J_2(x)\right],$$

essendo:

$$J_1(x) = \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx, \quad J_2(x) = \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

che si calcolano attraverso la (3.38), ottenendo:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) + C_1 \\ J_2(x) &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \arctan\left(\sqrt{2}x-1\right) + C_2 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$I(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right|} + 2\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) - 2\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right] \tag{3.58}$$

12. $I(x) = \int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$. Qui è:

$$p(x) = 1, \quad q(x) = x^4+x^2+1 = \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(Ax+B)\left(x^2-x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+x+1\right)}{q(x)}$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned} A+0+C+0 &= 0 \\ -A+B+C+D &= 0 \\ A-B+C+D &= 0 \\ 0+B+0+D &= 1 \end{aligned}$$

compatible e determinato

$$(A,B,C,D) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Quindi l'integrale:

$$I(x) = \frac{1}{2}\left[J_1(x) - J_2(x)\right],$$

essendo:

$$J_1(x) = \int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx, \quad J_2(x) = \int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

che si calcolano attraverso la (3.38), ottenendo:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K_1 \\ J_2(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K_2 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$I(x) = \frac{1}{2}\left[\ln\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right] + K$$

***

3.12.5 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6}dx$

2) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

3) $\int \frac{(x+2)^2}{x^3-1}dx$

4) $\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}dx$

5) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$

6) $\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}dx$

7) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3}dx$

8) $\int \frac{x^2-1}{(x-2)(x^2+1)}dx$

9) $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2}dx$

10) $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x-2}dx$

11) $\int \frac{x+1}{x^3-1}dx$

12) $\int \frac{x^2-2x}{(2x-1)(x^2+1)}dx$

3.12.6 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$. Qui è:

$$p(x) = 1, \;\; q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

da cui

$$(A, B) = (4, -3)$$

L'integrale:

$$I(x) = 4\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C$$

2. $I(x) = \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2 + 1, \;\; q(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2 (x+1)$$

Le radici di $q(x) = 0$ e le relative moltepicità sono:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1, \quad (\nu_1 = 2) \\ \xi_2 &= -1, \quad (\nu_2 = 1) \end{aligned}$$

La (3.47) porge:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{A_{i,j}}{(x-\xi_i)^j} \\ &= \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{A_{i,1}}{x-\xi_i} + \frac{A_{i,2}}{(x-\xi_i)^2} + ... + \frac{A_{i,\nu_i}}{(x-\xi_i)^{\nu_i}} \right) \\ &= \frac{A_{1,1}}{x-\xi_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-\xi_1)^2} + \frac{A_{2,1}}{x-\xi_2} \end{aligned}$$

Per non appesantire la notazione, ridefiniamo:

$$(A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}) \stackrel{def}{=} (A, B, C)$$

per cui:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

che conduce al sistema

$$\begin{aligned} A + 0 + C &= 1 \\ 0 + B - 2C &= 0 \\ -A + B + C &= 1, \end{aligned}$$

compatibile e determinato:

$$(A, B, C) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)$$

L'integrale:

$$I(x) = \ln\sqrt{|x^2-1|} - \frac{1}{x-1} + K$$

3. $I(x) = \int \frac{(x+2)^2}{x^3-1} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2 + 4x + 4, \;\; q(x) = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A + B + 0 &= 1 \\ A - B + C &= 4 \\ A + 0 - C &= 4 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A, B, C) = (3, -2, -1)$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{3}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{3}{x-1} - \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= 3\ln|x-1| - \ln\left(x^2+x+1\right) + K \\ &= \ln\left(\frac{|x-1|^3}{x^2+x+1}\right) + K \end{aligned}$$

4. $I(x) = \int \frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 1, \;\; q(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned} A + B + 0 + 0 + 0 &= 0 \\ 0 - B + C + 0 + 0 &= 1 \\ 2A + B - C + D + 0 &= 2 \\ 0 - B - C - D + E &= 0 \\ A + 0 - C + 0 - E &= 1 \end{aligned}$$

compatibile e determinato

$$(A, B, C, D+E) = (1, -1, 0, 1, 0)$$

Ciò implica:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Quindi l'integrale:

$$I(x) = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2\left(x^2+1\right)} + K$$

5. $I(x) = \int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$. Qui è:

$$p(x) = x+1, \;\; q(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$$

Affinché ciò sia vero, deve essere:

$$A = 3, \;\; B = -2$$

Ciò implica:

$$I(x) = 3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + K$$

6. $I(x) = \int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2, \;\; q(x) = (x+2)(x-1)^2$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}$$

Affinché ciò sia vero, deve essere:

$$\begin{aligned} A + B_1 + 0 &= 1 \\ -2A + B_1 + B_2 &= 0 \\ A - 2B_1 + 2B_2 &= 0 \end{aligned}$$

L'unica soluzione di tale sistema è

$$A = \frac{4}{9}, \;\; B = \frac{5}{9}, \;\; C = \frac{1}{3}$$

Ciò implica:

$$I(x) = \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C$$

7. $I(x) = \int \frac{x^2+2}{(x-1)^3} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2 + 2, \;\; q(x) = (x-1)^3$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

Affinché ciò sia vero, deve essere:

$$\begin{aligned} A + 0 + 0 &= 1 \\ -2A + B + 0 &= 0 \\ A - B + C &= 2 \end{aligned}$$

L'unica soluzione di tale sistema è

$$A = 1, \;\; B = 2, \;\; C = 3$$

Ciò implica:

$$I(x) = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + K$$

8. $I(x) = \int \frac{x^2-1}{(x-2)(x^2+1)} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2 - 1, \;\; q(x) = (x-2)\left(x^2+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Affinché ciò sia vero, deve essere:

$$\begin{aligned} A + B + 0 &= 1 \\ 0 - 2B + C &= 0 \\ A + 0 - 2C &= -1 \end{aligned}$$

L'unica soluzione di tale sistema è

$$(A, B, C) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Ciò implica:

$$I(x) = -\frac{3}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{5}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{4}{5}\text{arctan}x + C$$

9. $I(x) = \int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2 + 1, \;\; q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Affinché ciò sia vero, deve essere:

$$\begin{aligned} A + B + 0 &= 1 \\ -2A - 3B + C &= 0 \\ A + 2B - 2C &= 1 \end{aligned}$$

L'unica soluzione di tale sistema è

$$(A, B, C) = (5, -4, -2)$$

Ciò implica:

$$I(x) = 5\ln|x-2| + \frac{2}{x-1} - 4\ln|x-1| + K$$

10. $I(x) = \int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x-2} dx$. Qui è:

$$p(x) = 2x^2 - 1, \;\; q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x-2)\left(x^2+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+B+0&=2\\ 0-2B+C&=0\\ A+0-2C&=1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C)=\left(\frac{9}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{9}{5(x-2)}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x+2}{x^2+1}$$

L'integrale:

$$I(x)=\frac{9}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{5}J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x)&=\int\frac{x+2}{x^2+1}dx\\ &=\int\frac{x}{x^2+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2+1}\\ &=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+2\arctan x+C_1, \end{aligned}$$

donde:

$$I(x)=\frac{9}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{2}{5}\arctan x+C$$

11. $I(x)=\int\frac{x+1}{x^3-1}dx$. Qui è:

$$p(x)=x+1,\ \ q(x)=x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+B+0&=0\\ A-B+C&=0\\ A+0-C&=1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C)=(1,-1,0)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+x+1}$$

L'integrale:

$$I(x)=\ln|x-1|-J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K_1, \end{aligned}$$

Si conclude che:

$$I(x) = \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K$$

12. $I(x) = \int \frac{x^2-2x}{(2x-1)(x^2+1)}dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2-2x, \;\; q(x) = (2x-1)\left(x^2+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+2B+0 &= 1 \\ 0-B+2C &= -2 \\ A+0-C &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{3}{5(2x-1)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{4x-3}{x^2+1}$$

L'integrale:

$$I(x) = -\frac{3}{10}\ln|2x-1| + \frac{1}{5}J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{4x-3}{x^2+1}dx \\ &= 2\ln\left(x^2+1\right) - 3\arctan x + C_1, \end{aligned}$$

Si conclude che:

$$I(x) = -\frac{3}{10}\ln|2x-1| + \frac{2}{5}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{3}{5}\arctan x + C$$

***

3.12.7 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)}dx$

2) $\int \frac{x-1}{9x^2-18x+7}dx$

3) $\int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2}dx$

4) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

5) $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$

6) $\int \frac{x-3}{(x-2)(x^2+x+1)^2}dx$

7) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

8) $\int \frac{x^3+2x^2-2x}{x^4+4}dx$

9) $\int \frac{2x^2+12}{x^4+12x^2+16}dx$

10) $\int \frac{dx}{x^3+x}$

11) $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$

12) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}dx$

3.12.8 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} dx$. Qui è:

$$p(x) = 5x^2 + 11x - 2, \;\; q(x) = (x+5)\left(x^2+9\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+9}$$

da cui

$$\begin{aligned} A + B + 0 &= 5 \\ 0 + 5B + C &= 11 \\ 9A + 0 + 5C &= -2 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A, B, C) = (2, 3, -4)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2}{x+5} + \frac{3x-4}{x^2+9}$$

L'integrale:

$$I(x) = 2\ln|x+5| + J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{3x-4}{x^2+9} dx \\ &= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + K_1, \end{aligned}$$

Si conclude che:

$$I(x) = 2\ln|x+5| + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + K$$

2. $I(x) = \int \frac{x-1}{9x^2-18x+7} dx$. Anziché procedere per decomposizione in frazioni semplici, è preferibile procedere nel modo seguente

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{18}\int \frac{d\left(9x^2-18x+7\right)}{9x^2-18x+7} \\ &= \frac{1}{18}\ln\left|9x^2-18x+7\right| + K \end{aligned}$$

3. $I(x) = \int \frac{x^3+x+1}{x^4+x^2} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^3 + x + 1, \;\; q(x) = x^4 + x^2 = x^2\left(x^2+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+0+C+0&=1\\ 0+B+0+D&=0\\ A+0+0+0&=1\\ 0+B+0+0&=1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D)=(1,1,0,-1)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$$

L'integrale:

$$I(x)=\ln|x|-\frac{1}{x}-\arctan x+K,$$

4. $I(x)=\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}$. Qui è:

$$p(x)=1,\ \ q(x)=\left(x^2-1\right)^2=(x-1)^2(x+1)^2$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+0+C+0&=0\\ A+B-C+D&=0\\ -A+2B-C-2D&=0\\ -A+B+C+D&=1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D)=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}$$

L'integrale:

$$I(x)=\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}\right]+K$$

5. $I(x)=\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$. Qui è:

$$p(x)=x^2-2x+3,\ \ q(x)=(x-1)^2\left(x^2+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+0+C+0&=0\\ -A+B-2C+D&=1\\ A+0+C-2D&=-2\\ -A+B+0+D&=3 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D)=(-1,1,1,1)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x+1}{(x^2+1)}$$

L'integrale:

$$I(x)=-\ln|x-1|+\frac{1}{1-x}+J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x)&=\int\frac{x+1}{x^2+1}dx\\ &=\int\frac{x}{x^2+1}dx+\int\frac{dx}{x^2+1}\\ &=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan x \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x)=\frac{1}{1-x}+\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\arctan x+K$$

6. $I(x)=\int\frac{x-3}{(x-2)(x^2+x+1)^2}dx$. Qui è:

$$p(x)=x-3,\ \ q(x)=(x-2)\left(x^2+x+1\right)^2$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+B+0+0+0&=0\\ 2A-B+C+0+0&=0\\ 3A-B-C+D+0&=0\\ 2A-2B-C-2D+E&=1\\ A+0-2C+0-2E&=-2 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D,E)=\left(-\frac{1}{49},\frac{1}{49},\frac{3}{49},\frac{1}{7},\frac{10}{7}\right)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=-\frac{1}{49}\frac{1}{x-2}+\frac{1}{49}\frac{x+3}{x^2+x+1}+\frac{1}{7}\frac{x+10}{(x^2+x+1)^2}$$

L'integrale:

$$I(x) = -\frac{1}{49}\ln|x-2| + \frac{1}{49}J_1(x) + \frac{1}{7}J_2(x),$$

essendo:

$$J_1(x) = \int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K_1$$
$$J_2(x) = \int \frac{x+10}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \frac{19x+8}{3\left(x^2+x+1\right)} + \frac{38}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K_2$$

Quindi:

$I(x) = \frac{1}{882}\left[\frac{42(19x+8)}{x^2+x+1} + 562\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - 18\ln|x-2| + 9\ln\left(x^2+x+1\right)\right] +$
$+K$

7. $I(x) = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. Qui è:

$$p(x) = 1, \;\; q(x) = x\left(x^2+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+B+0 &= 0 \\ 0+0+C &= 0 \\ A+0+0 &= 1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C) = (1,-1,0)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

L'integrale:

$$I(x) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + K$$

8. $I(x) = \int \frac{x^3+2x^2-2x}{x^4+4}dx$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^3}{x^4+4}dx + \int \frac{2x^2-2x}{x^4+4}dx \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(x^4+4\right) + J(x), \end{aligned} \tag{3.59}$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{2x^2-2x}{x^4+4}dx$$

Abbiamo:

$$\frac{2x^2-2x}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

da cui:

$$\begin{aligned} A+0+C+0&=0\\ 2A+B-2C+D&=1\\ 2A+2B+2C-2D&=-1\\ 0+2B+0+2D&=0 \end{aligned}$$

La soluzione di tale sistema è:

$$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=-\frac{1}{4}, D=\frac{1}{4}$$

Quindi:

$$J(x)=\frac{1}{4}\left[G_1(x)-G_2(x)\right],$$

essendo:

$$G_{1,2}=\int\frac{x-1}{x^2\pm 2x+2}dx$$

Calcolando i due integrali:

$$\begin{aligned} G_1(x)&=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right|+C_1\\ G_2(x)&=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)-2\arctan(x+1)+C_2 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$I(x)=\frac{1}{4}\ln\left(x^4+4\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{|x^2-2x+2|}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)+C$$

9. $I(x)=\int\frac{2x^2+12}{x^4+12x^2+16}dx=2\int\frac{x^2+6}{x^4+12x^2+16}dx$. Qui è:

$$p(x)=x^2+6,\ q(x)=x^4+12x^2+16=\left(x^2+6+2\sqrt{5}\right)\left(x^2+6-2\sqrt{5}\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+6+2\sqrt{5}}+\frac{Cx+D}{x^2+6-2\sqrt{5}}$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned} A+0+C+0&=0\\ 0+B+0+D&=1\\ \left(6-2\sqrt{5}\right)A+0+\left(6+2\sqrt{5}\right)C+0&=0\\ A+\left(6-2\sqrt{5}\right)B+0+\left(6+2\sqrt{5}\right)D&=6 \end{aligned}$$

La soluzione è:

$$(A,B,C,D)=\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),$$

donde:

$$I(x)=\int\frac{dx}{6+2\sqrt{5}+x^2}+\int\frac{dx}{6-2\sqrt{5}+x^2}$$

Calcoliamo ($\alpha > 0$)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\alpha + x^2} &= \frac{1}{\alpha}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) + \text{const}\end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)}}\arctan\left[\frac{x}{\sqrt{2\left(3+\sqrt{5}\right)}}\right] + \frac{1}{\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}}\arctan\left[\frac{x}{\sqrt{2\left(3-\sqrt{5}\right)}}\right]$$

10. $I(x) = \int \frac{dx}{x^3+x}$. Qui è:

$$p(x) = 1,\ q(x) = x^3 + x$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned}A + B + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + C &= 0 \\ A + 0 + 0 &= 1\end{aligned}$$

La soluzione è:

$$(A, B, C) = (1, -1, 0),$$

donde:

$$\begin{aligned}I(x) &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + C\end{aligned}$$

11. $I(x) = \int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$. Qui è:

$$p(x) = 2x^3,\ q(x) = \left(x^2+1\right)^2$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned}A + 0 + 0 + 0 &= 2 \\ 0 + B + 0 + 0 &= 0 \\ A + 0 + C + 0 &= 0 \\ 0 + B + 0 + D &= 0\end{aligned}$$

La soluzione è:

$$(A, B, C, D) = (2, 0, -2, 0),$$

donde:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \\ &= \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln\left(x^2+1\right) + \frac{1}{x^2+1} + C \end{aligned}$$

12. $I(x) = \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} dx$. Procedendo come nel n. 11:

$$\begin{aligned} A + 0 + 0 + 0 &= 1 \\ 0 + B + 0 + 0 &= 0 \\ A + 0 + C + 0 &= 1 \\ 0 + B + 0 + D &= -1, \end{aligned}$$

la cui soluzione è:

$$(A, B, C, D) = (1, 0, 0, -1),$$

donde:

$$I(x) = \ln\sqrt{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

L'integrale a secondo membro è dato dalla (3.56), che riscriviamo:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C_1 \tag{3.60}$$

per cui:

$$I(x) = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right) + C$$

3.12.9 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)} dx$
2) $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)} dx$
3) $\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$
4) $\int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)} dx$
5) $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$
6) $\int \frac{x dx}{(x-2)^2}$
7) $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x} dx$
8) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2-1)^2}$
9) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$
10) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

3.12.10 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 1, \quad q(x) = \left(x^2+x\right)\left(x^3+1\right) = x(x+1)^2\left(x^2-x+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2-x+1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+B+0+D+0&=1\\ A+0+C+2D+E&=8\\ 0+0-C+D+2E&=-1\\ A+B+C+0+E&=2\\ A+0+0+0+0&=1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D,E)=(1,-2,3,2,0)$$

Perciò:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{2x}{x^2-x+1}$$

L'integrale:

$$I(x)=\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\int\frac{2x}{x^2-x+1}dx$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\begin{aligned} \int\frac{2x}{x^2-x+1}dx&=\int\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx\\ &=\ln\left|x^2-x+1\right|+\int\frac{1}{x^2-x+1}dx\\ &=\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]}dx\\ &=\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C_1, \end{aligned}$$

donde:

$$I(x)=\ln\frac{|x^3-x^2+x|}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

2. $I(x)=\int\frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}dx$. Qui è:

$$p(x)=x^3+x^2-5x+15,\ \ q(x)=\left(x^2+5\right)\left(x^2+2x+3\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}$$

da cui

$$\begin{aligned} A+0+C+0&=1\\ 2A+B+0+D&=1\\ 3A+2B+5C+0&=-5\\ 0+3B+0+5D&=15 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D)=(0,-5,1,6)$$

Da ciò segue:

$$I(x)=-5\int\frac{dx}{x^2+5}+\int\frac{x+6}{x^2+2x+3}dx$$

Calcoliamo a parte i due integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Il secondo integrale si calcola con la (3.38):

$$\int \frac{x+6}{x^2+2x+3} dx = \ln\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Finalmente:

$$I(x) = \ln\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

3. $I(x) = \int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = e^x \Longrightarrow dx = \frac{dy}{y},$$

per cui:

$$I(y) = \int \frac{dy}{y^2(y-1)}$$

Procediamo per decomposizione in frazioni semplici:

$$\frac{1}{y^2(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y-1}$$

Il principio di identità dei polinomi conduce al sistema di Cramer:

$$\begin{aligned} A+0+C &= 0 \\ -A+B+0 &= 0 \\ 0-B+0 &= 1, \end{aligned}$$

con soluzione:

$$(A,B,C) = (-1,-1,1)$$

Quindi:

$$I(y) = \frac{1}{y} + \ln\left|\frac{y-1}{y}\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = e^{-x} + \ln\left|1-e^{-x}\right| + C$$

4. $I(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \cos x \Longrightarrow dy = -\sin x dx,$$

donde:

$$I(y) = -\int \frac{dy}{y(1+y^2)}$$

Procediamo per decomposizione in frazioni semplici:

$$\frac{1}{y^2\left(1+y^2\right)}=\frac{A}{y}+\frac{By+C}{y^2+1}$$

Il principio di identità dei polinomi conduce al sistema di Cramer:

$$\begin{aligned}A+B+0&=0\\0+0+C&=0\\A+0+0&=1,\end{aligned}$$

con soluzione:

$$(A,B,C)=(1,-1,0)$$

Quindi:

$$-I\left(y\right)=\ln\frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}}+C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I\left(x\right)=\ln\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{|\cos x|}+C$$

5. $I\left(x\right)=\int\frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$. Qui è:

$$p\left(x\right)=x^3+x^2+x+3,\ \ q\left(x\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)$$

Quindi:

$$\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

da cui

$$\begin{aligned}A+0+C+0&=1\\0+B+0+D&=1\\3A+0+C+0&=1\\0+3B+0+D&=3\end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D)=(0,1,1,0)$$

Da ciò segue:

$$I\left(x\right)=\arctan x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$$

6. $I\left(x\right)=\int\frac{xdx}{(x-2)^2}$. Qui è:

$$p\left(x\right)=x,\ \ q\left(x\right)=\left(x-2\right)^2$$

Quindi:

$$\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{\left(x-2\right)^2}$$

da cui

$$\begin{aligned}A&=1\\B-2A&=0\end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A, B) = (1, 2)$$

Da ciò segue:

$$I(x) = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

7. $I(x) = \int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x} dx$. Qui è:

$$p(x) = x^2 - 3x - 1, \;\; q(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

da cui

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1 \\ A - B + 2C &= -3 \\ 2A + 0 + 0 &= 1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A, B, C) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$$

Da ciò segue:

$$I(x) = \ln \frac{\sqrt{x(x+2)^3}}{|x-1|} + C$$

8. $I(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2-1)^2}$. Qui è:

$$p(x) = 1, \;\; q(x) = (x+1)^2\left(x^2-1\right)^2 = (x+1)^4(x-1)^2$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{(x+1)^4} + \frac{E}{(x+1)^4} + \frac{F}{(x-1)^2}$$

da cui

$$\begin{aligned} &(A+E)x^5 + (A+B+3E+F)x^4 \\ &+ (-2A+C+2E+4F)x^3 + \\ &+ (-2A-2B-C+D-2E+6F)x^2 + \\ &+ (A-C-2D-3E+4F)x + \\ &+ (A+B+C+D-E+F) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{aligned} A + 0 + 0 + 0 + E + 0 &= 0 \\ A + B + 0 + 0 + 3E + F &= 0 \\ -2A + 0 + C + 0 + 2E + 4F &= 0 \\ -2A - 2B - C + D - 2E + 6F &= 0 \\ A + 0 - C - 2D - 3E + 4F &= 0 \\ A + B + C + D - E + F &= 1 \end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D,E,F)=\left(\frac{1}{8},\frac{3}{16},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16}\right)$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}I(x)&=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{3}{16}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^3}\\&+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^4}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{(x-1)^2}\\&=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{3x^3+6x^2+x-4}{12(x+1)^3(x-1)}+C\end{aligned}$$

9. $I(x)=\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}$. Qui è:

$$p(x)=1,\ \ q(x)=(x-1)^2(x+1)^2\left(x^2+1\right)^2$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$$

da cui

$$\begin{aligned}A+0+C+0+E+0+0+0&=0\\A+B-C+D+0+F+0+0&=0\\A+2B+C-2D-E+0+G+0&=0\\A+3B-C+3D+0-F+0+H&=0\\-A+4B-C-4D-E+0-2G+0&=0\\-A+3B+C+3D+0-F+0-2H&=0\\-A+2B-C-2D+E+0+G+0&=0\\-A+2B+C+D+0+F+0+H&=1\end{aligned}$$

La soluzione è

$$(A,B,C,D,E,F,G,H)=\left(\frac{-3}{16},\frac{1}{16},\frac{3}{16},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{4}\right)$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}I(x)&=-\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{3}{16}\int\frac{dx}{x+1}\\&+\frac{1}{16}\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{1}{4}\arctan x-\frac{1}{16}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{16}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\text{const}\end{aligned}$$

L'integrale $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ è dato dalla (3.56) donde:

$$I(x)=\frac{1}{16}\left[3\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+6\arctan x-\frac{4x}{x^4-1}\right]+\text{const}$$

10. $I(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. Qui è:

$$p(x) = 1, \;\; q(x) = (x+1)^2 \left(x^2+1\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{aligned} A+0+C+0 &= 0 \\ A+B+2C+D &= 0 \\ A+0+C+2D &= 0 \\ A+B+0+D &= 1, \end{aligned}$$

la cui soluzione è:

$$(A,B,C,D) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

Quindi:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)},$$

da cui l'integrale:

$$I(x) = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

3.12.11 Funzioni razionali improprie

Qui il grado del numeratore è $\geq$ di quello del denominatore.
Esempio

$$\int \frac{x^3+8}{x-2}dx$$

Eseguendo la divisione dei polinomi, otteniamo:

$$\frac{x^3+8}{x-2} = x^2+2x+4+\frac{16}{x-2},$$

donde:

$$\int \frac{x^3+8}{x-2}dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 16\ln|x-2| + C$$

3.12.12 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{x^6-x^5+x^4-x^2+x}{x^4-1}dx$

2) $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$

3) $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$

4) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

5) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

6) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

7) $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$

8) $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$

9) $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}dx$

3.12.13 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{x^6-x^5+x^4-x^2+x}{x^4-1} dx$. Eseguendo la divisione tra polinomi:

$$\frac{x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + x}{x^4 - 1} = x^2 - x + 1 + \frac{1}{x^4 - 1},$$

donde:

$$I(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + I_1(x),$$

essendo:

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{x^4 - 1}$$

Per calcolare $I_1(x)$ occorre applicare il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1},$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned} A + B + C + 0 &= 0 \\ A - B + 0 + D &= 0 \\ A + B - C + 0 &= 0 \\ A - B + 0 - D &= 1 \end{aligned}$$

La cui unica soluzione è:

$$(A, B, C, D) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}\right),$$

per cui:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C \end{aligned}$$

Finalmente:

$$I(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

2. $I(x) = \int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x} dx$. Risulta:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} = x + \frac{3 - x}{x^3 - 2x^2 + 3x},$$

per cui:

$$I(x) = \frac{1}{2}x^2 + I_1(x),$$

essendo:

$$I_1(x) = \int \frac{3 - x}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx$$

Applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\frac{3-x}{x^3-2x^2+3x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+3},$$

ottenendo il sistema:

$$\begin{aligned} A+B+0&=0\\ -2A+0+C&=-1\\ 3A+0+0&=3, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione:

$$(A,B,C)=(1,-1,1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_1(x)&=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x-1}{x^2-2x+3}dx\\ &=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-2x+3\right)}{x^2-2x+3}\\ &=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+3\right)+C \end{aligned}$$

Si conclude che:

$$I(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+3\right)+C$$

3. $I(x)=\int\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$. Risulta:

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}=1+\frac{5x+4}{x^2-2x-8}$$

Perciè:

$$I(x)=x+I_1(x),$$

essendo:

$$I_1(x)=\int\frac{5x+4}{x^2-2x-8}dx$$

Tale integrale si calcola con la (3.38):

$$\begin{aligned} I_1(x)&=\frac{5}{2}\ln\left|x^2-2x-8\right|+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C\\ &=\ln\left|(x+2)(x-4)^4\right|+C, \end{aligned}$$

donde:

$$I(x)=x+\ln\left|(x+2)(x-4)^4\right|+C$$

4. $I(x) = \int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{x^2-5x+6+3}{x^2-5x+6}dx \\ &= \int dx + 3\int \frac{dx}{x^2-5x+6} \end{aligned}$$

L'integrale a secondo membro si calcola con la (3.38):

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$$

per cui:

$$I(x) = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

5. $I(x) = \int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx = 5\int dx + \int \frac{2+25x^2-20x}{x^3-5x^2+4x}dx$. Calcoliamo a parte il secondo integrale:

$$J(x) \stackrel{def}{=} \int \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}dx$$

Metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-1},$$

da cui il sistema lineare:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 25 \\ 5A+B+4C &= 20 \\ 4A+0+0 &= 2, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione:

$$(A,B,C) = \left(\frac{1}{2}, \frac{161}{6}, -\frac{7}{3}\right),$$

perciò:

$$I(x) = 5x + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{161}{6}\ln|x-4| - \frac{7}{3}\ln|x-1| + C$$

6. $I(x) = \int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}\int dx + \int \frac{\frac{1}{4}x-1}{4x^3-x}dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int \frac{x-4}{4x^3-x}dx$. Calcoliamo a parte il secondo integrale:

$$J(x) \stackrel{def}{=} \int \frac{x-4}{4x^3-x}dx$$

Metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{4}{x}dx - \int \frac{7}{2(2x-1)}dx - \int \frac{9}{2(2x+1)}dx \\ &= 4\ln x - \frac{7}{4}\ln(2x-1) - \frac{9}{4}\ln(2x+1) + C \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{4}x + \ln x - \frac{7}{16}\ln(2x-1) - \frac{9}{16}\ln(2x+1) + C$$

7. $I(x) = \int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}dx$. Abbiamo:

$$\frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8} = x + \frac{6+8x}{x^3-6x^2+12x-8},$$

per cui:

$$I(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\int \frac{4x+3}{x^3-6x^2+12x-8}dx \tag{3.61}$$

Applicando il metodo dei coefficienti indeterminati

$$\frac{4x+3}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{11}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

Quindi

$$\int \frac{4x+3}{x^3-6x^2+12x-8}dx = \frac{5-8x}{2(x-2)^2} + C$$

Sostituendo nella (3.61):

$$I(x) = \frac{x^4-4x^3+4x^2-16x+10}{2(x-2)^2} + C$$

8. $I(x) = \int \frac{x^4}{x^4-1}dx$. Abbiamo:

$$\frac{x^4}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{x^4-1},$$

donde:

$$I(x) = x + \int \frac{dx}{x^4-1} \tag{3.62}$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro della (3.62) con il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

da cui il sistema lineare:

$$\begin{aligned} A+B+C+0 &= 0 \\ A-B+0+D &= 0 \\ A+B-C+0 &= 0 \\ A-B+0-D &= 1, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è:

$$(A,B,C,D) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

Quindi:

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

Sostituendo nella (3.62):

$$I(x) = x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

9. $I(x) = \int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx$. Abbiamo:

$$\frac{x^4}{(1-x)^3} = -x - 3 + \frac{-8x + 6x^2 + 3}{(1-x)^3},$$

da cui l'integrale:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left[-x - 3 - \frac{6x^2 - 8x + 3}{(x-1)^3} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \int \frac{6x^2 - 8x + 3}{(x-1)^3} dx \end{aligned} \tag{3.63}$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro della (3.63) con il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\frac{6x^2 - 8x + 3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

da qui il sistema lineare:

$$\begin{aligned} A + 0 + 0 &= 6 \\ -2A + B + 0 &= -8 \\ A - B + C &= 3, \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione:

$$(A, B, C) = (6, 4, 1)$$

Quindi

$$\int \frac{6x^2 - 8x + 3}{(x-1)^3} dx = 6 \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + C$$

Sostituendo nella (3.63)

$$I(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 6 \ln|x-1| + \frac{8x-7}{2(x-1)^2} + C$$

3.13 $I_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2-1)^n}$, $J_n(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

Iniziamo con il primo eseguendo il cambio di variabile (anziché applicare il metodo dei coefficienti indeterminati):

$$t = \frac{x-1}{x+1} \tag{3.64}$$

Dalla (3.64) otteniamo:

$$x = \frac{1+t}{1-t}, \quad dx = \frac{2}{(1-t)^2} dt,$$

donde:

$$I_n(t) = \frac{1}{2^{2n-1}} \int \frac{(1-t)^{2(n-1)}}{t^n} dt \tag{3.65}$$

La (3.65) può essere utilizzata solo per piccoli valori di n. Ad esempio, per $n = 1$:

$$I_1(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_1(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Osservazione. Il risultato precedente è equivalente a:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arctanh} x + C$$

Per $n = 2$:

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \frac{1}{8}\int \frac{(1-t)^2}{t^2}dt \\ &= \frac{1}{8}\left(\int \frac{dt}{t^2} - 2\int \frac{dt}{t} + \int dt\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{t} - 2\ln|t| + t + C_1\right) \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I_2(x) &= \frac{1}{8}\left(-\frac{x+1}{x-1} - 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{x-1}{x+1}\right) + C \\ &= \frac{x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \end{aligned}$$

Per $n = 3$:

$$\begin{aligned} I_3(x) &= \frac{1}{32}\int \frac{(1-t)^4}{t^3}dt \\ &= \frac{1}{32}\left(\int \frac{dt}{t^3} - 4\int \frac{dt}{t^2} + 6\int \frac{dt}{t} - 4\int dt + \int t dt\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{4}{t} + 6\ln|t| - 4t + \frac{1}{2}t^2\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I_3(x) &= \frac{1}{32}\left[-\frac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} + 4\frac{x+1}{x-1} + 6\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - 4\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\right] + C \\ &= \frac{x(3x^2-5)}{8(x^2-1)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \end{aligned}$$

I rimanenti integrali ($n > 3$) sono riportati in Appendice A.
Passiamo a $J_n(x)$; per $n = 1$ è un integrale fondamentale:

$$J_1(x) = \arctan x + C$$

Per $n = 2$, abbiamo già calcolato (vedi eq.3.52):

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

È possibile giungere al medesimo risultato attraverso un'integrazione per parti. Per ogni n:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n} dx \\ &= \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^n} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx, \end{aligned}$$

cioè:

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) - \mathcal{J}_n(x), \tag{3.66}$$

essendo:

$$\mathcal{J}_n(x) \stackrel{def}{=} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^n} dx \tag{3.67}$$

Per $n = 2$:

$$J_2(x) = J_1(x) - \mathcal{J}_2(x)$$

Qui è:

$$\mathcal{J}_2(x) = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

Per calcolare tale integrale, procediamo per parti osservando che:

$$d\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -\frac{2xdx}{(x^2+1)^2},$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2(x) &= -\frac{1}{2}\int x d\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x\frac{1}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{x^2+1} - J_1(x)\right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$J_2(x) = \frac{1}{2}J_1(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

Ma $J_1(x) = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + \text{const}$, per cui:

$$J_2(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C \tag{3.68}$$

Passiamo a $n = 3$; per la (3.66):

$$J_3(x) = J_2(x) - \mathcal{J}_3(x)$$

Qui è:

$$\mathcal{J}_3(x) = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx$$

Anche in questo caso procediamo per parti osservando che:

$$d\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right] = -\frac{4xdx}{(x^2+1)^3},$$

donde:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_3(x) &= -\frac{1}{4}\int xd\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}J_2(x)\end{aligned}$$

Quindi:

$$J_3(x) = \frac{3}{4}J_2(x) + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}$$

L'integrale $J_2(x)$ è dato dalla (3.68), per cui:

$$\begin{aligned}J_3(x) &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + C \\ &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2} + C\end{aligned} \tag{3.69}$$

Iterando il procedimento, si trova:

$$J_n(x) = \frac{2n-3}{2(n-1)}J_{n-1}(x) + \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C \tag{3.70}$$

Ad esempio per $n = 4$:

$$\begin{aligned}J_4(x) &= \frac{5}{6}J_3(x) + \frac{x}{6(x^2+1)^3} \\ &= \frac{5}{16}\arctan x + \frac{5}{16}\frac{x}{x^2+1} + \frac{5}{24}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{6(x^2+1)^3} + C\end{aligned} \tag{3.71}$$

Per $n = 5$:

$$\begin{aligned}J_5(x) &= \frac{7}{8}J_4(x) + \frac{x}{8(x^2+1)^4} \\ &= \frac{35}{128}\arctan x + \frac{35}{128}\frac{x}{x^2+1} + \frac{35}{192}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{7}{48}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{x}{8(x^2+1)^4} + C\end{aligned} \tag{3.72}$$

Una tabella di valori di $J_n(x)$ è riportata in Appendice A.

3.14 Integrali di funzioni irrazionali

3.14.1 Integrali del "tipo 1"

Hanno un espressione generale:

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right] dx,$$

essendo R una funzione razionale, mentre $p_i, q_i \in \mathbb{N} - \{0\}$. Gli integrali di questo tipo si riconducono ad integrali di funzioni razionali attraverso la sostituzione:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k \tag{3.73}$$

Qui k è il m.c.m. di $q_1, q_2, ...q_n$. Ad esempio, calcoliamo l'integrale:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$$

La (3.73) è:

$$2x - 1 = t^4,$$

donde:

$$dx = 2t^3 dt$$

Quindi l'integrale:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2\int \frac{t^2}{t-1} dt \\ &= 2\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt \\ &= (t+1)^2 + 2\ln|t-1| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \left(1 + \sqrt[4]{2x-1}\right)^2 + 2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1} - 1\right| + C$$

3.14.2 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$
2) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$
3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$
5) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$
6) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx$
7) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx$
8) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$
9) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$
10) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx$
11) $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}} dx$
12) $\int \frac{2 - \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-1}}}{x + 4\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}} dx$

3.14.3 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx$. Qui è $q_1 = 2$, $n = 1$, perciò: $k = 2$. La (3.73) porge:

$$x - 1 = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = 2t dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2\int \left(t^2+1\right)^3 dt \\ &= \frac{2}{7}t^7 + \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 + 2t + K \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} + \frac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5} + 2\sqrt{(x-1)^3} + 2\sqrt{x-1} + C_1 \\ &= 2\sqrt{x-1}\left[\frac{1}{7}(x-1)^3 + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x\right] + C \end{aligned}$$

2. $I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$. Qui è $q_1 = 3$, $n = 1$, perciò: $k = 3$. La (3.73) porge:

$$ax + b = t^3$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}\left(t^3 - b\right) \\ dx &= \frac{3t^2}{a}dt \end{aligned}$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{1}{a}\left(t^3 - b\right)\frac{3t}{a}dt \\ &= \frac{3}{a^2}\int t\left(t^3 - b\right)dt \\ &= \frac{3}{a^2}\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{b}{2}t^2\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{3}{a^2}\left[\frac{1}{5}\sqrt[3]{(ax+b)^5} - b\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right] + \text{const}$$

3. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} = \int R\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}, (x+1)^{\frac{3}{2}}\right]$. Qui è $q_1 = q_2 = 2$, perciò: $k = 2$. La (3.73) porge:

$$x + 1 = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = 2tdt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{2tdt}{t+t^3} \\ &= 2\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2\arctan t + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2\arctan\sqrt{x+1} + \text{const}$$

4. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int R\left(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) dx$. Qui è $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, perciò: $k = 6$. La (3.73) porge:

$$x = t^6$$

Ciò implica:

$$dx = 6t^5 dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} \\ &= 6\int \frac{t^3}{1+t} dt \\ &= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - \ln|t+1| + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + \text{const}$$

5. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \int R\left(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}\right) dx$. Qui è $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, perciò: $k = 6$. La (3.73) porge:

$$x = t^6$$

Ciò implica:

$$dx = 6t^5 dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{t^3 - 1}{t^2 + 1} 6t^5 dt \\ &= 6\int \frac{t^5(t^3 - 1)}{t^2 + 1} dt \\ &= 6\int \left(t^6 - t^4 - t^3 + t^2 + t - 1 - \frac{t-1}{t^2+1}\right) \\ &= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \int \frac{t-1}{t^2+1}\right) \\ &= 6\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \arctan t + \text{const}\right) \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I(x) = \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} \\ +3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln\left|\sqrt[3]{x} + 1\right| + 6\arctan\sqrt[6]{x} + \text{const} \end{aligned}$$

6. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx = \int R\left[(x+1)^2, (x+1)^{\frac{1}{2}}, (x+1)^{\frac{1}{2}}\right] dx$. Qui è:

$$\begin{aligned} p_1 = 2, q_1 = 1 \\ p_2 = 1, q_1 = 2 \\ p_3 = 1, q_3 = 2, \end{aligned}$$

donde:

$$k = 2$$

Il cambio di variabile è:

$$x + 1 = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = 2tdt$$

L'integrale:

$$I(t) = 2\int \frac{t^2 + 2t}{t^4 - t} dt$$

L'integrando è una funzione razionale propria:

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{t+1}{t^2+t+1},$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2\left(\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{t+1}{t^2+t+1} dt\right) \\ &= 2\left[\ln|t-1| - \int \frac{t+1}{t^2+t+1} dt\right] \end{aligned} \tag{3.74}$$

L'integrale al secondo termine del secondo membro della (3.74) si calcola attraverso la (3.38) ottenendo:

$$\int \frac{t+1}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Sostituendo nella (3.74):

$$I(t) = 2\ln|t-1| - \ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \ln\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{x+2+\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

7. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{x+2} dx = \int R\left(x, x^{\frac{1}{2}}\right) dx$. Qui è $k = 2$. La (3.73) porge:

$$x = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = 2tdt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{t^2}{t^2+2} dt \\ &= 2\left(\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+2}\right) \\ &= 6\left(t - \sqrt{2}\int \frac{d\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) \\ &= 2\left(t - \sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}}\right) + \text{const}$$

8. $I(x) = \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \int R\left[x, (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] dx$. Qui è $q_1 = 2$, perciò: $k = 2$. La (3.73) porge:

$$1 - x = t^2$$

Ciò implica:

$$dx = -2tdt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} I(t) &= -2\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -2\arctan t + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -2\arctan\left(\sqrt{1-x}\right) + \text{const}$$

9. $I(x) = \int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int R\left[x, \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\right] dx$. Qui è:

$$p_1 = 1,\ q_1 = 2,$$

donde:

$$k = 2$$

La (3.73) porge:

$$\frac{x-1}{x+1} = t^2$$

Risolvendo rispetto a x:

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

da cui il differenziale:

$$dx = \frac{4t}{(1-t^2)}dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$I(t) = 4\int \frac{t^2(t^2+1)}{(1-t^2)^3}dt$$

Applicando il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$I(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{t+3t^2}{(t^2-1)^2} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}\right| + \\ + \frac{(x+1)^2}{4}\frac{3(x-1)\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x+1)^3}} + C \end{aligned}$$

10. $I(x) = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \int R\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\right]$. Qui è:

$$p_1 = 1,\ q_1 = 3,$$

donde:

$$k = 3$$

La (3.73) porge:

$$\frac{x+1}{x-1} = t^3$$

Risolvendo rispetto a x:

$$x = \frac{t^3-1}{t^3-1}$$

da cui il differenziale:

$$dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)}dt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$I(t) = -6\int \frac{t^3}{(t^3-1)^2}dt$$

Sviluppiamo l'integrando in frazioni parziali:

$$\frac{t^3}{(t^3-1)^2} = \frac{1}{9(t-1)^2} + \frac{1}{9(t-1)} - \frac{t+3}{9(t^2+t+1)} + \frac{t+1}{3(t^2+t+1)^2}$$

Quindi:

$$\int \frac{t^3}{(t^3-1)^2}dt = \frac{1}{9}\ln|t-1| - \frac{1}{9}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{9}\int \frac{t+3}{t^2+t+1}dt - \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{(t^2+t+1)^2}dt$$

Risulta:

$$\int \frac{t+3}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) + \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2t}{\sqrt{3}}\right) + C_1$$
$$\int \frac{t+1}{(t^2+t+1)^2}dt = \frac{t-1}{3(t^2+t+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1+2t}{\sqrt{3}}\right) + C_2$$

donde:

$$I(t) = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1+2t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{6t}{t^3-1}\right] + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{3}\Bigg[\ln\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{(x-1)^2}} +$$
$$- 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{3(x-1)}}\right) - 3\sqrt[3]{(x^2-1)(x-1)}\Bigg] + C$$

11. $I(x) = \int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$. Qui è:

$$p_1 = 1,\ q_1 = 2,$$

donde:

$$k = 2$$

La (3.73) porge:

$$2x + 3 = t^2$$

Risolvendo rispetto a x:

$$x = \frac{1}{2}\left(t^2 - 3\right)$$

da cui il differenziale:

$$dx = tdt$$

Quindi l'integrale in funzione di t:

$$I(t) = 2\int \frac{t^2+3}{\left(t^2-3\right)^2}dt$$

Sviluppiamo l'integrando in frazioni parziali:

$$\frac{t^2+3}{\left(t^2-3\right)^2} = \frac{1}{t^2-3} + \frac{6}{\left(t^2-3\right)^2}$$

L'integrale in funzione di t

$$I(t) = -\frac{2t}{t^2-3} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\frac{\sqrt{2x+3}}{x} + C$$

12. $I(x) = \int \frac{2-\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-1}}}{x+4\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}}dx = \int R\left[x, \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/3}, \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{1/4}\right]dx$. Qui è $k = 6$, per cui il cambio di variabile è:

$$\frac{2x+1}{x-1} = t^6$$

Risolvendo rispetto a x:

$$x = \frac{t^6+1}{t^6-2}$$

Differenziando rispetto a t:

$$dx = -18\frac{t^5dt}{\left(t^6-2\right)}$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = 18\int \frac{t^7-2t^5}{\left(t^6-2\right)\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}dt,$$

che è l'integrale di una funzione razionale propria. Riducendo:

$$I(t) = 18\left[\frac{2}{3}\int \frac{t^5-t}{t^6-2}dt + \int \frac{8t^8+2t^5-8t^4+t}{3\left(4t^9+t^6-8t^3+1\right)}dt\right]$$

Il primo integrale a secondo membro è:

$$\int \frac{t^5 - t}{t^6 - 2} dt = \frac{1}{24} \left[2\sqrt[3]{2}\sqrt{3} \arctan\left(\frac{1 + \sqrt[3]{4}t^2}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt[3]{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt[3]{4}t^2 + \sqrt[3]{2}t^4}{\sqrt[3]{4}t^2 - 2} \right| + 4 \ln \left| t^6 - 2 \right| \right] + C_1$$

Il secondo integrale non si esprime in forma chiusa. Utilizzando il software `Mathematica`:

$$\int \frac{8t^8 + 2t^5 - 8t^4 + t}{4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1} dt = \frac{1}{6} \sum_{\rho} \frac{\ln(t - \rho) - 8\rho^3 \ln(t - \rho) + 2\rho^4 \ln(t - \rho) + 8\rho^7 \ln(t - \rho)}{6\rho^7 + \rho^4 - 4\rho},$$

dove la somma è estesa a tutte le radici reali ρ del polinomio $4t^9 + t^6 - 8t^3 + 1$.

3.14.4 Integrali del "tipo 2"

Hanno un espressione generale:

$$I_n(x) = \int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx, \tag{3.75}$$

essendo $p_n(x)$ un assegnato polinomio di grado n:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Qui è $n \geq 2$, poichè per $n = 0, 1$ l'integrale si calcola con i metodi visti nelle sezioni precedenti.

Proposizione. L'integrale (3.75) è:

$$I_n(x) = q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \tag{3.76}$$

essendo $\lambda \in \mathbb{R}$, mentre $q_{n-1}(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$ a coefficienti indeterminati:

$$q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$$

Dimostrazione. Omessa □

I coefficienti indeterminati e il numero reale λ si ottengono derivando primo e secondo membro della (3.76):

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \sqrt{ax^2 + bx + c} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) b_{k+1} x^k + \frac{2ax + b}{2\sqrt{ax^2 + bx + c}} \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + \\ + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

da cui:

$$2 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 2\left(ax^2 + bx + c\right) \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) b_{k+1} x^k + (2ax + b) \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k + 2\lambda \tag{3.77}$$

Per il principio di identità dei polinomi la *n-pla* $(b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0, \lambda)$ è la soluzione di un sistema di Cramer.

Esempio

$$I_4(x) = \int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2+4}}$$

La (3.76) è:

$$I_4(x) = q_3(x)\sqrt{x^2+4} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

Derivando:

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = \left(3b_3x^2 + 2b_2x + b_1\right)\sqrt{x^2+4} + \frac{x\left(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0\right)}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}$$

Segue il sistema:

$$\begin{aligned}
4b_3 + 0 + 0 + 0 + 0 &= 1 \\
0 + 3b_2 + 0 + 0 + 0 &= 0 \\
12b_3 + 0 + 2b_1 + 0 + 0 &= 4 \\
0 + 8b_2 + 0 + b_0 + 0 + 0 &= 0 \\
0 + 0 + 4b_1 + 0 + \lambda &= 0,
\end{aligned}$$

la cui unica soluzione è:

$$(b_3, b_2, b_1, b_0, \lambda) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2}, -2\right),$$

donde:

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \\
&= \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) + C
\end{aligned}$$

3.14.5 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$ 2) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 3) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx$
4) $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2-4x+2}}dx$

1. $I(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$. La (3.76) è:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = (b_1x + b_0)\sqrt{x^2-x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \tag{3.78}$$

Derivando primo e secondo membro e riordinando i termini:

$$2x^2 = 4b_1x^2 + (2b_0 - 3b_1)x + (-b_0 + 2b_1 + 2\lambda)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{aligned}
2b_1 + 0 + 0 &= 1 \\
-3b_1 + 2b_0 + 0 &= 0 \\
2b_1 - b_0 + \lambda &= 0
\end{aligned} \tag{3.79}$$

La soluzione del sistema (3.79) è:

$$(b_1, b_0, \lambda) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

Sostituendo nella (3.78):

$$I(x) = \frac{1}{4}(2x+3) - \frac{1}{8}J(x),$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \tag{3.80}$$

L'integrale (3.80) si calcola attraverso la (3.39), e si ottiene:

$$\begin{aligned} J(x) &= \ln\left|\frac{2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{3}}\right| + C_1 \\ &= \ln\left|2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right| + C_2, \end{aligned}$$

avendo incorporato $\ln\sqrt{3}$ nella costante di integrazione. In definitiva:

$$I(x) = \frac{1}{4}(2x+3) - \frac{1}{8}\ln\left|2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right| + C$$

2. $I(x) = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$. La (3.76) è:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = q_4(x)\sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Applicando direttamente la (3.77):

$$2x^5 = 2\left(1 - x^2\right)\sum_{k=0}^{3}(k+1)\,b_{k+1}x^{k+1} - 2x\sum_{k=0}^{4}b_k x^k + 2\lambda$$

Si ottiene:

$$b_4 = -\frac{1}{5}, b_3 = 0, b_2 = -\frac{4}{15}, b_1 = 0, b_0 = -\frac{8}{15}, \lambda = 0$$

da cui:

$$I(x) = -\frac{1}{15}\left(3x^4 + 4x^2 + 8\right)\sqrt{1-x^2} + C$$

3. $I(x) = \int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx$. La (3.76) è:

$$\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}dx = q_6(x)\sqrt{1+x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Applicando direttamente la (3.77):

$$x^6 = \left(x^2 + 1\right)\sum_{k=0}^{4}(k+1)\,b_{k+1}x^k + x\sum_{k=0}^{5}b_k x^k + \lambda$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{aligned}
6b_5+0+0+0+0+0+0&=1\\
0+5b_4+0+0+0+0+0&=0\\
5b_5+0+4b_3+0+0+0+0&=0\\
0+4b_4+0+3b_2+0+0+0&=0\\
0+0+3b_3+0+2b_1+0+0&=0\\
0+0+0+2b_2+0+b_0+0&=0\\
0+0+0+0+b_1+0+\lambda&=0
\end{aligned}$$

Tale sistema ammette l'unica soluzione:

$$(b_5,b_4,b_3,b_2,b_1,b_0,\lambda)=\left(\frac{1}{6},0,-\frac{5}{24},0,\frac{5}{16},0,-\frac{5}{16}\right),$$

donde:

$$q_5(x)=\frac{5}{16}x-\frac{5}{24}x^3+\frac{1}{6}x^5$$

Ricordando che $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C_1$, si ottiene:

$$I(x)=\frac{1}{48}\left(8x^5-10x^3+15x\right)\sqrt{x^2+1}-\frac{5}{16}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C$$

4. $I(x)=\int\frac{4x}{\sqrt{x^2-4x+2}}dx$. Si calcola con la (3.39):

$$I(x)=4\sqrt{x^2-4x+2}+8\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+2}\right|+\text{const}$$

3.14.6 Integrali del "tipo 3"

Hanno un espressione generale:

$$J_n(x)=\int\frac{dx}{(x-x_0)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{3.81}$$

Si osservi che per $n=0,1$ l'integrale (3.81) è del tipo (3.39)-(3.40) rispettivamente, donde assumiamo $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$.
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\frac{1}{x-x_0}=t \tag{3.82}$$

L'integrale diventa:

$$J_n(t)=-\int\frac{t^{n-1}}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}dt=-I_{n-1}(t), \tag{3.83}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
\alpha&=ax_0^2+bx_0+c\\
\beta&=2ax_0+b\\
\gamma&=a
\end{aligned} \tag{3.84}$$

e

$$I_{n-1}(t)=\int\frac{t^{n-1}}{\sqrt{\alpha t^2+\beta t+\gamma}}dt$$

Abbiamo quindi ricondotto l'integrale al tipo 2, per cui è $n \geq 3$. Quindi:

$$I_{n-1}(t) = q_{n-2}(t)\sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}} \tag{3.85}$$

$$2t^{n-1} = 2\left(\alpha t^2 + \beta t + \gamma\right)\sum_{k=0}^{n-3}(k+1)\,b_{k+1}t^k + (2\alpha t + \beta)\sum_{k=0}^{n-2} b_k t^k + 2\lambda$$

3.14.7 Calcolare i seguenti integrali

$$1)\ \int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} \quad 2)\ \int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} \quad 3)\ \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$$

3.14.8 Soluzioni

1. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$. Qui è:

$$\alpha = -1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$$

Quindi:

$$J_3(t) = -I_2(t) = -\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{3.86}$$

Calcoliamo $I_2(t)$:

$$I_2(t) = q_1(t)\sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Per la seconda delle (3.85):

$$2t^2 = 2\left(1-t^2\right)b_1 + (-2t)(b_0 + b_1 t) + 2\lambda$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} -2b_1 + 0 + 0 &= 1 \\ 0 - b_0 + 0 &= 0 \\ b_1 + 0 + \lambda &= 0, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è:

$$(b_1, b_0, \lambda) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Osservando che $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$ si ottiene:

$$I_2(t) = \frac{1}{2}\left(-t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right) + C_2$$

Per la (3.86):

$$J_3(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2} - \arcsin\frac{1}{x+1}\right] + C$$

2. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. Qui è:

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$$

Quindi:

$$J_5(t) = -I_4(t) = -\int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{3.87}$$

Calcoliamo $I_4(t)$:

$$I_4(t) = q_3(t)\sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Per la seconda delle (3.85):

$$2t^4 = 2\left(1-t^2\right)\left(b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2\right) + (-2t)\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3\right) + 2\lambda$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} -4b_3 + 0 + 0 + 0 + 0 &= 1 \\ 0 - 3b_2 + 0 + 0 + 0 &= 0 \\ 3b_3 + 0 - 2b_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 2b_2 + 0 - b_0 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + b_1 + 0 + \lambda &= 0, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è:

$$(b_3, b_2, b_1, b_0, \lambda) = \left(-\frac{1}{4}, 0, -\frac{3}{8}, 0, \frac{3}{8}\right)$$

Osservando che $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + \text{const}$, si ottiene:

$$I_4(t) = \frac{1}{8}\left[-\left(3t + 8t^3\right)\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\right] + C_1$$

Per la (3.87):

$$J_5(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{x^2-1} - \arcsin\frac{1}{x}\right) + C$$

3. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$. Spezziamo l'integrale:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx \\ &= \sum_{k=1}^{3} F_k(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \\ F_2(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \\ F_3(x) &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} \end{aligned} \tag{3.88}$$

Calcoliamo separatamente i tre integrali (3.88). Per la (3.39):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right| + C_1 \\ F_2(x) &= \ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right| + C_2 \end{aligned}$$

$F_3(x)$ si calcola con la sostituzione $x = t^{-1}$ ottenendo

$$F(t) = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}},$$

che a parte il segno, è pari a $F_2(x)$, quindi:

$$F_3(t) = -\ln\left|2t - 1 + 2\sqrt{t^2 - t + 1}\right| + C_3,$$

essendo $t = x^{-1}$. Ripristinando la variabile x:

$$F_3(x) = \ln|x| - \ln\left|2 - x + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right| + C_3$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{2}\ln\left|2 - x + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right| + \\ + \ln|x| - \ln\left|2 - x + 2\sqrt{x^2 - x + 1}\right| + \text{const} \end{aligned}$$

3.14.9 Integrali del "tipo 4"

Hanno un espressione generale:

$$I_{m,n,p}(x) = \int x^m (a + bx^n)^p \, dx, \tag{3.89}$$

essendo $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Proposizione (Teorema di Cebyscev) 19. L'integrale (3.89) è esprimibile attraverso una combinazione finita di funzioni elementari se e solo se è verificata una delle condizioni:

1. $p \in \mathbb{Z}$
2. $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$
3. $\left(\frac{m+1}{n} + p\right) \in \mathbb{Z}$

   Nel caso 1 il cambio di variabile è:

   $$x = t^q, \tag{3.90}$$

   essendo q il m.c.m. dei denominatori di m e n.

   Nel caso 2 il cambio di variabile è:

   $$a + bx^n = t^k, \tag{3.91}$$

   essendo k il denominatore di p.

   Nel caso 3 il cambio di variabile è:

   $$ax^{-n} + b = t^k \tag{3.92}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esempio:

$$I_{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3}}(x) = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Qui è:

$$m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}, a = b = 1$$

Siamo nel caso 2:

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3 \Longrightarrow dx = 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt$$

Ciò implica:

$$I_{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3}}(t) = 12 \int \left(t^6 - t^3\right) dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3}}(x) = \frac{12}{7} \sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7} - 3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4} + \text{const}$$

3.14.10 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int x^3 \left(1+2x^2\right)^{-3/2} dx$ 2) $F_m(x) = \int \frac{x^m dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ per $m = -1, 4$ 3) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

4) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ 5) $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$ 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

7) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$ 8) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}} dx$ 9) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

3.14.11 Soluzioni

1. $\int x^3 \left(1+2x^2\right)^{-3/2} dx$. Qui è $m = 3, n = 2, p = -\frac{3}{2}$:

$$I_{3,2,-\frac{3}{2}}(x) = \int x^3 \left(1+2x^2\right)^{-3/2} dx,$$

quindi:

$$a + bx^n = t^k \Longleftrightarrow 1 + 2x^2 = t^2 \Longrightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{3,2,-\frac{3}{2}}(t) &= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \frac{1}{4} \frac{t^2+1}{t} + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_{3,2,-\frac{3}{2}}(x) = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}} + \text{const}$$

2. $F_{-1}(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$. Qui è $\frac{m+1}{n} = 0$, per cui il cambio di variabile:

$$1 + x^4 = t^4,$$

per cui:

$$F_{-1}(t) = \int \frac{t^2}{(t^4-1)} dt$$

Procedendo per decomposizione in frazioni semplici:

$$F_{-1}(t) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + \frac{1}{2} \arctan t + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$F_{-1}(t) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} \right| + \frac{1}{2} \arctan \sqrt[4]{x^{-4}+1} + C$$

Procedendo in maniera simile per $m = 4$:

$$F_4(x) = \frac{1}{16} \left[\ln \left| \frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1} \right| + 2 \arctan \sqrt[4]{x^{-4}+1} + \frac{4\sqrt[4]{(x^{-4}+1)^3}}{\sqrt[4]{(x^{-4}+1)^3}-1} \right] + C$$

3. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$. Qui è $m = -4, n = 2, p = -\frac{1}{2}$

$$I_{-4,2,-\frac{1}{2}}(x) = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}},$$

quindi:

$$ax^{-n} + b = t^k \iff x^{-2} + 1 = t^2 \implies dx = -\frac{tdt}{(t^2-1)^{3/2}}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{1,4,-\frac{1}{4}}(t) &= -\int \left(t^2-1\right) dt \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + t + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I_{1,4,-\frac{1}{4}}(x) &= -\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^2} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \text{const} \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{3x^2}\left(2x^2-1\right) + \text{const} \end{aligned}$$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$. Qui è $m = -1, n = 5, p = -\frac{1}{3}$

$$I_{-1,5,-\frac{1}{3}}(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}},$$

quindi:

$$a + bx^n = t^k \iff 1 + x^5 = t^3 \implies dx = \frac{3}{5}\frac{t^2dt}{(t^3-1)^{4/5}}$$

L'integrale diventa:

$$I_{-1,5,-\frac{1}{3}}(t) = \frac{3}{5}\int \frac{tdt}{t^3-1}$$

Abbiamo quindi ricondotto l'integrale 4 all'integrale di una funzione razionale propria. Riduciamo l'integrando in frazioni semplici:

$$\frac{t}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} A+B+0&=0 \\ A-B+C&=1 \\ A+0-C&=0, \end{aligned}$$

la cui unica soluzione è:

$$(A,B,C) = (0,1,0)$$

Quindi:

$$I_{-1,5,-\frac{1}{3}}(t) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\int\frac{t-1}{t^2+t+1}\right) + \text{const}$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro con la (3.38):

$$\int\frac{t-1}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_{-1,5,-\frac{1}{3}}(x) = \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{\sqrt[3]{1+x^5}-1}{\sqrt{\sqrt[3]{(1+x^5)^2}+\sqrt[3]{1+x^5}+1}}\right| + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C$$

5. $\int\frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$. Qui è $m=-2, n=3, p=-\frac{5}{3}$

$$I_{-2,3,-\frac{5}{3}}(x) = \int\frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{5/3}},$$

quindi:

$$ax^{-n}+b = t^k \iff 2x^{-3}+1 = t^3 \implies \left(x = \frac{2^{1/3}}{\left(t^3-1\right)^{1/3}},\ dx = -2^{1/3}\frac{t^2dt}{\left(t^3-1\right)^{4/3}}\right)$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{-2,3,-\frac{5}{3}}(t) &= -\int\left[\frac{\left(t^3-1\right)^{2/3}}{2^{2/3}}\cdot\frac{1}{2^{5/3}}\frac{\left(t^3-1\right)^{5/3}}{t^5}\cdot 2^{1/3}\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^{4/3}}\right]dt \\ &= -\frac{1}{4}\int\frac{t^3-1}{t^3}dt \\ &= -\frac{1}{4}\left(t+\frac{1}{2}t^{-2}\right)+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I_{-2,3,-\frac{5}{3}}(x) &= -\frac{1}{4}\left[\frac{\left(2+x^3\right)^{1/3}}{x}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{\left(2+x^3\right)^{2/3}}\right]+C \\ &= -\frac{4+3x^3}{8x\left(2+x^3\right)^{2/3}}+C \end{aligned}$$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$. Qui è $m = -\frac{3}{2}, n = \frac{3}{4}, p = -\frac{1}{3}$

$$I_{-\frac{3}{2},\frac{3}{4},-\frac{1}{3}}(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}},$$

quindi:

$$ax^{-n} + b = t^k \Longleftrightarrow x^{-3/4} + 1 = t^3 \Longrightarrow dx = -4\frac{t^2 dt}{(t^3-1)^{7/3}}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{-2,3,-\frac{5}{3}}(t) &= -4\int t dt \\ &= -2t^2 + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_{-2,3,-\frac{5}{3}}(x) = -2\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)^2}}{\sqrt{x}} + C$$

7. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$. Qui è $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}, p = 2$

$$I_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2}(x) = \int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx,$$

quindi:

$$x = t^6 \Longrightarrow dx = 6t^5 dt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2}(t) &= 6\int \left(t^{12} + 2t^{10} + t^8\right) dt \\ &= 6\left(\frac{1}{13}t^{13} + \frac{2}{11}t^{11} + \frac{1}{9}t^9\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2}(x) = 6\left(\frac{1}{13}x^{13/6} + \frac{2}{11}x^{11/6} + \frac{1}{9}x^{3/2}\right) + \text{const}$$

8. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$. Qui è $m = \frac{1}{3}, n = \frac{2}{3}, p = \frac{1}{4}$

$$I_{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4}}(x) = \int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}dx,$$

Abbiamo:

$$\frac{m+1}{n} = 1,$$

donde il cambio di variabile è

$$a + bx^n = t^k \Longleftrightarrow 1 + x^{2/3} = t^4 \Longrightarrow \left(x = \left(t^4-1\right)^{3/2},\ dx = 6t^3\left(t^4-1\right)^{1/2} dt\right)$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2}(t) &= 6\int t^4\left(t^4-1\right)dt \\ &= 6\left(\frac{1}{9}t^9-\frac{1}{5}t^5\right)+\text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2}(x) &= 6\left[\frac{1}{9}\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^9}-\frac{1}{5}\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^5}\right]+C \\ &= 6\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^5}\frac{5\sqrt[3]{x^2}-4}{45}+C \end{aligned}$$

9. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. Qui è $m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}$

$$I_{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3}}(x)=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx,$$

Abbiamo:

$$\frac{m+1}{n}=2,$$

donde il cambio di variabile è

$$a+bx^n=t^k \Longleftrightarrow 1+x^{1/4}=t^3 \Longrightarrow \left(x=\left(t^3-1\right)^4,\ dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3dt\right)$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2}(t) &= 12\int t^3\left(t^3-1\right)dt \\ &= 12\left(\frac{1}{7}t^7-\frac{1}{4}t^4\right)+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I_{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2}(x) &= 12\left[\frac{1}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}\right]+C \\ &= \frac{3}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}\left(4\sqrt[4]{x}-3\right)+C \end{aligned}$$

3.15 Esercizi riepilogativi sugli integrali di funzioni irrazionali

3.15.1 Calcolare i seguenti integrali

1) $\int\frac{\sqrt{x^2+4x+4}+x^2}{x+1}dx$ 2) $\int\frac{dx}{x-2\sqrt[3]{x}+4}$ 3) $\int x^{-3}\left(1+x^4\right)^{1/2}dx$ 4) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^3}}$

5) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ 6) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$ 7) $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$ 8) $\int\frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}dx$

9) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ 10) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$ 11) $\int\frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$ 12) $\int\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3}dx$

13) $\int\frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/4}}$ 14) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ 15) $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}dx$ 16) $\int x^2\sqrt{1-x}dx$

17) $\int\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$ 18) $\int\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$ 19) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ 20) $\int\frac{xdx}{\sqrt{-x^2+x+2}}$

***

21) $\int \sqrt{x^2+4x+13}dx$ 22) $\int \sqrt{-x^2-x+1}dx$ 23) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}dx$

24) $\int \frac{x+\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}}dx$ 25) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+x}dx$ 26) $\int \sqrt{-x^2-14x+17}dx$

27) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{x^2-12x+52}}dx$ 28) $\int \sqrt{\frac{x}{x-2}}dx$ 29) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

3.15.2 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x^2+4x+4}+x^2}{x+1}dx$. Si riduce facilmente all'integrale di una funzione razionale impropria:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(x+2)+x^2}{x+1}dx \\ &= \int \left(x+\frac{2}{x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+2\ln|x+1|+\text{const} \end{aligned}$$

2. $I(x) = \int \frac{dx}{x-2\sqrt[3]{x}+4} = \int R\left(x, x^{1/3}\right)dx$, cioè è del tipo 1 con $(p_1, q_1) = (1, 3)$, donde:

$$x = t^3$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= 3\int \frac{t^2dt}{t^3-2t+4} \\ &= 3\int \frac{t^2dt}{(t+2)(t^2-2t+2)} \end{aligned}$$

Riduciamo in frazioni semplici:

$$\frac{t^2}{(t+2)(t^2-2t+2)} = \frac{A}{t+2}+\frac{Bt+C}{t^2-2t+2}$$

cioè:

$$(A+B)t^2+(-2A+2B+C)t+2A+2C = t^2$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{aligned} A+B+0 &= 1 \\ -2A+2B+C &= 0 \\ 2A+0+2C &= 0 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Il sistema (3.93) è di Cramer, e risolvendo:

$$(A, B, C) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

Quindi:

$$I(t) = 3\left[\frac{2}{5}\int \frac{dt}{t+2}+\frac{1}{5}J(t)\right],$$

essendo:

$$J(t) = \int \frac{3t-2}{t^2-2t+2}dt,$$

che si calcola con la (3.38):

$$J(t) = \frac{3}{2}\ln\left(t^2 - 2t + 2\right) + \arctan(t-1) + \text{const}$$

Quindi:

$$I(t) = 3\left[\frac{2}{5}\ln|t+2| + \frac{3}{10}\ln\left(t^2 - 2t + 2\right) + \frac{1}{5}\arctan(t-1)\right] + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{3}{5}\left[2\ln\left|\sqrt[3]{x}+2\right| + \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2\right) + \arctan\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\right] + \text{const}$$

3. $\int x^{-3}\left(1+x^4\right)^{1/2}dx$. È del tipo 4 con $m=-3, n=4, p=\frac{1}{2}$

$$I_{-3,4,\frac{1}{2}}(x) = \int x^{-3}\left(1+x^4\right)^{1/2}dx,$$

Abbiamo:

$$\frac{m+1}{n} + p = 0,$$

donde il cambio di variabile è

$$ax^{-n} + b = t^k \iff x^{-4} + 1 = t^2 \implies \left(x = \left(t^2-1\right)^{1/4},\ dx = -\frac{1}{2}t\left(t^2-1\right)^{-5/4}dt\right)$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I_{3,4,\frac{1}{2}}(t) &= -\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{t^2-1}dt \\ &= -\frac{1}{2}\left[t + \int\frac{dt}{t^2-1}\right]dt \\ &= -\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_{-3,4,\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}-x^2}\right|\right) + C$$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^3}} = \int x^{-1/3}\left(1+x^2\right)^{-1/3}dx$. È del tipo 4 con $m=-\frac{1}{3}, n=2, p=-\frac{1}{3}$

$$I_{-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{3}}(x) = \int x^{-1/3}\left(1+x^2\right)dx,$$

Abbiamo:

$$\frac{m+1}{n} + p = 0,$$

donde il cambio di variabile è

$$ax^{-n} + b = t^k \iff x^{-2} + 1 = t^3 \implies \left(x = \left(t^3-1\right)^{-1/2},\ dx = -\frac{3}{2}t^2\left(t^3-1\right)^{-3/2}dt\right)$$

L'integrale diventa:

$$I_{-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{3}}(t) = -\frac{3}{2}\int \frac{t}{t^3-1}dt$$

Riduciamo in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}\frac{t}{t^3-1} &= \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1} \\ &= \frac{A\left(t^2+t+1\right)+\left(Bt+C\right)\left(t-1\right)}{t^3-1} \\ &= \frac{\left(A+B\right)t^2+\left(A-B+C\right)t+A-C}{t^3-1}\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{aligned}A+B+0&=0 \\ A-B+C&=1 \\ A+0-C&=0\end{aligned} \tag{3.94}$$

Il sistema (3.94) è di Cramer, quindi risolviamolo con l'omonima regola:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \\ \Delta_A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\ \Delta_B &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \\ \Delta_C &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{1}{3} \\ B &= \frac{\Delta_B}{\Delta} = -\frac{1}{3} \\ C &= \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'integrale diventa:

$$I_{-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{3}}(t) = -\frac{1}{2}\left(\ln|t-1| + C_1 - \int \frac{t-1}{t^2+t+1}\right)$$

L'integrale a secondo membro si calcola con la (3.38), ottenendo:

$$\int \frac{t-1}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2$$

Sostituendo nella precedente:

$$I_{-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{3}}(t) = -\frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{4}\ln\left(t^2+t+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I_{-\frac{1}{3},2,-\frac{1}{3}}(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x^{-2}+1}-1\right| + \frac{1}{4}\ln\left[\sqrt[3]{\left(x^{-2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(x^{-2}+1\right)}+1\right]$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x^{-2}+1}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

5. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$. Il cambio di variabile è

$$\sqrt{x} = t \Longrightarrow dx = 2tdt$$

donde:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt \\ &= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt \\ &= 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) \\ &= 2\left(t - \arctan t\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2\left(\sqrt{x} - \arctan\sqrt{x}\right) + \text{const}$$

6. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$. Il cambio di variabile è

$$\sqrt{x} = t \Longrightarrow dx = 2tdt$$

donde:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2\int \frac{dt}{t+1} \\ &= 2\ln|t+1| + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right| + \text{const}$$

7. $I(x) = \int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\sqrt{x+2} = t \Longrightarrow dx = 2tdt$$

donde:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2\int \frac{tdt}{t+3} \\ &= 2\left(t - 3\ln|t+3|\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 2\left[\sqrt{x+2} - 3\ln\left(\sqrt{x+2}+3\right)\right] + \text{const}$$

8. $I(x) = \int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}} dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\sqrt{3x+2} = t \Longrightarrow \left(x = \frac{1}{3}\left(t^2 - 2\right), \, dx = \frac{2}{3} t dt \right)$$

donde:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{2}{3} \int \frac{t - t^2}{1+t} dt \\ &= \frac{2}{3} \int \left(-t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt + C_1 \\ &= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} t^2 + 2t - 2 \ln |1+t| \right) + C_1 \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -x + \frac{4}{3} \left[\sqrt{3x+2} - \ln \left(1 + \sqrt{3x+2} \right) \right] + C$$

9. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$. Si calcola direttamente con la (3.39):

$$I(x) = \ln \left| 2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x + 1} \right| + \text{const}$$

10. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \frac{1}{x},$$

ottenendo:

$$I(t) = -\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2 + t + 1}},$$

con la (3.39):

$$I(t) = \arcsin \frac{1-2t}{\sqrt{5}} + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{5}} + \text{const}$$

11. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}}$. Si calcola direttamente con la (3.39):

$$\begin{aligned} I(x) &= -\arcsin \frac{1-2x}{5} + \text{const} \\ &= \arcsin \frac{2x-1}{5} + \text{const} \end{aligned}$$

12. $I(x) = \int \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3} dx$. Può essere scritto come:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^{-5/2} \sqrt{4-x} dx \\ &= \int x^{-m} \left(a + bx^n\right)^p dx \end{aligned}$$

Risulta:

$$\frac{m+1}{n}+p=-1,$$

per cui il cambio di variabile è:

$$4x^{-1}-1=t^2,$$

da cui:

$$x=\frac{4}{t^2+1},\ dx=-\frac{8tdt}{(t^2+1)}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int 4^{-5/2}\left(t^2+1\right)^{5/2}\frac{2t}{\left(t^2+1\right)^{1/2}}\frac{(-8)\cdot t}{\left(t^2+1\right)^2}dt \\ &= -16\cdot 4^{-5/2}\int t^2dt \\ &= \frac{16}{3}\cdot 4^{-5/2}t^3+\text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x)=-\frac{\sqrt{\left(4x-x^2\right)^3}}{6x^3}+\text{const}$$

13. $I(x)=\int\frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/4}}=\int R\left[(x+1)^{1/2},(x+1)^{1/4}\right]$, quindi è del tipo 1 con $q_1=2$, $q_2=4$, donde è $k=4$. Il cambio di variabile è:

$$(x+1)^4=t$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= 4\int\frac{t^2dt}{t+1} \\ &= 4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= t\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln|t+1|\right)+\text{const} \end{aligned}$$

Rirpristinando la variabile x:

$$I(x)=4\left[\frac{1}{2}(x+1)^{1/2}-(x+1)^{1/4}+\ln\left|(x+1)^{1/4}+1\right|\right]+\text{const}$$

14. $I(x)=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x=\frac{2}{t}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= -\frac{1}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{t^2-1}+\text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x)=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+\text{const}$$

15. $I(x) = \int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$. È del tipo 4 con $m = 0, n = 1/2, p = 1/2$, per cui il cambio di variabile è:

$$1 + x^{1/2} = t^2,$$

differenziando:

$$dx = 4t\left(t^2 - 1\right)dt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= 4\int t^2\left(t^2-1\right)dt \\ &= 4\left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I(x) &= 4\left[\frac{1}{5}\left(1+x^{1/2}\right)^{5/2} - \frac{1}{3}\left(1+x^{1/2}\right)^{3/2}\right] + \text{const} \\ &= \frac{4}{15}\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}\left(3\sqrt{x}-2\right) + \text{const} \end{aligned}$$

16. $I(x) = \int x^2\sqrt{1-x}dx$. È del tipo 4 con $m = 2, n = 1, p = 1/2$, per cui:

$$\sqrt{1-x} = t^2$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= -2\int\left(t^6 - 2t^4 + t^2\right)dt \\ &= -2\left(\frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\frac{2}{105}\sqrt{(1-x)^3}\left(15x^2 + 12x + 8\right) + \text{const}$$

17. $I(x) = \int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx = \int R\left(x^{1/3}, x^{1/2}, x^{1/4}\right)$, quindi il cambio di variabile è:

$$x = t^{12}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= 12\int\frac{t^8\left(1-t^4\right)}{t^3+1}dt \\ &= 12\int\left(1 - t^2 - t^3 + t^5 + t^6 - t^9 + \frac{t-1}{t^2-t+1}\right)dt \\ &= 12\left[t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{7}t^7 - \frac{1}{10}t^{10} + J(t)\right], \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int\frac{t-1}{t^2-t+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2-t+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 \end{aligned}$$

Sostituendo nella precedente e ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 12\sqrt[12]{x} - 4\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \frac{12}{7}\sqrt[12]{x^7}$$
$$- \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 6\ln\left(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 1\right) - \frac{12}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt[12]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C$$

18. $I(x) = \int \frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx = \int R\left[(x+1)^{1/2}, (x+1)^{1/3}\right]dx$, quindi il cambio di variabile è:

$$x + 1 = t^6$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = 6\int \left(t^3 - t^4\right)dt = 6\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{5}t^5\right) + \text{const}$$

Rirpristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+1)^5} + \text{const}$$

19. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$. Si calcola direttamente con la (3.39), ottenendo:

$$I(x) = \ln\left|2x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right|$$

20. $I(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{-x^2+x+2}}$. Si calcola direttamente con la (3.39), ottenendo:

$$I(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{3} - \sqrt{-x^2 + x + 2} + \text{const}$$

21. $I(x) = \int \sqrt{x^2 + 4x + 13}dx$. Si calcola direttamente con la (3.41), ottenendo:

$$I(x) = \frac{x+2}{2}\sqrt{x^2 + 4x + 13} + \frac{9}{2}\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 13}\right| + \text{const}$$

22. $I(x) = \int \sqrt{-x^2 - x + 1}dx$. Si calcola direttamente con la (3.41), ottenendo:

$$I(x) = \frac{2x+1}{4}\sqrt{-x^2 - x + 1} + \frac{5}{8}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + \text{const}$$

23. $I(x) = \int \frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}dx$. Può essere scritto come:

$$I(x) = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{\sqrt{-x^4 + 3x^2 - 2}}d\left(x^2\right),$$

per cui è conveniente eseguire il cambio di variabile:

$$y = x^2,$$

donde:

$$I(y) = \frac{1}{2}\int \frac{y+1}{\sqrt{-y^2 + 3y - 2}}dy,$$

che si calcola con la (3.39), ottenendo:

$$I(y) = \frac{5}{4}\arcsin(2y - 3) - \frac{1}{2}\sqrt{-y^2 + 3y - 2} + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{5}{4}\arcsin\left(2x^2 - 3\right) - \frac{1}{2}\sqrt{-x^4 + 3x^2 - 2} + \text{const}$$

24. $I(x) = \int \frac{x+\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}} dx = \int R\left[x, (x+2)^{1/3}, (x+2)^{1/4}\right] dx$, per cui il cambio di variabile è:

$$x + 2 = t^{12}$$

Differenziando rispetto a t:

$$dx = 12t^{11} dt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= 12 \int \left(t^{19} + t^{10} - 2t^7\right) dt \\ &= 12 \left(\frac{t^{20}}{20} + \frac{t^{11}}{11} - \frac{1}{4} t^8\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = 12 (x+2)^{2/3} \left[\frac{1}{20}(x-1) + \frac{1}{11}(x+2)^{1/11}\right] + \text{const}$$

25. $I(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+x} dx$. Indicando con $f(x)$ la funzione integranda:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x} \\ &= \sqrt{\frac{x+1}{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= J(x) - 2\sqrt{x} + \text{const}, \end{aligned} \tag{3.95}$$

essendo:

$$J(x) = \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$$

Per il calcolo di $J(x)$ eseguiamo il cambio di variabile:

$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = t,$$

da cui:

$$x = \frac{1}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$$

Quindi:

$$J(t) = -2 \int \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2} dt$$

Riduciamo l'integrando in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2} &= \frac{t^2}{(t-1)^2 (t^2+1)} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1}\right] \end{aligned}$$

Integrando:

$$J(t) = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{2t}{t^2-1}\right) + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x e sostituendo nella (3.95):

$$I(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x}} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right| + \text{const}$$

26. $I(x) = \int \sqrt{-x^2-14x+17}dx$. Si calcola direttamente con la (3.41):

$$I(x) = \frac{x+7}{2}\sqrt{-x^2-14x+17} + 33\arcsin\frac{x+7}{\sqrt{66}} + \text{const}$$

27. $I(x) = \int \frac{6x-5}{\sqrt{x^2-12x+52}}dx$. Si calcola direttamente con la (3.39):

$$I(x) = 6\sqrt{x^2-12x+52} + 31\ln\left|\frac{x-6+\sqrt{x^2-12x+52}}{4}\right| + \text{const}$$

28. $I(x) = \int \sqrt{\frac{x}{x-2}}dx$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\frac{x}{x-2} = t^2$$

donde:

$$x = \frac{2t^2}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{4t}{t^2-1}dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = -4\int \frac{t^2dt}{(t^2-1)^2}$$

Sviluppiamo l'integrando in frazioni semplici:

$$\frac{t^2}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1}\right]$$

Da cui l'integrale:

$$I(t) = \frac{2t}{t^2-1} + \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \text{const}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \sqrt{x(x-2)} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}}\right| + \text{const}$$

29. $I(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$. Si calcola con la (3.40). Il cambio di variabile è:

$$\xi = \frac{1}{x},$$

da cui:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= -\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\xi+1}} \\ &= -\left(\ln\left|2\xi+1+2\sqrt{\xi^2+\xi+1}\right| - \ln\sqrt{3}\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x e incorporando $\ln\sqrt{3}$ nella costante di integrazione:

$$I(x) = \ln\left|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right| + \text{const}$$

3.16 Integrali di funzioni trigonometriche

3.16.1 Integrali del "tipo 1"

Hanno la seguente espressione:

$$I_{n_1,n_2}(x) = \int (\sin x)^{n_1} (\cos x)^{n_2} dx, \tag{3.96}$$

essendo $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.
Consideriamo n_i entrambi positivi. Lo schema di calcolo per $I_{n_1,n_2}(x)$ è legato alla partità di n_1, n_2. Più precisamente, il caso più immediato è quello in cui n_i è dispari. Senza perdita di generalità, supponiamo che n_1 sia dispari:

$$\exists k \in \mathbb{N} : n_1 = 2k + 1,$$

donde:

$$\begin{aligned} I_{n_1(k),n_2}(x) &= \int (\sin x)^{2k} (\cos x)^{n_2} \sin x dx \\ &= -\int \left(1 - \cos^2 x\right)^k (\cos x)^{n_2} d(\cos x) \end{aligned}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \cos x \tag{3.97}$$

Quindi:

$$I_{n_1(k),n_2}(y) = -\int \left(1 - y^2\right)^k y^{n_2} dy,$$

che si risolve facilmente. Ad esempio:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sin^3 x \cos^4 x dx \\ &= -\int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^4 x d(\cos x) \end{aligned}$$

Il cambio di variabile (3.97):

$$\begin{aligned} I(y) &= -\int \left(1 - y^2\right) y^4 dy \\ &= -\frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{7} y^7 + \text{const} \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + \text{const}$$

Nel caso $n_2 = 2k + 1$, il cambio di variabile è $y = \sin x$:

$$\begin{aligned} I_{n_1,n_2(k)}(x) &= \int (\sin x)^{n_1} (\cos x)^{2k} \cos x dx \\ &= \int (\sin x)^{n_1} \left(1 - \sin^2 x\right)^k d(\sin x) \end{aligned}$$

Cambiando la variabile:

$$I_{n_1,n_2(k)}(y) = \int y^{n_1}\left(1-y^2\right)^k dy,$$

che si risolve facilmente.

***

Se n_1 e n_2 sono entrambi pari, si cerca di trasformare l'integrando utilizzando le formule trigonometriche:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\
\sin x \cos x &= \frac{1}{2}\sin 2x
\end{aligned}$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \cos^2 3x \sin^4 3x dx \\
&= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x dx \\
&= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1-\cos 6x}{2} dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{24}\sin 12x - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C \\
&= \frac{1}{576}\left(36x - 3\sin 12x - 4\sin^3 6x\right) + C
\end{aligned}$$

***

Consideriamo ora il caso in cui $n_1, n_2 \leq 0 : (n_1, n_2) \neq (0,0)$. L'integrale (3.96) si scrive:

$$I_{n_1,n_2}(x) = \int \frac{dx}{(\sin x)^{|n_1|}(\cos x)^{|n_2|}} \tag{3.98}$$

Ricordiamo le formule:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 x} &= 1 + \frac{1}{\tan^2 x} \\
\frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x,
\end{aligned} \tag{3.99}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
(\sin x)^{|n_1|} &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\frac{|n_1|}{2}}} \\
\frac{dx}{(\cos x)^{|n_2|}} &= \left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{|n_2|-2}{2}} d(\tan x)
\end{aligned}$$

Sostituendo in (3.98):

$$I_{n_1,n_2}(x) = \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{\frac{|n_1|}{2}} \left(1 + \tan^2 x\right)^{\frac{|n_2|-2}{2}} d(\tan x)$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \tan x$$

Quindi:

$$I_{n_1,n_2}(y) = \int \frac{\left(y^2+1\right)^{\frac{|n_1|+|n_2|}{2}-1}}{y^{|n_1|}} dy \tag{3.100}$$

Osservazione. La (3.100) è valida anche se n_1, n_2 sono numeri razionali.

Alcuni esempi:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

Qui è:

$$|n_1| = 0, \quad |n_2| = 4,$$

donde la (3.100):

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \left(y^2+1\right) dy \\ &= \frac{y^3}{3} + y + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

Consideriamo ora:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

Conviene riscrivere $I(x)$ nella forma:

$$I(x) = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$$

Poniamo:

$$\xi = \frac{x}{2}$$

Ciò implica:

$$I(\xi) = \frac{1}{4}\int \frac{d\xi}{\sin^3 \xi \cos^3 \xi}$$

Qui è:

$$|n_1| = |n_2| = 3,$$

per cui:

$$
\begin{aligned}
I(y) &= \frac{1}{4}\int \frac{(y^2+1)^2}{y^3}dy \\
&= \frac{1}{4}\left(\int y dy + \int \frac{2y^2+1}{y^3}dy\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{2} + 2\ln|y| - \frac{1}{2y^2}\right) + C
\end{aligned}
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
I(x) = \frac{1}{8}\left[\tan^2\frac{x}{2} + 4\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \cot^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C
$$

3.16.1.1 $\int \frac{dx}{(\sin x)^n}$, $\int \frac{dx}{(\cos x)^n}$

Questi integrali possono essere calcolati attraverso un procedimento ricorsivo (qui è $n \geq 2$). Iniziamo con il primo integrale:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_n(x) &= \int \frac{dx}{(\sin x)^n} \\
&= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\sin x)^n}dx \\
&= \mathcal{F}_{n-2}(x) + H_n(x),
\end{aligned}
$$

essendo:

$$
H_n(x) = \int \frac{\cos^2 x}{(\sin x)^n}dx
$$

Osserviamo che

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(\sin x)^{n-1}}\right] = -(n-1)\frac{\cos x}{(\sin x)^n}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
H_n(x) &= \int \cos x \frac{\cos x}{(\sin x)^n}dx \\
&= -\frac{1}{n-1}\int \cos x d\left[\frac{1}{(\sin x)^{n-1}}\right]dx
\end{aligned}
$$

Eseguendo un'integrazione per parti nell'ultimo integrale:

$$
H_n(x) = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{(\sin x)^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\mathcal{F}_{n-2}(x)
$$

Finalmente:

$$
\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{n-1}\left[(n-2)\mathcal{F}_{n-2}(x) - \frac{\cos x}{(\sin x)^{n-1}}\right] \tag{3.101}
$$

Attraverso la formula ricorrente (3.101) è possibile determinare $\mathcal{F}_n(x)$ per assegnati valori di n (ved. Appendice). Passiamo all'integrale contenente il coseno. Poniamo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_n(x) &= \int \frac{dx}{(\cos x)^n} \\
&= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\cos x)^n} dx \\
&= \mathcal{G}_{n-2}(x) + K_n(x),
\end{aligned}
$$

essendo:

$$
K_n(x) = \int \frac{\sin^2 x}{(\cos x)^n} dx
$$

Osserviamo che

$$
\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(\cos x)^{n-1}}\right] = (n-1)\frac{\sin x}{(\cos x)^n}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
K_n(x) &= \int \sin x \frac{\sin x}{(\cos x)^n} dx \\
&= \frac{1}{n-1}\int \sin x d\left[\frac{1}{(\cos x)^{n-1}}\right] dx
\end{aligned}
$$

Eseguendo un'integrazione per parti nell'ultimo integrale:

$$
K_n(x) = \frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{(\cos x)^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\mathcal{G}_{n-2}(x)
$$

Finalmente

$$
\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{n-1}\left[(n-2)\mathcal{G}_{n-2}(x) + \frac{\sin x}{(\cos x)^{n-1}}\right] \tag{3.102}
$$

Attraverso la formula ricorrente (3.102) è possibile determinare $\mathcal{G}_n(x)$ per assegnati valori di n (ved. Appendice).

Osservazione. Le (3.101)-(3.102) sono inapplicabili per $n = 1$. A tale valore corrispondono due integrali notevoli:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x) &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C \\
\mathcal{G}_1(x) &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C
\end{aligned}
$$

3.16.1.2 Metodo pratico

Questo metodo si applica ad integrali del tipo:

$$
\int \frac{dx}{\sin^n x}, \int \frac{dx}{\cos^n x}
$$

Se n è pari si applicano le (3.99). Per n dispari, invece, si trasforma l'integrando con un artificio.
Ad esempio:

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^4 x} \\
&= -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^2}
\end{aligned}
$$

Poniamo $t = \cos x$, quindi:

$$
I(t) = -\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = -\int \frac{dt}{(1-t)^2 (1+t)^2}
$$

Riducendo l'integrando in frazioni semplici e procedendo per decomposizione:

$$
I(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{2t}{t^2-1} - \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right] + C
$$

Ripristinando la variabile x:

$$
I(x) = -\frac{1}{4}\left[\frac{2\cos x}{\sin^2 x} + \ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right|\right] + C
$$

3.16.2 Integrali del "tipo 2"

Per definizione:

$$
I_n(x) = \int (\tan x)^n \, dx, \tag{3.103}
$$

essendo $n \in \mathbb{N}$. Per $n = 0, 1$ il calcolo è immediato:

$$
\begin{aligned}
I_0(x) &= x + C \\
I_1(x) &= -\ln|\cos x| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1 + \tan^2 x\right) + C
\end{aligned}
$$

Per $n \geq 2$:

$$
I_n(x) = \int (\tan x)^{n-2} \tan^2 x dx \tag{3.104}
$$

Sostituendo la seconda delle (3.99) nella (3.104):

$$
I_n(x) = \int (\tan x)^{n-2} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx
$$

Cioè:

$$
I_n(x) = \frac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1} - I_{n-2}(x) \tag{3.105}
$$

Procedendo in maniera analoga per l'integrale:

$$
J_n(x) = \int (\cot x)^n \, dx,
$$

si giunge:

$$
J_n(x) = \frac{1}{1-n}(\cot x)^{n-1} - J_{n-2}(x) \tag{3.106}
$$

In Appendice 5 sono esplicitati gli integrali $I_n(x)$, $J_n(x)$ per alcuni valori di n.

3.16.3 Esercizi

1) $\int \cos^3 x dx$ 2) $\int \sin^5 x dx$ 3) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$ 4) $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$

5) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$ 6) $\int \sin^4 x dx$ 7) $\int \cos^4 x dx$ 8) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

9) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ 10) $\int \cos^6 3x dx$ 11) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ 12) $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$

13) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$ 14) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ 15) $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$ 16) $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}$

17) $\int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x} dx$ 18) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ 19) $\int \tan^2 5x dx$ 20) $\int \frac{dx}{\cos^5 4x}$

21) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ 22) $\int x \sin^2 x^2 dx$ 23) $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$ 24) $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$

3.16.4 Soluzioni

1. $I(x) = \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x)$
   $= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

2. $I(x) = \int \sin^5 x dx$. Abbiamo:

$$I(x) = \int \sin^4 x \sin x dx$$
$$= -\int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 d(\cos x)$$

Il cambio di variabile $y = \cos x$ implica:

$$I(y) = -\int \left(1 - y^2\right)^2 dy$$
$$= -\left(y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{2}{3} \cos^3 x - \cos x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$$

3. $I(x) = \int \sin^2 x \cos^3 dx$. Abbiamo:

$$I(x) = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx$$
$$= \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x)$$

Il cambio di variabile $y = \sin x$ implica:

$$I(y) = \int y^2 \left(1 - y^2\right) dy$$
$$= \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

4. $I(x) = \int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$. Poniamo:

$$y = \frac{x}{2}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= 2\int \sin^3 y \cos^5 y dy \\ &= 2\int \sin^3 y \left(1 - \sin^2 y\right) d(\sin y) \end{aligned}$$

Il cambio di variabile $\xi = \sin y$ implica:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int \xi^3 \left(1 - \xi^2\right)^2 d\xi \\ &= 2\left(\frac{1}{8}\xi^8 - \frac{1}{3}\xi^6 + \frac{1}{4}\xi^4\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{12}\left[3\sin^8\left(\frac{x}{2}\right) - 8\sin^6\left(\frac{x}{2}\right) + 6\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$$

5. $I(x) = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} d(\sin x) \\ &= \int \frac{\left(1 - \sin^2 x\right)^2}{\sin^3 x} d(\sin x) \end{aligned}$$

Ponendo $y = \sin x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{\left(1 - y^2\right)^2}{y^3} dy \\ &= \int \left(y - \frac{2}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dy \\ &= \frac{1}{2}y^2 - 2\ln|y| - \frac{1}{2y^2} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x - 2\ln|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

6. $I(x) = \int \sin^4 x dx$. Abbiamo:

$$\sin^4 x = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2$$

Sostituendo:

$$I(x) = \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + J(x)\right],$$

essendo:

$$J(x) = \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 2x d(2x)$$

Dalla seconda delle (3.5):

$$J(x) = \frac{1}{8}(4x + \sin 4x) + \text{const}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x) + \text{const}$$

7. $I(x) = \int \cos^4 x dx$. Abbiamo:

$$\cos^4 x = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$$

Sostituendo:

$$I(x) = \frac{1}{4}[x + \sin 2x + J(x)],$$

essendo:

$$J(x) = \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{8}(4x + \sin 4x) + \text{const}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{32}(12x + 8\sin 2x + \sin 4x) + C$$

8. $I(x) = \int \sin^2 x \cos^2 x dx$. Abbiamo:

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x,$$

donde:

$$I(x) = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x d(2x)$$

Dalla prima delle (3.5):

$$I(x) = \frac{1}{32}(4x - \sin 4x) + C$$

9. $I(x) = \int \sin^2 x \cos^4 x dx$. Risulta:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \frac{\sin^2 2x}{4} \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x dx + \int \sin^2 2x \cos 2x dx\right)\end{aligned}$$

Poniamo:

$$I_1(x) = \int \sin^2 2x dx, \quad I_2(x) = \int \sin^2 2x \cos 2x dx$$

Calcoliamo $I_1(x)$:

$$I_1(\xi) = \frac{1}{2}\int \sin^2 \xi d\xi, \qquad \text{con } \xi = 2x$$

Quindi:

$$\begin{aligned}I_1(\xi) &= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2\xi) = \frac{1}{4}\left(\xi - \frac{1}{2}\sin 2\xi\right) + C_1 \\ I_1(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C_1\end{aligned}$$

Calcoliamo $I_2(x)$:

$$I_2(x) = \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + C_2$$

da cui:

$$I(x) = \frac{1}{192}\left(12x - 3\sin 4x + 4\sin^3 2x\right)$$

10. $I(x) = \int \cos^6 3x dx$. Poniamo $y = 3x$:

$$I(y) = \frac{1}{3}\int \cos^6 y dy$$

Sviluppiamo l'integrando:

$$\begin{aligned}\cos^6 y &= \frac{1}{8}(1+\cos 2y)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(\cos^3 2y + 3\cos^2 2y + 3\cos 2y + 1\right)\end{aligned}$$

Quindi:

$$I(y) = \frac{1}{24}\left[y + \frac{3}{2}\sin 2y + 3F_1(y) + F_2(y) + C'\right],$$

essendo:

$$\begin{aligned}F_1(y) &= \int \cos^2(2y)\, dy \\ &= \frac{y}{2} + \frac{1}{8}\sin 4y + C_1 \\ F_2(y) &= \int \cos^3(2y)\, dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin 2y - \frac{1}{3}\sin^3 2y\right) + C_2\end{aligned}$$

Semplificando e ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{576}\left[48\sin 6x + 180x + 9\sin 12x - 4\sin^3 6x\right] + C$$

11. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin^4 x}$. Si calcola attraverso una formula di ricorrenza (ved. Appendice). Alternativamente, procediamo nel seguente modo:

$$I(x) = -\int \frac{1}{\sin^2 x} d(\cot x)$$

Dalla prima delle (3.99):

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x,$$

donde:

$$\begin{aligned}I(y) &= -\int \left(1 + y^2\right) dy \\ &= -y - \frac{1}{3}y^3 + C,\end{aligned}$$

essendo $y = \cot x$.

$$I(x) = -\cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C$$

12. $I(x) = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$. Abbiamo:

$$I(x) = \int \frac{1}{\cos^4 x} d(\tan x)$$

Dalla seconda delle (3.99):

$$\frac{1}{\cos^4 x} = \left(1 + \tan^2 x\right)^2,$$

donde:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \left(1 + y^2\right)^2 dy \\ &= \frac{1}{5}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + y + C, \end{aligned}$$

essendo $y = \tan x$.

$$I(x) = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C$$

13. $I(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} d(\cot x) \\ &= -\int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 x} d(\cot x) \end{aligned}$$

Tenendo conto della prima delle (3.99):

$$\begin{aligned} I(y) &= -\int \left(y^2 + y^4\right) dy \\ &= -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + C, \end{aligned}$$

essendo $y = \cot x$.

$$I(x) = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C$$

14. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$. Applicando la (3.100):

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{\left(y^2 + 1\right)^2}{y^2} dy \\ &= \int \left(y^2 + 2 + \frac{1}{y^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{y} + 2y + C \\ I(x) &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \frac{1}{\tan x} + 2\tan x + C \end{aligned}$$

15. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$. Applicando la (3.100):

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{\left(y^2 + 1\right)^3}{y^5} dy \\ &= \int \left(y + \frac{3}{y} + \frac{3}{y^3} + \frac{1}{y^5}\right) dy \\ &= \frac{1}{2}y + 3\ln|y| - \frac{3}{2y^2} - \frac{1}{4y^4} + C \\ I(x) &= \frac{1}{2}\tan^2 x + 3\ln|\tan x| - \frac{3}{2\tan^2 x} - \frac{1}{4\tan^4 x} + C \end{aligned}$$

16. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$. Prima di applicare la (3.100) eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \frac{x}{2},$$

per cui:

$$I(\xi) = 2\int \frac{d\xi}{\sin\xi\cos^3\xi}$$

La (3.100) si scrive:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{(y^2+1)}{y} dy \\ &= 2\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

17. $I(x) = \int \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x} dx$. Sviluppando il numeratore con le formule di addizione degli archi:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x\cos x} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\sin x}\right) \end{aligned}$$

Gli integrali a secondo membro dell'equazione precedente, compongono una coppia di integrali notevoli dati dalla (2.4) che qui riscriviamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C_1 \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right|\right) + C$$

18. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin^5 x}$. Abbiamo:

$$I(x) = -\int \left(1+\cot^2 x\right)^{3/2} d(\cot x)$$

Con l'usuale cambio di variabile $y = \cot x$:

$$I(y) = -\int \sqrt{(1+y^2)^3} dy$$

Eseguiamo la sostituzione $y = \sinh t$:

$$I(t) = \int \cosh^4 t dt$$

Utilizzando la nota relazione:

$$\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)$$

si ha:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{4}\int (\cosh 2t + 1)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\int \cosh^2(2t)\,dt + \sinh(2t) + t\right] + C \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\begin{aligned} \int \cosh^2(2t)\,dt &= \frac{1}{2}\left[\int (\cosh(4t)\,dt + t)\right] \\ &= \frac{1}{8}\sinh(4t) + \frac{t}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(t) = \frac{1}{32}\sinh(4t) + \frac{1}{4}\sinh(2t)\,\frac{3}{8}t + C,$$

Ripristiniamo la variabile $y = \sinh t$. A tale scopo osserviamo che

$$\begin{aligned} \sinh 2t &= 2\sinh t\cosh t = 2\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} = 2y\sqrt{1+y^2} \\ \sinh 4t &= 2\sinh 2t\cosh 2t \end{aligned}$$

ma:

$$\cosh 2t = 1 + 2\sinh^2 t = 1 + 2y^2$$

Sostituendo nella precedente:

$$\sinh 4t = 4y\left(1+2y^2\right)\sqrt{1+y^2},$$

onde:

$$I(y) = \frac{y}{8}\left(1+2y^2\right)\sqrt{1+y^2} + \frac{y}{2}\sqrt{1+y^2} + \frac{3}{8}\ln\left|y + \sqrt{y^2+1}\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I(x) = &\frac{\cot x}{8}\left(1+2\cot^2 x\right)\sqrt{1+\cot^2 x} + \\ &+ \frac{\cot x}{2}\sqrt{1+\cot^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\cot x + \sqrt{1+\cot^2 x}\right| + C \end{aligned}$$

19. $I(x) = \int \tan^2 5x dx$. Poniamo:

$$\xi = 5x,$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{5}\int \tan^2\xi d\xi \\ &= \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{\cos^2\xi} - 1\right)d\xi \\ &= \frac{1}{5}\tan 5x - x + C \end{aligned}$$

20. $I(x) = \int \frac{dx}{\cos^5 4x}$. Dopo aver eseguito il cambio di variabile $\xi = 4x$ conviene applicare la formula ricorsiva esplicitata in Appendice 4, ottenendo:

$$I(x) = \frac{1}{16}\left[\frac{3}{2}\left(\ln\left|\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin 4x}{\cos^2 4x}\right) + \frac{\sin 4x}{\cos^4 4x}\right] + C$$

21. $I(x) = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \cos^2 x \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = \int \cos^2 x d\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 x}\right)$; integrando per parti:

$$I(x) = -\frac{\cos^2 x}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sin x} + C$$

22. $I(x) = \int x \sin^2 x^2 dx$. Abbiamo:

$$I(x) = \frac{1}{2}\int \sin^2 x^2 d\left(x^2\right)$$

Eseguendo il cambio di variabile $y = x^2$:

$$I(y) = \frac{1}{2}\int \sin^2 y dy,$$

che è un integrale notevole (eq. 3.5):

$$I(y) = \frac{1}{8}(2y - \sin 2y) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{8}\left(2x^2 - \sin 2x^2\right) + C$$

23. $I(x) = \int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx = -\int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sqrt[3]{\cos x} d(\cos x)$. Eseguendo il cambio di variabile $y = \cos x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= -\int y^{1/3}\left(1 - y^2\right)^2 dy \\ &= \frac{3}{5}y^{10/3} - \frac{3}{16}y^{16/3} - \frac{3}{4}y^{4/3} + C \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x} + C$$

24. Qui è:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{1}{(\sin x)^{1/2}(\cos x)^{-1/2}} d(\tan x) \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{\tan^2 x}\right)^{1/4} \frac{1}{(1 + \tan^2 x)^{1/4}} d(\tan x) \\ &= \int (\tan x)^{-1/2} d(\tan x) \\ &= 2\sqrt{\tan x} + C \end{aligned}$$

3.16.5 Integrali del "tipo 3"

Sono integrali del tipo:

$$\int f_m(x) f_n(x) dx, \tag{3.107}$$

essendo $f_m(x)$ una funzione $\sin, \cos$

$$f_m(x) = \sin mx, \cos mx$$

Si trasforma l'integrando della (3.107) in una somma procedendo poi per decomposizione. A tale scopo si utilizzano le note formule trigonometriche:

$$\begin{aligned}
\sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right] \\
\sin mx \sin nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right] \\
\cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]
\end{aligned} \tag{3.108}$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \sin 4x \cos 12x dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \sin 16x dx - \int \sin 8x dx\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(2\cos 8x - \cos 16x\right) + C
\end{aligned}$$

3.16.6 Esercizi

1) $\int \sin 3x \cos 5x dx$ 2) $\int \sin 10x \sin 15x dx$ 3) $\int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$

4) $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{2}{3}x\right) dx$ 5) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\, dx$ 6) $\int \sin(\omega t)\sin(\omega t+\phi)\, dt$

7) $\int \cos x \cos^2 3x dx$ 8) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

3.16.7 Soluzioni

1. $I(x) = \int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 8x dx - \int \sin 2x dx\right)$
   $= \frac{1}{16}\left(4\cos 2x - \cos 8x\right) + C$
2. $I(x) = \int \sin 10x \sin 15x dx = \frac{1}{2}\left(\int \cos 5x dx - \int \cos 25x dx\right)$
   $= \frac{1}{50}\left(5\sin 5x - \sin 25x\right) + C$
3. $I(x) = \int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right) dx = 3\sin\frac{1}{6}x + \frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x + C$
4. $I(x) = \int \sin\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{2}{3}x\right) dx = \frac{1}{2}\left(3\cos\frac{x}{3} - \cos x\right) + C$
5. $I(x) = \int \cos(ax+b)\cos(ax-b)\, dx$. Poniamo: $\alpha = ax+b$, $\beta = ax-b$, donde l'integrando:

   $$\begin{aligned}
   \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right] \\
   &= \frac{1}{2}\left[\cos(2b) + \cos(2ax)\right]
   \end{aligned}$$

   Quindi:

   $$I(x) = \frac{1}{4a}\left[2ax\cos(2b) + \sin(2ax)\right] + C$$
6. $I(t) = \int \sin(\omega t)\sin(\omega t+\phi)\, dt$. Poniamo: $\alpha = \omega t$, $\beta = \omega t + \phi$, donde l'integrando:

   $$\begin{aligned}
   \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \\
   &= \frac{1}{2}\left[\cos\phi - \cos(2\omega t+\phi)\right]
   \end{aligned}$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \frac{1}{2}\left[t\cos\phi - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+\phi)\right] + C \\
&= \frac{1}{4\omega}\left[2\omega t\cos\phi - \sin(2\omega t+\phi)\right] + C
\end{aligned}
$$

7. $I(x) = \int \cos x \cos^2 3x dx$

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \cos x \cos 3x \cos 3x dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 4x)\cos 3x dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \cos 2x \cos 3x dx + \int \cos 4x \cos 3x dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{5}\sin 5x\right) + C_1 + \frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{7}\sin 7x\right) + C_2 \\
&= \frac{1}{140}(70\sin x + 7\sin 5x + 5\sin 7x) + C
\end{aligned}
$$

8. $I(x) = \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \int \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\sin 3x dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \cos x \sin 3x dx - \int \cos 3x \sin 3x dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 2x)\, dx - \frac{1}{2}\int \sin 6x dx\right] \\
&= \frac{1}{48}(2\cos 6x - 3\cos 4x - 6\cos 2x) + C
\end{aligned}
$$

3.16.8 Integrali del "tipo 4"

Sono integrali del tipo:

$$
\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{3.109}
$$

essendo $\mathcal{R}$ una funzione razionale. Il cambio di variabile è:

$$
x \to t = \tan\frac{x}{2}, \tag{3.110}
$$

da cui:

$$
\mathcal{R}(\sin x, \cos x) \to \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right),
$$

e il differenziale:

$$
dx = \frac{2dt}{1+t^2}
$$

Ad esempio:

$$
I(x) = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1},
$$

diventa:

$$I(t) = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C$$

Ripristinando x:

$$I(x) = \ln\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right| + C$$

***

Se $\mathcal{R}$ è una funzione pari:

$$\mathcal{R}(-\sin x, -\cos x) \equiv \mathcal{R}(\sin x, \cos x),$$

il cambio di variabile è

$$x \to t = \tan x, \tag{3.111}$$

donde:

$$\mathcal{R}(\sin x, \cos x) \to \mathcal{R}\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right),$$

e il differenziale:

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Ad esempio:

$$I(x) = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x},$$

diventa:

$$I(t) = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

cioè:

$$I(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

3.16.9 Esercizi

1) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ 2) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$ 3) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$

4) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$ 5) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$ 6) $\int \frac{dx}{\cos x-2\sin x+3}$

7) $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx$ 8) $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx$ 9) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

10) $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$ 11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$ 12) $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$

13) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}dx$ 14) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ 15) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$

16) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx$ 17) $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$ 18) $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$

3.16.10 Soluzioni

1. $I(x) = \int \frac{dx}{3+5\cos x}$. Qui è:

$$\mathcal{R}(\cos x) = \frac{1}{3+5\cos x},$$

donde il cambio di variabile è (3.110). L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + C$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{2-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C$$

2. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

$$x \to t = \tan\frac{x}{2} \Longrightarrow I(t) = -\int \frac{dt}{t^2-2t-1}$$

Applicando direttamente la (3.38) troviamo:

$$I(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

3. $I(x) = \int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right)dx \\ &= x - J(x) + \text{const}, \end{aligned}$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{dx}{1+\cos x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x \to t = \tan\frac{x}{2},$$

donde:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} 2\frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int dt = t + \text{const}, \end{aligned}$$

quindi:

$$J(x) = \tan\frac{x}{2} + \text{const}$$

Cosicché l'integrale vale:

$$I(x) = x - \tan\frac{x}{2} + \text{const}$$

4. $I(x) = \int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx = \int \frac{\sin x - 1 + 1}{1-\sin x} dx = -x + J(x)$, essendo:

$$J(x) = \int \frac{dx}{1-\sin x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x \to t = \tan \frac{x}{2},$$

donde:

$$J(t) = \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2}$$
$$= 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} + \text{const},$$

quindi:

$$J(x) = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$

Cosicché l'integrale vale:

$$I(x) = -x - \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$

5. $I(x) = \int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x \to \tan \frac{x}{2}$$

Quindi:

$$I(t) = 2\int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15}$$

L'integrale suddetto si risolve con la (3.38):

$$I(t) = \ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right| + C,$$

da cui:

$$I(x) = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - 5}{\tan\frac{x}{2} - 3}\right| + C$$

6. $I(x) = \int \frac{dx}{\cos x - 2\sin x + 3}$. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x \to \tan \frac{x}{2}$$

Quindi:

$$I(t) = \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$$

L'integrale suddetto si risolve con la (3.38):

$$I(t) = \arctan(t-1) + C,$$

da cui:

$$I(x) = \arctan\left(\tan\frac{x}{2} - 1\right) + C$$

7. $I(x) = \int \frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx$. Osserviamo che il numeratore si può esprimere come combinazione lineare del denominatore e della sua derivata prima:

$$3\sin x + 2\cos x = A(2\sin x + 3\cos x) + B\frac{d}{dx}(2\sin x + 3\cos x) \tag{3.112}$$

Quindi:

$$I(x) = Ax + B\ln|2\sin x + 3\cos x| + C,$$

essendo C l'usuale costante di integrazione.

Dalla (3.112) si ottiene il sistema:

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 3 \\ 3A + 2B &= 2, \end{aligned}$$

quindi i coefficienti indeterminati A e B:

$$A = \frac{12}{13}, \quad B = -\frac{5}{13}$$

e l'integrale:

$$I(x) = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + C$$

8. $I(x) = \int \frac{1+\tan x}{1-\tan x} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} dx = -\int \frac{d(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x}$
$= -\ln|\cos x - \sin x| + C$

9. $I(x) = \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} \\ &= \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + 3} \frac{dx}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \\ \frac{dx}{\cos^2 x} &= d(\tan x), \end{aligned}$$

donde eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dy}{4+y^2} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

10. $I(x) = \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} \\ &= \int \frac{dx}{3\tan^2 x + 5} \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \int \frac{1}{5+3\tan^2 x} d(\tan x), \end{aligned}$$

donde eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dy}{5+3y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\tan x\right) + C \end{aligned}$$

11. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}$. Risulta:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\tan^2 x + 3\tan x - 1\right)}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{dy}{y^2+3y-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2y+3-\sqrt{13}}{2y+3+\sqrt{13}}\right| + C, \end{aligned}$$

cioè:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln\left|\frac{2\tan x+3-\sqrt{13}}{2\tan x+3+\sqrt{13}}\right| + C$$

12. $I(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x}$. Risulta:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x\left(1-5\cot x\right)}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \cot x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{dy}{5y-1} \\ &= \frac{1}{5}\ln|5y-1| + C, \end{aligned}$$

cioè:

$$I(x) = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5-\tan x}{\tan x}\right| + C$$

13. $I(x) = \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx$. Risulta:

$$I(x) = -\int \frac{d(\cos x)}{(1-\cos x)^3}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \cos x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{d(1-y)}{(1-y)^3} \\ &= -\frac{1}{2(1-y)^2} + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$I(x) = -\frac{1}{2(1-\cos x)^2} + C$$

14. $I(x) = \int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$. Risulta:

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx \\ &= 2\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} d(\sin x) \end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \sin x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= 2\int \frac{ydy}{1+y^2} \\ &= \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} \\ &= \ln\left(1+y^2\right) + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$I(x) = \ln\left(1+\sin^2 x\right) + C$$

15. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x} dx$. Risulta:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx \\ &= \int \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} d(\tan x) \end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \tan x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{1-y^2}{1+y^4} dy \\ &= I_1(y) - I_2(y), \end{aligned} \tag{3.113}$$

essendo:

$$\begin{aligned} I_1(y) &= \int \frac{dy}{1+y^4} \\ I_2(y) &= \int \frac{y^2 dy}{1+y^4} \end{aligned}$$

L'integrale $I_1(y)$ è stato già calcolato precedentemente (eq. 3.58):

$$I_1(y) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[-2\arctan\left(1-\sqrt{2}y\right) + 2\arctan\left(1+\sqrt{2}y\right) + \ln\left|\frac{y^2+\sqrt{2}y+1}{y^2-\sqrt{2}y+1}\right|\right] + \text{const}$$

Per il secondo integrale procediamo per decomposizione in frazioni semplici:

$$\frac{y^2}{1+y^4} = \frac{Ay+B}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \frac{Cy+D}{y^2-\sqrt{2}y+1}$$

Risolvendo il conseguente sistema di Cramer:

$$(A,B,C,D) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0\right),$$

donde:

$$I_2(y) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} J_1(y) + \frac{1}{2\sqrt{2}} J_2(y),$$

essendo:

$$J_1(y) = \int \frac{ydy}{y^2 + \sqrt{2}y + 1}$$
$$J_2(y) = \int \frac{ydy}{y^2 - \sqrt{2}y + 1},$$

che si calcolano con la (3.38):

$$J_1(y) = \frac{1}{2} \ln \left| y^2 + \sqrt{2}y + 1 \right| - \arctan\left(\sqrt{2}y + 1\right) + \text{const}$$
$$J_1(y) = \frac{1}{2} \ln \left| y^2 - \sqrt{2}y + 1 \right| + \arctan\left(\sqrt{2}y - 1\right) + \text{const}$$

Quindi:

$$I_2(y) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan\left(1 + \sqrt{2}y\right) - \arctan\left(1 - \sqrt{2}y\right) \right] + \text{const}$$

Sostituendo nella (3.113):

$$I(y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1} \right| + \text{const}$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan^2 x + \sqrt{2}\tan x + 1}{\tan^2 x - \sqrt{2}\tan x + 1} \right| + \text{const}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} \right| + \text{const}$$

16. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 5} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$. Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \sin x$:

$$I(y) = \int \frac{dy}{y^2 - 6y + 5}$$
$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y - 5}{y - 1} \right| + C$$

Da cui:

$$I(x) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin x - 5}{\sin x - 1} \right| + C$$

17. $I(x) = \int \frac{dx}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$. Riduciamo l'integrando in frazioni semplici (rispetto a $\sin x$):

$$\frac{1}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)} = \frac{A}{2 - \sin x} + \frac{B}{3 - \sin x}$$
$$= \frac{(3A + 2B) + (-A - B)\sin x}{(2 - \sin x)(3 - \sin x)}$$

Deve essere:

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ 3A+2B&=1 \end{aligned}$$

Risolvendo:

$$(A,B)=(1,-1)$$

Quindi:

$$\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)}=\frac{1}{2-\sin x}-\frac{1}{3-\sin x}$$

L'integrale:

$$I(x)=I_1(x)-I_2(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} I_1(x)&=\int\frac{dx}{2-\sin x}\\ I_2(x)&=\int\frac{dx}{3-\sin x} \end{aligned}$$

Risolviamo $I_1(x)$:

$$x\to t=\tan\frac{x}{2}\Longrightarrow I_1(t)=\int\frac{dt}{t^2-t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+\text{const}$$

Perciò:

$$I_1(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)+\text{const}$$

Risolviamo $I_2(x)$:

$$x\to t=\tan\frac{x}{2}\Longrightarrow I_2(t)=2\int\frac{dt}{3t^2-2t+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3t-1}{2\sqrt{2}}\right)+\text{const}$$

Perciò:

$$I_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)+\text{const}$$

L'integrale $I(x)$:

$$I(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3\tan\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)+C$$

18. $I(x)=\int\frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$. Prima di eseguire il cambio di variabile $x\to t=\tan\frac{x}{2}$, semplifichiamo l'integrando:

$$\begin{aligned} I(x)&=\int\left(-1+\frac{2}{1+\sin x-\cos x}\right)dx\\ &=-x+2J(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$J(x)=\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$$

Cambiando la variabile:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C \end{aligned}$$

da cui $I(x)$:

$$I(x) = -x + 2\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1}\right| + C$$

3.16.11 Esercizi riepilogativi sugli integrali trigonometrici

1) $\int \cos^4 2x \sin^3 2x dx$ 2) $\int \sin^3 3x \cos^5 3x dx$ 3) $\int \sin^2 3x \cos^5 3x dx$

4) $\int \cos^n \frac{x}{n} dx \ (n > 1)$ 5) $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$ 6) $\int \sin 3x \sin 2x dx$

7) $\int \sqrt{1-\cos x} dx$ 8) $\int (1+\cos 3x)^{3/2} dx$ 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin 2x}}$

10) $\int \tan^3 3x \sec^4 3x dx$ 11) $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$ 12) $\int \tan^3 2x \sec^3 2x dx$

13) $\int \cot 3x \csc^4 3x dx$ 14) $\int \cot^3 x \csc^5 x dx$ 15) $\int \sin^4 2x dx$

16) $\int \sin^7 x dx$

1. $I(x) = \int \cos^4 2x \sin^3 2x$. Abbiamo:

$$I(x) = -\frac{1}{2}\int \cos^4 2x \left(1-\cos^2 2x\right) d(\cos 2x)$$

Poniamo $y = \cos 2x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \frac{1}{2}\int y^4 \left(y^2-1\right) dy \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}y^7 - \frac{1}{5}y^5\right) + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{1}{14}\cos^7 2x - \frac{1}{10}\cos^5 2x + C$$

2. $I(x) = \int \sin^3 3x \cos^5 3x dx$. Abbiamo:

$$I(x) = \int \left(1-\sin^2 3x\right)\cos^5 3x \sin 3x dx$$

Poniamo $y = \cos 3x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= -\frac{1}{3}\int y^5 \left(1-y^2\right) dy \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}y^6 - \frac{1}{8}y^8\right) + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{1}{24}\cos^8 3x - \frac{1}{18}\cos^6 3x + C$$

3. $I(x) = \int \sin^2 3x \cos^5 3x dx$. Abbiamo:

$$I(x) = \frac{1}{3}\int \sin^2 3x \left(1 - \sin^2 3x\right)^2 d(\sin 3x)$$

Poniamo $y = \sin 3x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \frac{1}{3}\int y^2 \left(1 - y^2\right)^2 dy \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7\right) + C \end{aligned}$$

Cioè:

$$I(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sin^3 3x - \frac{2}{5}\sin^5 3x + \frac{1}{7}\sin^7 3x\right) + C$$

4. $I_n(x) = \int \cos^n \frac{x}{n} dx$.

$$\begin{aligned} I_n(x) &= n\int \left(\cos\frac{x}{n}\right)^{n-1} \cos\frac{x}{n} dx \\ &= n\int \left(1 - \sin^2\frac{x}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} d\left(\sin\frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = \sin\frac{x}{n}$:

$$I_n(y) = n\int \left(1 - y^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dy$$

Ad esempio, per $n = 3$:

$$\begin{aligned} I_3(y) &= 3\int \left(1 - y^2\right) dy \\ &= 3\left(y - \frac{1}{3}y^3\right) + C, \end{aligned}$$

per cui:

$$I_3(x) = 3\sin\frac{x}{3} - \sin^3\frac{x}{3} + C$$

5. $I(x) = \int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$. Abbiamo:

$$I(x) = \int (\sin 3x \cos 3x)^2 \sin^2 3x dx$$

Osservando che:

$$\begin{aligned} \sin 3x \cos 3x &= \frac{1}{2}\sin 6x \\ \sin^2 3x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 6x), \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{8}\int \sin^2 6x (1 - \cos 6x) dx \\ &= \frac{1}{8}\left[I_1(x) - I_2(x)\right], \end{aligned}$$

essendo:

$$I_1(x) = \int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 12x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{12}\sin 12x\right) + C_1$$
$$I_2(x) = \int \sin^2 6x \cos 6x dx = \frac{1}{6}\int \sin^2 6x d(\sin 6x) = \frac{1}{18}\sin^3 6x + C_2,$$

per cui:

$$I(x) = \frac{x}{16} - \frac{1}{144}\sin 12x - \frac{1}{192}\sin^3 6x + C$$

6. $I(x) = \int \sin 3x \sin 2x dx$. Per le (3.108):

$$\sin 3x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x),$$

donde:

$$I(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$$

7. $I(x) = \int \sqrt{1-\cos x} dx$. Osservando che:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}, \tag{3.114}$$

segue:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},$$

donde:

$$I(x) = \sqrt{2}\int \sin\frac{x}{2} dx = -2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + C$$

8. $I(x) = \int (1+\cos 3x)^{3/2} dx$. Dalla (3.114):

$$\cos y = 2\cos^2\frac{y}{2} - 1$$

Se poniamo $y = 3x$:

$$\cos 3x = 2\cos^2\left(\frac{3}{2}x\right) - 1,$$

donde:

$$(1+\cos 3x)^{3/2} = 2\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{3}{2}x\right)$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(x) &= 2\sqrt{2}\int \cos^2\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right) dx \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2}\int \left[1 - \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)\right] d\left[\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right] \\ &= \frac{4}{9}\sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\left[3 - \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)\right] + C \end{aligned}$$

9. $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin 2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}}$. Poniamo:

$$y = \frac{\pi}{2} - 2x$$

donde:

$$\begin{aligned} I(y) &= -\frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-\cos y}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dy}{\sin\frac{y}{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{\sin\frac{y}{2}} - \cot y\right| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)} - \cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right| + C$$

10. $I(x) = \int \tan^3 3x \sec^4 3x dx$. Poniamo $3x = \xi$:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{3}\int \tan^3\xi \frac{d\xi}{\cos^4\xi} \\ &= \frac{1}{3}\int \tan^3\xi \frac{1}{\cos^2\xi} d(\tan\xi) \end{aligned} \tag{3.115}$$

Ma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2\xi} &= \frac{\sin^2\xi + \cos^2\xi}{\cos^2\xi} \\ &= \tan^2\xi + 1 \end{aligned}$$

Quindi la (3.115) diventa:

$$I(\xi) = \frac{1}{3}\int \tan^3\xi\left(\tan^2\xi + 1\right) d(\tan\xi)$$

Esegiamo il cambio di variabile $\xi \to y = \tan\xi$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \frac{1}{3}\int y^3\left(y^2+1\right) dy \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}y^6 + \frac{1}{4}y^4\right) + \text{const} \end{aligned}$$

Ritornando alla variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\tan^6 3x + \frac{1}{2}\tan^4 3x\right) + C$$

11. $I(x) = \int \tan^2 x \sec^3 x dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \mathcal{G}_5(x) - \mathcal{G}_2(x)$, essendo $\mathcal{G}_n(x)$ espresso dalla (3.102). Abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3(x) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{G}_1(x) + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right] + \text{const} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right] + \text{const} \\ \mathcal{G}_5(x) &= \frac{1}{4}\left[3\mathcal{G}_3(x) + \frac{\sin x}{\cos^4 x}\right] + \text{const}, \end{aligned}$$

donde:

$$I(x) = -\frac{1}{4}\mathcal{G}_3(x) + \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + C$$

12. $I(x) = \int \tan^3 2x \sec^3 2x dx$. Poniamo $\xi = 2x$:

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2}\int \tan^3 \xi \frac{d\xi}{\cos^3 \xi} \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 \xi}{\cos^6 \xi} d(\cos \xi) \end{aligned}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $y = \cos \xi$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \frac{1}{2}\left(\int y^{-4} dy - \int y^{-6} dy\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}y^{-3} + \frac{1}{5}y^{-5}\right) + C \end{aligned}$$

Ritornando alla variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\cos^5 2x} - \frac{1}{3\cos^3 2x}\right) + C$$

13. $I(x) = \int \cot 3x \csc^4 3x dx = -\frac{1}{3}\int \frac{\cot 3x}{\sin^2 3x} d(\cot 3x)$. Osservando che:

$$\frac{1}{\sin^2 3x} = 1 + \cot^2 3x,$$

si ha:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{3}\int \cot 3x \left(1 + \cot^2 3x\right) d(\cot 3x) \\ &= -\frac{1}{12}\cot^2 3x \left(2 + \cot^2 3x\right) + C \end{aligned}$$

14. $I(x) = \int \cot^3 x \csc^5 x dx$. Sviluppiamo l'integrando:

$$\begin{aligned} \cot^3 x \csc^5 x dx &= \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx \\ &= \frac{d(\sin x)}{\sin^8 x} - \frac{d(\sin x)}{\sin^6 x}, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^8 x} - \int \frac{d(\sin x)}{\sin^6 x} \\ &= -\frac{1}{7\sin^7 x} + \frac{1}{5\sin^5 x} + C \end{aligned}$$

15. $I(x) = \int \sin^4 2x dx$. Abbiamo ($\xi = 2x$):

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \frac{1}{2}\int \sin^4 \xi d\xi \\ &= \frac{1}{2}\int \sin^2 \xi d\left[\frac{1}{4}(2\xi - \sin 2\xi)\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[2\xi \sin^2 \xi - \sin^2 \xi \sin 2\xi + \xi \cos 2\xi - \frac{1}{2}\cos 2\xi - \frac{1}{2}\sin 2\xi + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{8}\sin 4\xi\right] + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{8}\left(4x\sin^2 2x - \sin^2 2x \sin 4x + 2x\cos 4x - \frac{1}{2}\sin 4x + x - \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C \\ &= -\frac{1}{8}\sin^3 2x\cos 2x - \frac{3}{16}\cos 2x \sin 2x + \frac{3}{8}x + C \end{aligned}$$

16. $I(x) = \int \sin^7 x dx = -\int (1-\cos^2 x)^3 d(\cos x)$. Eseguiamo il cambio di variabile $x \to y = \cos x$:

$$I(y) = \frac{1}{7}y^7 - \frac{3}{5}y^5 + y^3 - y + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C$$

3.17 Integrazione delle funzioni iperboliche

Il punto di partenza è la relazione fondamentale:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{3.116}$$

La prima relazione utile si ottiene dalla formula di duplicazione:

$$\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1, \tag{3.117}$$

risolvendo rispetto a $\sinh^2 x$:

$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) \tag{3.118}$$

La (3.118) è utilizzabile quando l'integrando contiene $\sinh^2 x$.
Tenendo conto della (3.116), la (3.118) diventa:

$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x + 1) \tag{3.119}$$

Infine dalla:

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x,$$

si ottiene:

$$\sinh x \cosh x = \frac{1}{2}\sinh 2x, \tag{3.120}$$

utilizzabile quando l'integrando contiene $\sinh x \cosh x$.
Esempio 1
Calcoliamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \cosh^2 x dx \\ &= \frac{1}{2}\int (\cosh 2x + 1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) + \int dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2x + x\right) + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sinh 2x + C \end{aligned}$$

Esempio 2
Calcoliamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \cosh^3 x dx \\ &= \int \cosh^2 x d(\sinh x) \\ &= \int \left(\sinh^2 x + 1\right) d(\sinh x) \\ &= \frac{1}{3}\sinh^3 x + \sinh x + C \end{aligned}$$

3.17.1 Esercizi

1) $\int \sinh^3 x dx$ 2) $\int \cosh^4 x dx$ 3) $\int \sinh^3 x \cosh x dx$
4) $\int \sinh^2 x \cosh^2 x dx$

1. $I(x) = \int \sinh^3 x dx = \int \sinh^2 x d(\cosh x) = \int \left(\cosh^2 x - 1\right) d(\cosh x)$
   $= \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + C$
2. $I(x) = \int \cosh^4 x dx = \frac{1}{4}\int (\cosh 2x + 1)^2 dx = \frac{1}{4}\left(\int \cosh^2 2x dx + 2\int \cosh 2x + x\right)$
   $= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\sinh(4x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sinh(2x) + c\right] + C$
   $= \frac{1}{32}\sinh(4x) + \frac{1}{4}\sinh(2x) + \frac{3}{4}x + C.$
3. $I(x) = \int \sinh^3 x \cosh x dx = \int \sinh^3 x d(\sinh x) = \frac{1}{4}\sinh^4 x + C$
4. $I(x) = \int \sinh^2 x \cosh^2 x dx = \int (\sinh x \cosh x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sinh^2 2x dx$
   Calcoliamo a parte $\int \sinh^2 2x dx$:

$$\begin{aligned} &\int \sinh^2 2x dx \underset{t=2x}{=} \frac{1}{2}\int \sinh^2 t dt \\ &= \frac{1}{4}\int (\cosh 2t - 1) dt \\ &= \frac{1}{8}\sinh 2t - \frac{1}{4}t + C_1 \\ &\Longrightarrow I(x) = \frac{1}{32}\sinh(4x) - \frac{1}{8}x + C \end{aligned}$$

Capitolo 4

Integrali definiti

4.1 Somme integrali

Si chiede di calcolare i seguenti integrali considerandoli come il limite delle corrispondenti somme integrali.

$$1)\ \int_0^b x^2 dx \quad 2)\ \int_a^b dx \qquad 3)\ \int_0^T (v_0 + gt)\, dt, \text{ con } v_0, g = \text{const}$$

$$4)\ \int_{-2}^1 x^2 dx \quad 5)\ \int_0^{10} 2^x dx \quad 6)\ f(x) = \int_0^x \sin t dt$$

4.1.1 Soluzioni

1. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, b]$:

$$x_k = k\frac{b}{n}, \qquad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \frac{b}{n}$$

La somma integrale:

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Prendiamo $\xi_k = x_k$:

$$\sigma_{D_n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

Ma:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{b^3}{6}\frac{(2n-1)(n-1)}{n^2},$$

da cui l'integrale:

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = \frac{b^3}{3}$$

2. Eseguiamo unequipartizione D_n di $[a, b]$:

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

L'ampiezza di D_n è:

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ &= b - a,\end{aligned}$$

quindi:

$$\int_a^b dx = \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{\delta_n} = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = b - a$$

3. Quest'integrale ha una semplice interpretazione fisica, se poniamo:

$$y(T) = \int_0^T (v_0 + gt)\, dt$$

Qui $y(T)$ è al tempo T la quota di un punto materiale in caduta libera in un campo gravitazionale (g è l'accelerazione di gravità) con velocità iniziale v_0. L'asse y è orientato verso il basso e si trascura la resistenza dell'aria. L'integrando è la velocità istantanea:

$$v(t) = v_0 + gt$$

Eseguiamo un'equipartizione D_n di $[0, T]$:

$$t_k = k\frac{T}{n}, \quad \text{con} \quad k \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

L'ampiezza è

$$\delta_n = \max_{k \in \mathcal{N}} (t_{k+1} - t_k) = \frac{T}{n}$$

La somma integrale è

$$\sigma_{D_n} = \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k)(t_{k+1} - t_k)$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{T}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(v_0 + g\frac{T}{n}k\right) \\ &= Tv_0 + \frac{n+1}{n}\frac{gT}{2}\end{aligned}$$

Quindi l'integrale:

$$\begin{aligned} y(T) &= \lim_{\delta_n \to 0} \sigma_{D_n} \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} \\ &= v_0 T + \frac{1}{2} g T^2 \end{aligned}$$

4. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[-2, 1]$:

$$x_k = -2 + \frac{3}{n} k, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{3}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{D_n} &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \\ &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{n} k - 2 \right)^2 \\ &= \frac{3}{2} \frac{2n^2 - 3n + 3}{n} \end{aligned}$$

da cui:

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = 3$$

5. Eseguiamo una equipartizione D_n di $[0, 10]$:

$$x_k = \frac{10}{n} k, \quad \text{con } k = 0, 1, ..., n-1$$

di ampiezza:

$$\delta_n = \frac{10}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_{k+1}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{D_n} &= \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k \frac{10}{n}} \\ &= \frac{52^{\frac{10+n}{n}} \left(-1 + (1024)^{1/n} \right)^n}{\left(-1 + 1024^{1/n} \right)^n} \end{aligned}$$

da cui:

$$\int_{0}^{10} 2^x dx = \lim_{n \to +\infty} \sigma_{D_n} = \frac{10230}{\ln(1024)}$$

6. Eseguiamo l'equipartizione:

$$t_k = k\frac{x}{n}, \quad \text{con } k \in \mathcal{N} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

L'ampiezza dell'intervallo $[t_k, t_{k+1}]$ è:

$$\delta_{k,n} = t_{k+1} - t_k = \frac{x}{n},$$

donde l'ampiezza della partizione:

$$\delta_n = \max_{k \in \mathcal{N}} (\delta_k) = \frac{x}{n}$$

Assumendo $\tau_k = t_{k+1}$ e ponendo $g(t) = \sin t$:

$$\begin{aligned} \sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} g(t_{k+1}) \frac{x}{n} \\ &= \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(k\frac{x}{n}\right) \end{aligned}$$

Per il calcolo della sommatoria utilizziamo una nota relazione trigonometrica:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(ky) = \frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) y\right]}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)},$$

donde:

$$\sigma_{D_n} = \frac{x\left\{\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) y\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

Passiamo al limite per $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sigma_{D_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x\left\{\cos\left(\frac{x}{2n}\right) - \cos\left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right) x\right]\right\}}{2n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)} \\ &= \frac{x(1 - \cos x)}{2\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right)} \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il limite a denominatore:

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{x}{2n}\right) \underset{m=n^{-1}}{=} \lim_{m\to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{mx}{2}\right)}{m} = \frac{x}{2},$$

Quindi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{D_n} = 1 - \cos x$$

4.2 Teorema fondamentale del calcolo integrale.

1. Calcolare $\frac{dI}{da}$, $\frac{dI}{db}$, essendo:

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\ln(\sin x)}$$

sia $F(x)$ una qualunque primitiva di $[\ln(\sin x)]^{-1}$:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\ln(\sin x)},$$

per cui:

$$I = F(b) - F(a)$$

Quindi le derivate:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{da} &= -F'(a) = -\frac{1}{\ln(\sin a)}\\ \frac{dI}{db} &= F'(b) = \frac{1}{\ln(\sin b)}\end{aligned}$$

2. Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_1^x \ln t dt$$

Poniamo:

$$G(t) = \int \ln t dt$$

Quindi:

$$F(x) = G(x) - G(1) \Longrightarrow F'(x) = G'(x) = \ln x$$

3. Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$$

Poniamo:

$$G(t) = \int e^{-t^2} dt$$

Quindi:

$$F(x) = G\left(x^2\right) - G(x)$$

La derivata è:

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{d}{dx}G\left(x^2\right) - \frac{d}{dx}G(x)\\ &= 2xG'\left(x^2\right) - G'(x)\\ &= 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}\end{aligned}$$

4. Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt$$

Poniamo:

$$G(t) = \int \sqrt{1+t^4} dt$$

Quindi:

$$F(x) = G(0) - G(x) \Longrightarrow F'(x) = -\sqrt{1+x^4}$$

5. Calcolare la derivata della funzione:

$$F(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right) dt$$

Poniamo:

$$G(t) = \int \cos\left(t^2\right) dt$$

Quindi:

$$F(x) = G\left(\sqrt{x}\right) - G\left(\frac{1}{x}\right)$$

La derivata è:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} G\left(\sqrt{x}\right) - \frac{d}{dx} G\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

6. Determinare i punti estremali della funzione **seno integrale**:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

Poniamo:

$$G(t) = \int \frac{\sin t}{t} dt,$$

donde:

$$F(x) = G(x) - G(0)$$

Segue:

$$F'(x) = G'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

I punti estremali di $F(x)$ sono le radici dell'equazione:

$$F'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\sin x}{x} = 0$$

Cioè:

$$x_k = k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

In figura 4.1 è riportato il grafico di $F(x)$.

***

Calcolare:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ 2) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$

3) $\int_{-x}^{x} e^t dt$ 4) $\int_0^x \cos t dt$

Soluzioni

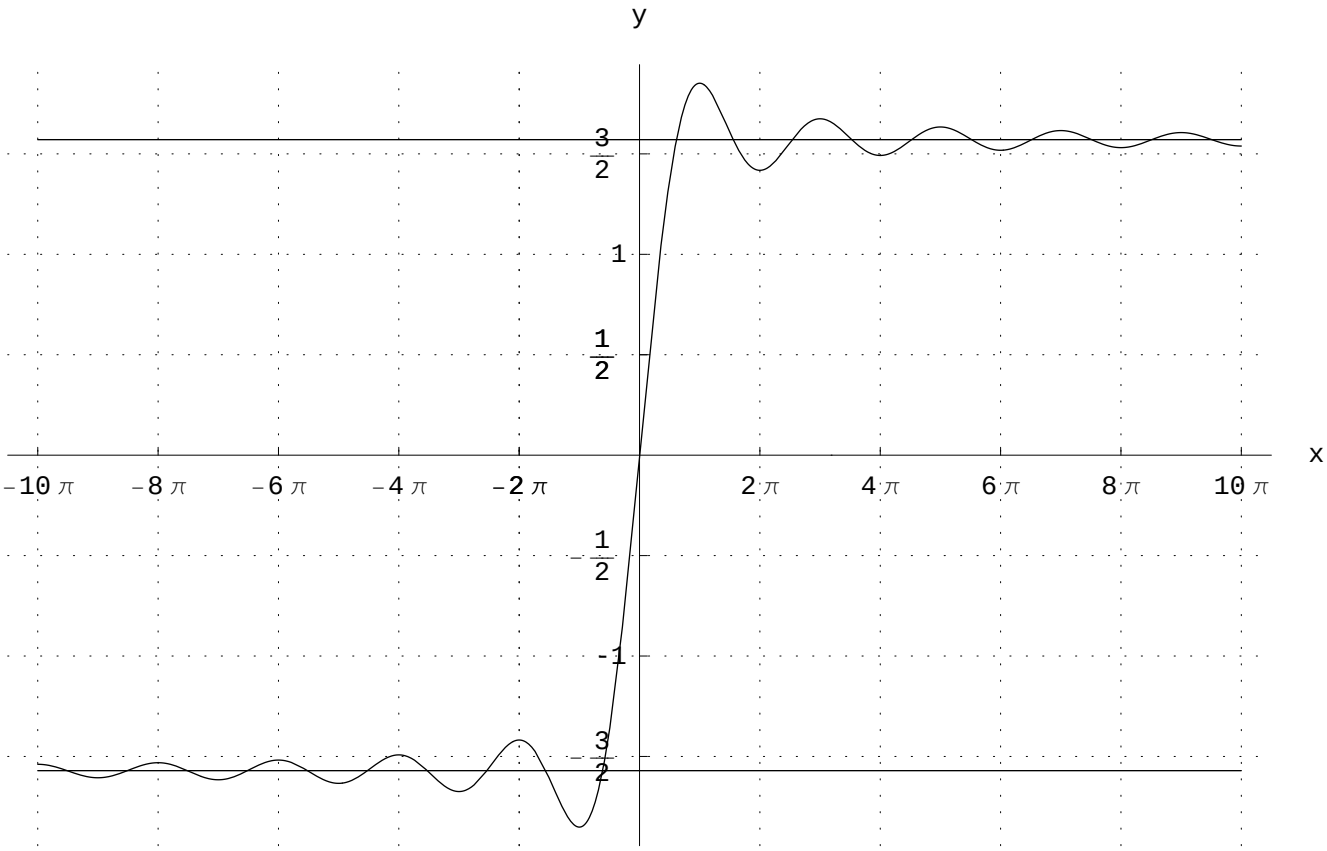


Figura 4.1: Grafico della funzione seno integrale e degli asintoti orizzontali: $y = \pm\pi/2$.

1. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Poniamo:

$$F(x) = \int \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| + C,$$

donde:

$$I = F(1) - F(0) = \ln 2$$

2. $I = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{3}{8}$.

3. $I = \int_{-x}^{x} e^t dt = e^t\big|_{-x}^{x} = e^x - e^{-x}$

4. $I(x) = \int_0^x \cos t dt = \sin t\big|_0^x = \sin x$

***

Calcolare i seguenti limiti attraverso gli integrali definiti.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right)$

3. $\lambda_p = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0)$

Soluzioni

1. È il limite di una somma integrale relativa a $f(x) = x$ in $[0,1]$. Infatti, eseguiamo una equipartizione D_n di $[0,1]$:

$$x_k = \frac{k}{n}, \text{ con } k \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

La norma è:

$$\delta_n = \max_{k\in\mathcal{N}} (x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}$$

Assumendo $\xi_k = x_k$:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2},\end{aligned}$$

donde:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_{D_n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

2. Poniamo:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\end{aligned}$$

essendo D_n una equipartizione di $[0,1]$. Deve essere:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

Confrontando con la precedente:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{n}{n+k} \\ &= \frac{1}{1+\frac{k}{n}},\end{aligned}$$

cioè:

$$f(x) = \frac{1}{1+x},$$

per cui σ_{D_n}è una somma integrale relativa a $f(x) = x$. Da ciò segue:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$$

3. Poniamo:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \frac{1^p + 2^p + ... + n^p}{n^{p+1}} \\ &= \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n} k^p\end{aligned}$$

essendo D_n una equipartizione di $[0,1]$. Deve essere:

$$\begin{aligned}\sigma_{D_n} &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

Confrontando con la precedente:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)^p,$$

cioè:

$$f(x) = x^p$$

Quindi:

$$\lambda_p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

***

Calcolare:

1) $\int_1^2 (x^2-2x+3)\,dx$ 2) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ 3) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$ 4) $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx$

5) $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ 6) $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$ 7) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ 8) $\int_{-1}^1 \frac{y^5dy}{y+2}$

9) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ 10) $\int_5^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ 11) $\int_0^1 \frac{s^3ds}{s^8+1}$ 12) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $\int_2^{7/2} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$ 14) $\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$ 15) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ 16) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Soluzioni

1. $I=\int_1^2 (x^2-2x+3)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{7}{3}$

2. $I=\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx = \sqrt{2}\int_0^8 x^{1/2}dx + \int_0^8 x^{1/3}dx$
   $=\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 8^{3/2}+\frac{3}{4}\cdot 8^{4/3} = \frac{100}{3}$

3. $I=\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy = \int_1^4 y^{-2}dy + \int_1^4 y^{-3/2}dy = \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 + \left[-2y^{-1/2}\right]_1^4$
   $=-\frac{1}{4}+1+\left(-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1\right) = \frac{7}{4}$

4. $I=\int_2^6 \sqrt{x-2} = F(6)-F(2)$, essendo

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sqrt{x-2}dx \\ &= \int (x-2)^{1/2}\,d(x-2) \\ &= \frac{2}{3}(x-2)^{3/2}+C, \end{aligned}$$

   donde:

$$I=\frac{16}{3}$$

5. $I=\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = F(-3)-F(0)$, essendo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} \\ &= \frac{1}{3}\int (25+3x)^{-1/2}\,d(25+3x) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{25+3x}+C, \end{aligned}$$

   donde:

$$I=\frac{2}{3}\sqrt{16}-\frac{2}{3}\sqrt{25}=-\frac{2}{3}$$

6. $I = \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1} = F(-3) - F(-2)$, essendo:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C,$$

donde:

$$\begin{aligned} F(-3) &= \frac{1}{2} \ln 2 + C \\ F(-2) &= \frac{1}{2} \ln 3 + C \end{aligned}$$

Quindi:

$$I = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$$

7. $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2} = F(1) - F(0)$, essendo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \frac{xdx}{x^2+3x+2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| x^2+3x+2 \right| - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C \\ &= -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} F(1) &= -\ln 2 + 2\ln 3 + C \\ F(0) &= 2\ln 2 + C \end{aligned}$$

Quindi:

$$I = \ln \frac{9}{8}$$

8. $I = \int_{-1}^1 \frac{y^5 dy}{y+2} = F(1) - F(-1)$, essendo:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int \frac{y^5 dy}{y+2} \\ &= \int \left(y^4 - 2y^3 + 4y^2 - 8y + 16 - \frac{32}{y+2} \right) dy \\ &= \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{5}y^3 - 4y^2 + 16y - 32\ln|y+2| + C, \end{aligned}$$

donde:

$$I = \frac{526}{15} - 32\ln 3$$

9. $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = F(1) - F(0)$, essendo:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Per la (3.38):

$$F(x) = \arctan(x+2) + C,$$

donde:

$$I = \arctan 3 - \arctan 2,$$

che può eesere semplificata:

$$\tan I = \tan(\alpha - \beta), \quad \text{con } \alpha = \arctan 3, \beta = \arctan 2$$

Come è noto:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta},$$

da cui:

$$\tan I = \frac{1}{7} \Longrightarrow I = \arctan\frac{1}{7}$$

10. $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2} = F(4) - F(5)$, essendo:

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

Per la (3.38):

$$F(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C,$$

donde:

$$I = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{4} = \ln\frac{8}{9}$$

11. $I = \int_0^1 \frac{s^3 ds}{s^8+1} = F(1) - F(0)$, essendo:

$$F(s) = \int \frac{s^3 ds}{s^8 + 1}$$

Eseguendo il cambio di variabile $s \to y = s^4$:

$$F(y) = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{4}\arctan y$$

Ripristinando la variabile s:

$$F(s) = \frac{1}{4}\arctan\left(s^4\right),$$

donde:

$$I = \frac{\pi}{16}$$

12. $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{4}$

13. $I = \int_2^{7/2} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}} = F\left(\frac{7}{2}\right) - F(2)$, essendo:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}}$$

Dalla (3.39):

$$F(x) = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + C,$$

donde:

$$I = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

14. $I = \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}} = F(1) - F(0)$, essendo:

$$F(y) = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$$

Eseguendo il cambio di variabile $y \to x = y^3$:

$$F(x) = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{3} \ln \left| x + \sqrt{x^2+4} \right| + C$$

Cioè:

$$F(y) = \frac{1}{3} \ln \left| y^3 + \sqrt{y^6+4} \right| + C$$

donde:

$$I = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

15. $I(x) = \int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x d(-\cos x)$. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x d(-\cos x) &= -\cos x \sin^2 x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx \\ &= 2 \left[F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \right], \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin x \cos^2 x dx \\ &= \int \cos^2 x d(-\cos x) \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 x + C, \end{aligned}$$

donde:

$$I = \frac{2}{3}$$

16. $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = F(e^2) - F(e)$, essendo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{dx}{x \ln x} \\ &= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} \\ &= \ln(\ln x) + C, \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} F(e^2) &= \ln 2 + C \\ F(e) &= C \end{aligned}$$

Quindi:

$$I = \ln 2$$

Calcolare:

1) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x dx$ 2) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^4 x dx$ 3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ 4) $\int\limits_{2}^{6} \sqrt{x-2} dx$

5) $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ 6) $\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$ 7) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ 8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^5 dy}{y+2}$

9) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ 10) $\int\limits_{5}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ 11) $\int\limits_{0}^{1} \frac{s^3 ds}{s^8+1}$ 12) $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $\int\limits_{2}^{7/2} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$ 14) $\int\limits_{0}^{1} \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$ 15) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x dx$ 16) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

Soluzioni

1. $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x$. Risulta $I = 0$. Infatti se $f(x)$ è una funzione dispari e per ogni $a \in (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} I_a &= \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx \\ &= \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx \end{aligned}$$

Nel secondo integrale eseguiamo il cambio di variabile $x \to x' = -x$, per cui:

$$0 \leq x = -x' \leq a \Longrightarrow 0 \geq x' \geq -a$$

cioè:

$$\begin{aligned} I_a &= \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx - \int\limits_{0}^{-a} f(x')\, dx' \\ &= \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{-a}^{0} f(x')\, dx' = 0 \end{aligned}$$

2. $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cot^4 x dx = \left[-\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$.

3. $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = F(1) - F(0)$, essendo:

$$F(x) = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \to y = e^x$:

$$F(y) = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y + C$$

Cioè:

$$F(x) = \arctan(e^x) + C,$$

donde:

$$I = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

Capitolo 5

Estensione del concetto di integrale

5.1 Introduzione

Nel capitolo 1 abbiamo introdotto la nozione di integrale definito di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Ci si può chiedere se tale nozione possa essere estesa al caso di una funzione che abbia punti di discontinuità e/o che sia definita in un intervallo illimitato. Sotto opportune ipotesi, la risposta è affermativa. Per rendere operativa tale estensione della nozione di integrale, ricordiamo la seguente

Definizione. Una funzione reale di variabile reale $f(x)$ definita in un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice ***generalmente continua***, se l'insieme dei suoi punti di discontinuità è al più numerabile.

Senza perdita di generalità, supponiamo che $f(x)$ generalmente continua sia non negativa nell'intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$. È facile rendersi conto che è comunque possibile costruire una successione finita di intervalli:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n]$$

tali che:

$$\begin{aligned} [a_k, b_k] \subset A, \ \text{ con } \ k = 1, 2, ..., n \\ [a_k, b_k] \cap [a_{k'}, b_{k'}] = \emptyset, \forall k \neq k' \\ \forall k, \ \ f(x) \ \text{ è continua in } \ [a_k, b_k] \end{aligned}$$

Si osservi che tale proprietà continua a valere anche se A è illimitato. Ad esempio se $A = [a, +\infty)$, fissiamo $A' = [a, b] \subset A$ e ripetiamo il procedimento per l'intervallo A'.
Poniamo per definizione:

$$D \stackrel{def}{=} \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k] \tag{5.1}$$

Chiamiamo l'insieme (5.1) **dominio limitato e misurabile di continuità per** $f(x)$.

Osservazione. Assegnato l'intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, esistono infiniti domini (5.1).

Esempio 20. Consideriamo la seguente funzione non negativa in $A = [0, 3]$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} + (x-2)^2 \quad \text{se } x \in [0, 1) \\ f(x) &= -x^2 + 4x \quad \text{se } x \in [1, 3] \end{aligned} \tag{5.2}$$

L'insieme delle discontinuità di $f(x)$ è:

$$S = \{\xi_0 = 0, \xi_1 = 1\},$$

donde $f(x)$ è generalmente continua. Costruiamo gli intervalli:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2]$$

essendo $a_1 = 0.2$, $b_1 = 0.8$, $a_2 = 1.2$, $b_2 = 3$ (figura 5.1).

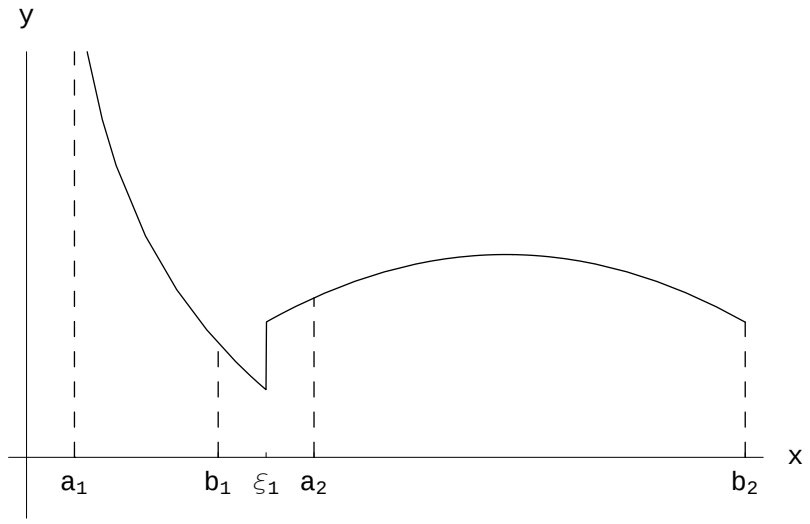


Figura 5.1: Grafico della funzione (5.2)

Si conclude che un dominio limitato di continuità per $f(x)$ è $D = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]$.

***

Costruiamo quindi la famiglia:

$$\mathcal{F} = \{D \mid D \text{ è un dominio limitato e mis di continuità per } f(x)\}$$

Ciò posto, indichiamo con il simbolo:

$$\int_X f(x)\, dx$$

l'integrale di $f(x)$ esteso ad un intervallo chiuso e limitato X in cui $f(x)$ è continua. Evidentemente:

$$\forall D \in \mathcal{F}, \quad \int_D f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} f(x)\, dx \geq 0,$$

poiché è $f(x) \geq 0$ per ipotesi. Inoltre:

$$\forall D \in \mathcal{F}, \quad \int_D f(x)\, dx = \lambda \in \Lambda \subseteq [0, +\infty),$$

Definizione. Si chiama **integrale della funzione generalmente continua** $f(x) \geq 0$ **esteso all'intervallo** A, l'estremo superiore dell'insieme Λ:

$$\int_A f(x)\,dx = \sup \Lambda \leq +\infty \tag{5.3}$$

5.2 Rettangoloide generalizzato

La definizione (5.3) non si presta ad un calcolo diretto dell'integrale di una funzione generalmente continua esteso ad un intervallo limitato o illimitato. Ciò può essere realizzato attraverso un'operazione di passaggio al limite. Iniziamo con l'osservare che:

$$D \in \mathcal{F} \Longrightarrow \exists D' \in \mathcal{F} \mid D' \supseteq D,$$

per cui possiamo costruire una successione di domini:

$$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \ D_1 \subseteq D_2 \subseteq ...D_n \subseteq ... \tag{5.4}$$

Inoltre:

$$\forall D \in \mathcal{F}, D \subseteq A - S$$

essendo S l'insieme (numerabile) dei punti di discontinuità di $f(x)$.

Definizione. Al crescere indefinito di n, la successione (5.4) tende all'insieme $A - S$ se risulta:

$$\forall D \subseteq A - S,\ \exists D_\nu \mid D_\nu \supseteq D$$

Esprimiamo ciò scrivendo:

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = A - S$$

Teorema 21. Nelle ipotesi poste:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} f(x)\,dx = \sup \Lambda = \int_A f(x)\,dx$$

Dimostrazione. Omessa. □

Questo teorema ci dice che nelle ipotesi poste:

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{D_n} f(x)\,dx \tag{5.5}$$

Diamo ora un'interpretazione geometrica alla (5.5). A tale scopo consideriamo il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$U \stackrel{def}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A - S,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

Tale insieme di punti si chiama **rettangoloide generalizzato di base** $A - S$, **relativo a** $f(x)$.
Si osservi che U è illimitato in uno dei seguenti casi: 1) A è limitato e $f(x)$ non limitata (cioè dotata di singolarità); 2) A illimitato e $f(x)$ limitata (dotata al più di punti di discontinuità eliminabili o di prima specie); 3) A e $f(x)$ non limitati.
Ciò premesso, sussiste il

Teorema 22. Nelle ipotesi poste:

$$misU = \int_A f(x)\,dx$$

Dimostrazione. Omessa. □

Osserviamo che la misura di U può essere finita anche se U è illimitato, come nel caso della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ con } x \in A = [-1, 1]$$

Tale funzione è generalmente continua in A:

$$S = \{-1, 1\} \Longrightarrow A - S = (-1, 1)$$

Più precisamente:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$

Il rettangoloide generalizzato è:

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

Costruiamo la successione $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$D_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$$

come mostrato in figura 5.2.

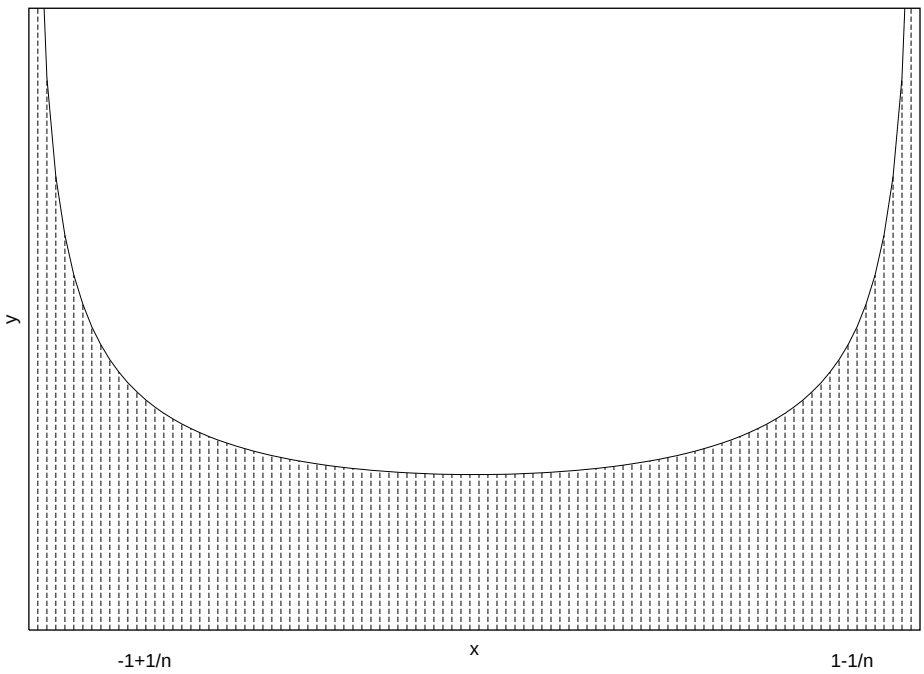


Figura 5.2: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Quindi:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left[\arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) - \arcsin\left(-1+\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi,\end{aligned}$$

donde:

$$misU = \pi$$

Un esempio di insieme illimitato di misura infinita è dato dal rettangoloide generalizzato relativo alla seguente funzione:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \qquad \text{con } x \in A = [0,1]$$

$f(x)$ è non negativa, inoltre:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,$$

donde:

$$A - S = (0,1]$$

Costruiamo la successione di domini:

$$D_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right],$$

come mostrato in figura 5.3.

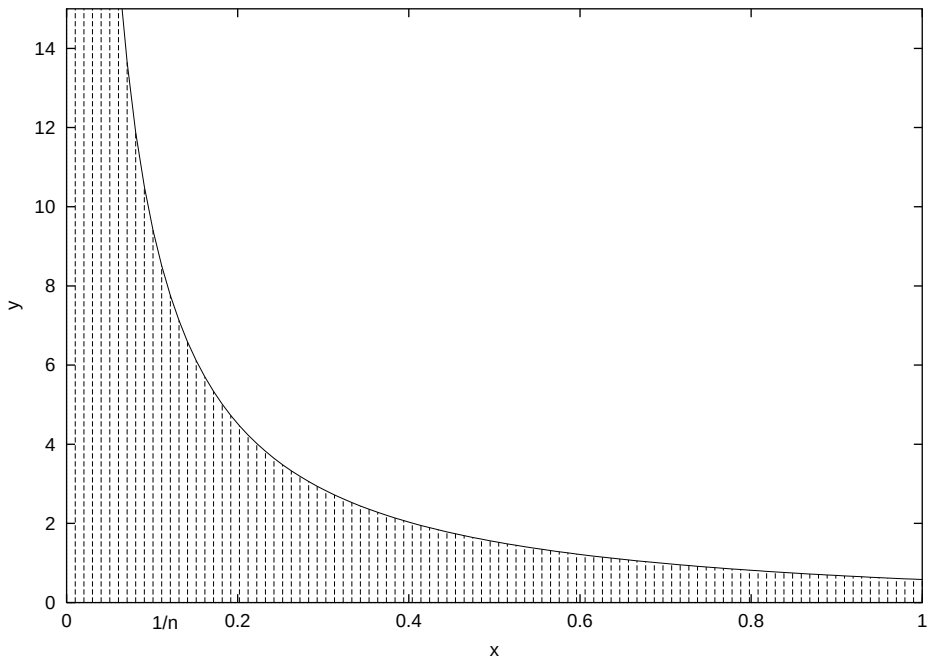


Figura 5.3: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$.

Evidentemente:

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = (0,1]$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1} &= \lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^1 \frac{dx}{e^x-1}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left|1-e^{-x}\right|\right]_{1/n}^1\\ &= \ln\left|1-e^{-1}\right| - \ln 0^+\\ &= +\infty,\end{aligned}$$

donde:

$$misU = +\infty$$

Riportiamo di seguito un esempio di integrale di una funzione continua esteso ad un intervallo illimitato.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{per} \quad x \in A = (-\infty, +\infty) \tag{5.6}$$

La funzione (5.6) è manifestamente continua ed infinitesima all'infinito:

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0^+$$

Costruiamo la successione (5.4) assumendo:

$$D_n = [-n, n]$$

come mostrato in fig. 5.2.

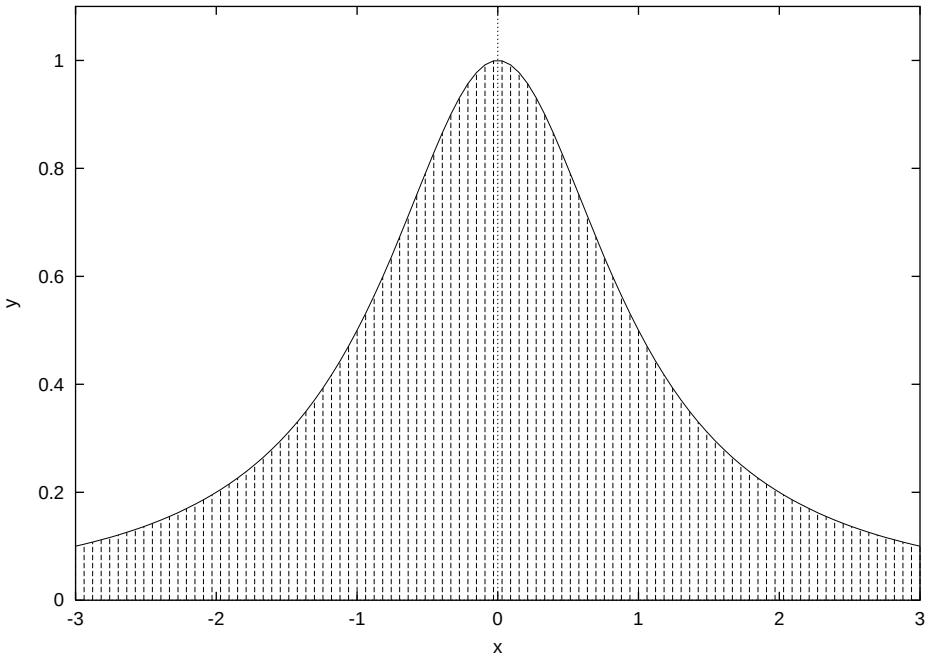


Figura 5.4: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

donde:

$$
\begin{aligned}
\int_A \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\arctan(n) - \arctan(-n)\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi
\end{aligned}
$$

Quindi anche in questo caso abbiamo un insieme illimitato di misura finita:

$$
\begin{aligned}
U &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty,\ \ 0 \le y \le f(x)\right\} \\
misU &= \pi
\end{aligned}
$$

***

Calcoliamo l'integrale:

$$
I = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)\, dx,
$$

essendo:

$$
f(x) = \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} \tag{5.7}
$$

Qui è $A = [x_0 - h, x_0 + h]$, essendo per ipotesi $x_0 \in \mathbb{R}$, e $h, \alpha > 0$. L'integrando ha una singolarità in x_0:

$$
\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} = +\infty,
$$

donde $A - S = A - \{x_0\}$.
Costruiamo la successione (5.4) assumendo:

$$
D_n = \left[x_0 - h, x_0 - \frac{1}{n}\right] \cup \left[x_0 + \frac{1}{n}, x_0 + h\right]
$$

come mostrato in fig. 5.5.
Quindi:

$$
I = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{x_0-h}^{x_0-\frac{1}{n}} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha} + \int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha} \right) \tag{5.8}
$$

Poniamo:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{x_0-h}^{x_0-\frac{1}{n}} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha} \\
I_2 &= \int_{x_0+\frac{1}{n}}^{x_0+h} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha}
\end{aligned}
$$

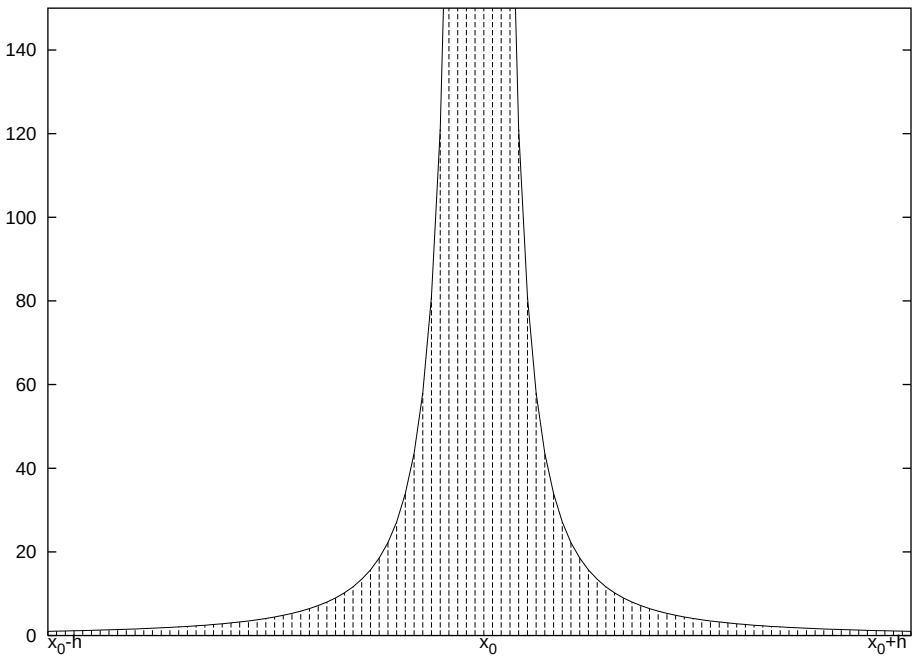


Figura 5.5: Grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$.

Eseguendo il cambio di variabile $x \to \xi = x - x_0$:

$$I_1 = -\int_{-h}^{-\frac{1}{n}} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$

$$I_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{h} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$

In virtù della simmetria di $\Gamma) y = f(\xi)$ rispetto all'asse delle ordinate: $I_1 = I_2$, per cui:

$$I = 2 \lim_{n \to +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{h} \frac{d\xi}{\xi^\alpha}$$

Se $\alpha \neq 1$:

$$I = \frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{1}{h^{\alpha-1}} - 0\right) = \frac{2h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \text{se } \alpha \in (0,1)$$

$$I = -\frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{1}{h^{\alpha-1}} + (+\infty)\right) = +\infty, \quad \text{se } \alpha \in (1,+\infty)$$

Se $\alpha = 1$

$$I = 2 \lim_{n \to +\infty} \ln(nh) = +\infty$$

Cioè:

$$I = \begin{cases} \frac{2h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{se } \alpha \in (0,1) \\ +\infty, & \text{se } \alpha \in [1,+\infty) \end{cases}$$

In fig. 5.6 sono riportati i grafici della funzione (5.7) per $x_0 = 5$, $h = 2$, nei due casi: $a = 0.4, 2$.

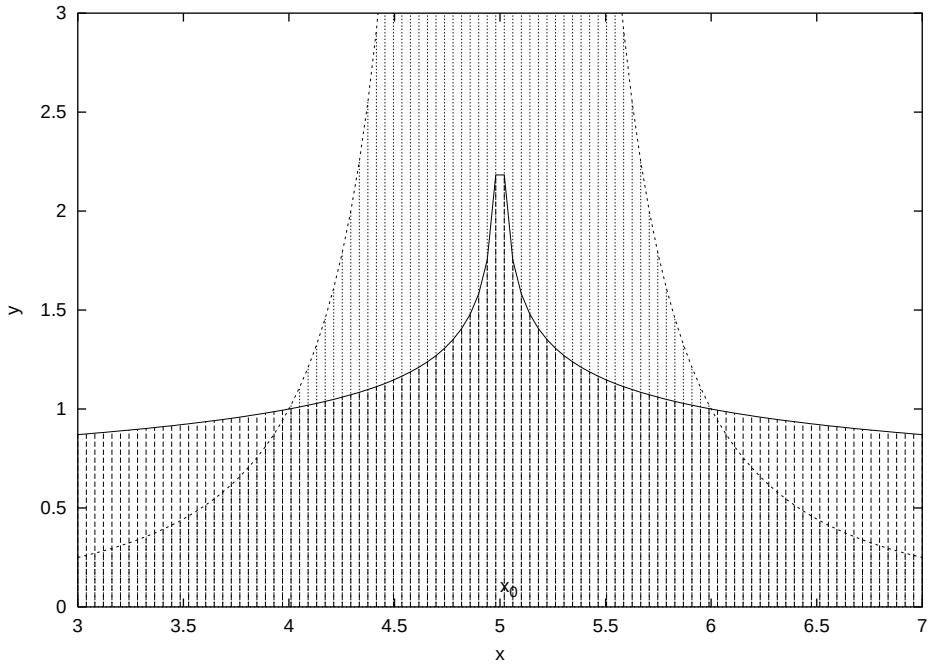


Figura 5.6: Grafico della funzione (5.7).

Per quanto visto l'integrale (5.8) converge solo per $\alpha \in (0, 1)$:

$$\lim_{\alpha \to 1^-} I(\alpha) = +\infty$$

In fig. 5.7 è riportato l'andamento di I in funzione del parametro α.

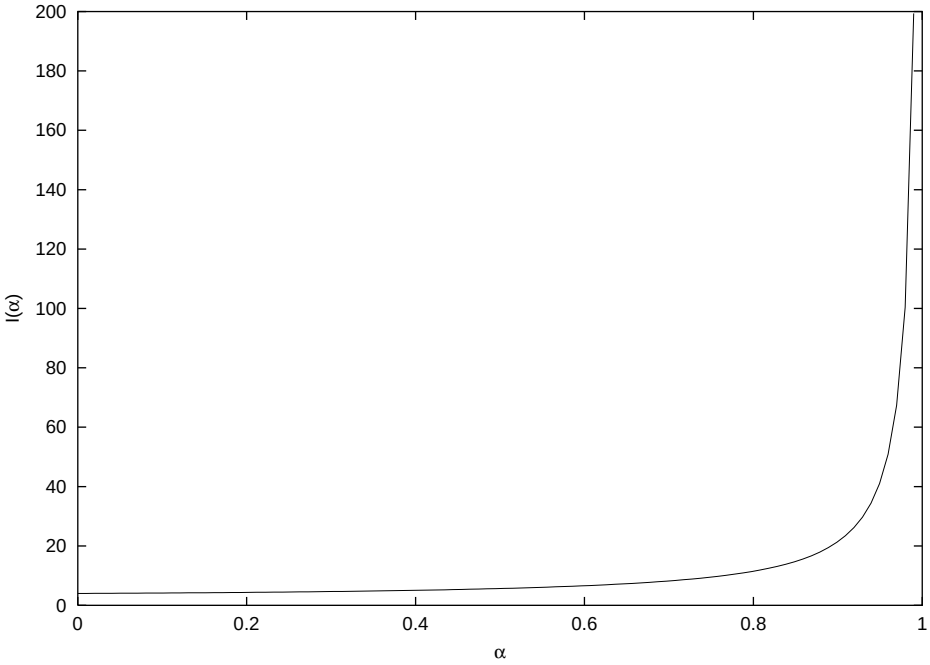


Figura 5.7: Andamento dell'integrale I in funzione di α.

***

Calcoliamo gli integrali:

$$I = \int_{x_0+h}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{5.9}$$
$$J = \int_{-\infty}^{x_0-h} g(x)\,dx,$$

essendo

$$f(x) = \frac{1}{(x-x_0)^{\alpha}} \tag{5.10}$$
$$g(x) = \frac{1}{(x_0-x)^{\alpha}}$$

Nella (5.10) x_0 è un punto arbitrario dell'asse x, mentre α, h parametri positivi. Il grafico è riportato in fig. (5.8).

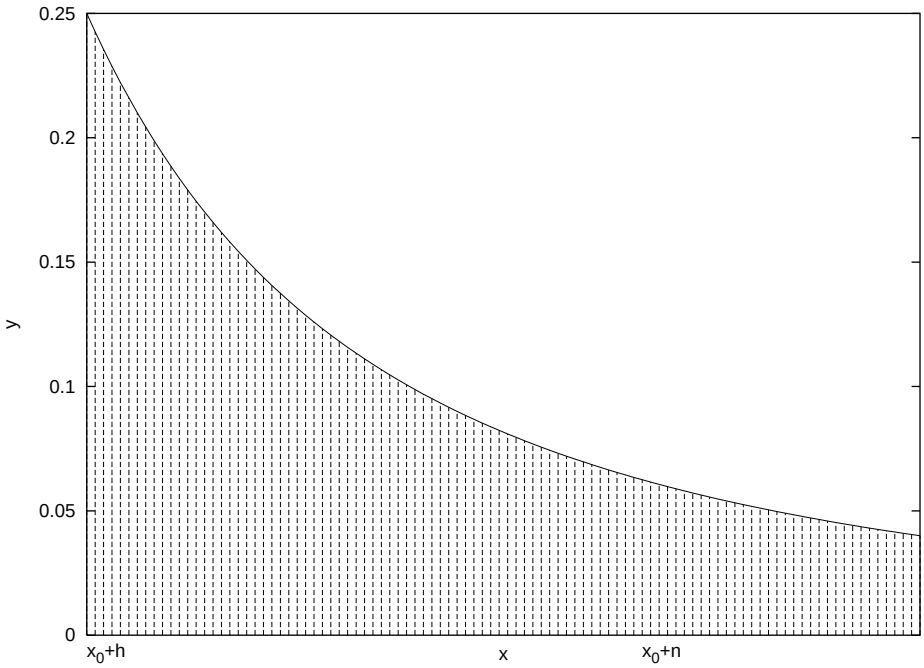


Figura 5.8: Grafico della funzione (5.10).

Costruiamo i domini D_n:

$$D_n = [x_0 + h, x_0 + n]$$

Quindi:

$$I = \lim_{n\to+\infty} I_n,$$

essendo:

$$I_n = \int_{x_0+h}^{x_0+n} \frac{dx}{(x-x_0)^{\alpha}}$$

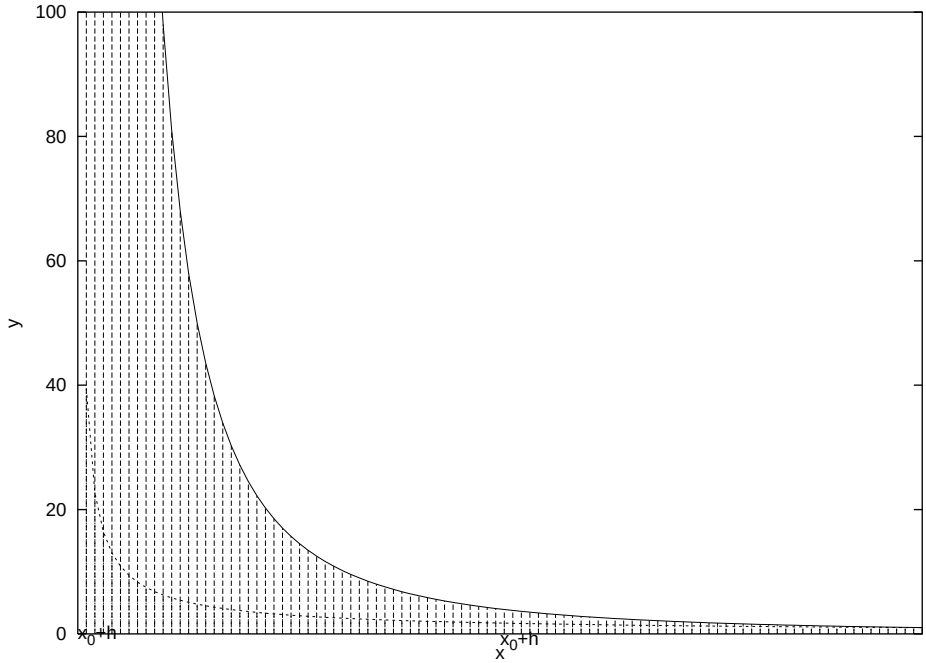
Risulta:

$$I_n = \frac{n^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \text{se } \alpha \neq 1$$
$$I_n = \ln \frac{n}{h}, \quad \text{se } \alpha = 1$$

Quindi:

$$I\left(\alpha \neq 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1-\alpha} - h^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{h^{1-\alpha}}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$
$$I\left(\alpha = 1\right) = \lim_{n \to +\infty} \ln \frac{n}{h} = +\infty$$

Si conclude che l'integrale converge solo per $\alpha > 1$.



L'integrale J (secondo degli integrali (5.9)) assume lo stesso valore di I, in virtù della simmetria dell'integrando. Infatti possiamo scrivere:

$$I = \int_{x_0+h}^{+\infty} f\left(x\right) dx$$
$$J = \int_{-\infty}^{x_0-h} f\left(x\right) dx,$$

avendo ridefinito la funzione integranda:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\left|x - x_0\right|^{\alpha}}$$

Tale funzione è manifestamente simmetrica rispetto alla retta $x - x_0 = 0$, per cui:

$$I = \int_{h}^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha}}$$

$$J = -\int_{-\infty}^{-h} \frac{d\xi}{\xi^{\alpha}}$$

$$***$$

Calcoliamo l'integrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$$

Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|} dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-|x|} dx \\ &\stackrel{def}{=} I_1 + I_2, \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx \\ I_2 &= \int_{0}^{+\infty} e^{-|x|} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Eseguiamo in I_2 il cambio di variabile: $x \to x' = -x$. Osserviamo che:

$$0 \leq x = -x' \leq +\infty,$$

per cui:

$$0 \geq x' \geq -\infty$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_{0}^{-\infty} e^{x'} dx' \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x'} dx' = I_1, \end{aligned}$$

donde:

$$I = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx$$

Assumendo:

$$D_n = [0, n]\,,$$

si ha:

$$\begin{aligned} I &= 2 \lim_{n \to +\infty} \int_0^n e^{-x} dx \\ &= -2 \lim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-n}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

che è la misura del rettangoloide generalizzato:

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < +\infty,\ \ 0 \leq y \leq e^{-|x|}\right\},$$

come riportato in figura (5.9).

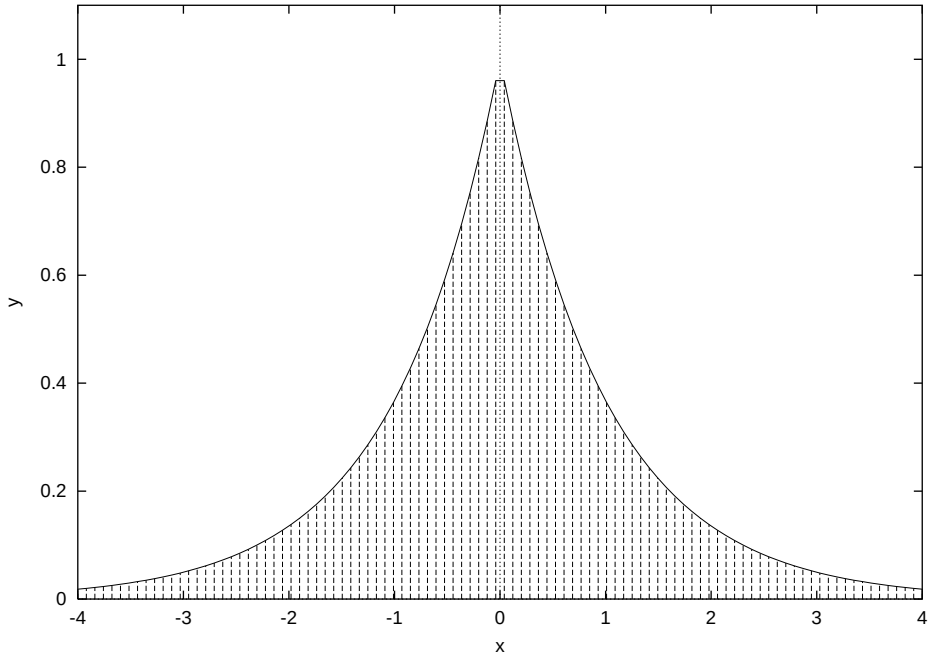


Figura 5.9: Grafico di $f(x) = e^{-|x|}$.

Appendice A

Integrali notevoli

A.1 $\int \sin^2 x dx, \int \cos^2 x dx$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right) + C = \frac{1}{4}\left(2x - \sin 2x\right) + C \tag{A.1}$$
$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x + \sin x \cos x\right) + C = \frac{1}{4}\left(2x + \sin 2x\right) + C$$

A.2 $\int \frac{dx}{\left(x^2-1\right)^n}$

1. $\int \frac{dx}{x^2-1} = -\operatorname{arctanh} x + \text{const}$

2. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{x}{2(1-x^2)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \text{const}$

3. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^3} = \frac{x\left(3x^2-5\right)}{8(x^2-1)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \text{const}$

4. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^4} = -\frac{1}{48(-1+x)^3} + \frac{1}{16(-1+x)^2} - \frac{5}{32(-1+x)} - \frac{5}{32}\ln(-1+x) - \frac{1}{48(1+x)^3} - \frac{1}{16(1+x)^2} - \frac{5}{32(1+x)} + \frac{5}{32}\ln(1+x)$

5. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^5} = -\frac{1}{128(-1+x)^4} + \frac{5}{192(-1+x)^3} - \frac{15}{256(-1+x)^2} + \frac{35}{256(-1+x)} + \frac{35}{256}\ln(-1+x) + \frac{1}{128(1+x)^4} + \frac{5}{192(1+x)^3} + \frac{15}{256(1+x)^2} + \frac{35}{256(1+x)} - \frac{35}{256}\ln(1+x)$

6. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^6} = -\frac{1}{320(-1+x)^5} + \frac{3}{256(-1+x)^4} - \frac{7}{256(-1+x)^3} + \frac{7}{128(-1+x)^2} - \frac{63}{512(-1+x)} - \frac{63}{512}\ln(-1+x) - \frac{1}{320(1+x)^5} - \frac{3}{256(1+x)^4} - \frac{7}{256(1+x)^3} - \frac{7}{128(1+x)^2} - \frac{63}{512(1+x)} + \frac{63}{512}\ln(1+x)$

7. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^7} = -\frac{1}{768(-1+x)^6} + \frac{7}{1280(-1+x)^5} - \frac{7}{512(-1+x)^4} + \frac{7}{256(-1+x)^3} - \frac{105}{2048(-1+x)^2} + \frac{231}{2048(-1+x)} + \frac{231}{2048}\ln(-1+x) + \frac{1}{768(1+x)^6} + \frac{7}{1280(1+x)^5} + \frac{7}{512(1+x)^4} + \frac{7}{256(1+x)^3} + \frac{105}{2048(1+x)^2} + \frac{231}{2048(1+x)} - \frac{231}{2048}\ln(1+x)$

8. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^8} = -\frac{1}{1792(-1+x)^7} + \frac{1}{384(-1+x)^6} - \frac{9}{1280(-1+x)^5} + \frac{15}{1024(-1+x)^4} - \frac{55}{2048(-1+x)^3} + \frac{99}{2048(-1+x)^2} - \frac{429}{4096(-1+x)} - \frac{429}{4096}\ln(-1+x) - \frac{1}{1792(1+x)^7} - \frac{1}{384(1+x)^6} - \frac{9}{1280(1+x)^5} - \frac{15}{1024(1+x)^4} - \frac{55}{2048(1+x)^3} - \frac{99}{2048(1+x)^2} - \frac{429}{4096(1+x)} + \frac{429}{4096}\ln(1+x)$

A.3 $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + \text{const}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + \text{const}$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\arctan x$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{1}{6}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{5}{24}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{5}{16}\frac{x}{x^2+1} + \frac{5}{16}\arctan x + \text{const}$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^5} = \frac{1}{8}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{7}{48}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{35}{192}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{35}{128}\frac{x}{x^2+1} + \frac{35}{128}\arctan x + \text{const}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^6} = \frac{1}{10}\frac{x}{(x^2+1)^5} + \frac{9}{80}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{21}{160}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{21}{128}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{63}{256}\frac{x}{x^2+1} + \frac{63}{256}\arctan x + \text{const}$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^7} = \frac{1}{12}\frac{x}{(x^2+1)^6} + \frac{11}{120}\frac{x}{(x^2+1)^5} + \frac{33}{320}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{77}{640}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{77}{512}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{231}{1024}\frac{x}{x^2+1} + \frac{231}{1024}\arctan x$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^8} = \frac{1}{14}\frac{x}{(x^2+1)^7} + \frac{13}{168}\frac{x}{(x^2+1)^6} + \frac{143}{1680}\frac{x}{(x^2+1)^5} + \frac{429}{4480}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{143}{1280}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{143}{1024}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{429}{2048}\frac{x}{x^2+1} + \frac{429}{2048}\arctan x$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^9} = \frac{1}{16}\frac{x}{(x^2+1)^8} + \frac{15}{224}\frac{x}{(x^2+1)^7} + \frac{65}{896}\frac{x}{(x^2+1)^6} + \frac{143}{1792}\frac{x}{(x^2+1)^5} + \frac{1287}{14\,336}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{429}{4096}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{2145}{16\,384}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{6435}{32\,768}\frac{x}{x^2+1} + \frac{6435}{32\,768}\arctan x$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{10}} = \frac{1}{18}\frac{x}{(x^2+1)^9} + \frac{17}{288}\frac{x}{(x^2+1)^8} + \frac{85}{1344}\frac{x}{(x^2+1)^7} + \frac{1105}{16\,128}\frac{x}{(x^2+1)^6} + \frac{2431}{32\,256}\frac{x}{(x^2+1)^5} + \frac{2431}{28\,672}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{2431}{24\,576}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{12\,155}{98\,304}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{12\,155}{65\,536}\frac{x}{x^2+1} + \frac{12\,155}{65\,536}\arctan x$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^{11}} = \frac{1}{20}\frac{x}{(x^2+1)^{10}} + \frac{19}{360}\frac{x}{(x^2+1)^9} + \frac{323}{5760}\frac{x}{(x^2+1)^8} + \frac{323}{5376}\frac{x}{(x^2+1)^7} + \frac{4199}{64\,512}\frac{x}{(x^2+1)^6} + \frac{46\,189}{645\,120}\frac{x}{(x^2+1)^5} + \frac{46\,189}{573\,440}\frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{46\,189}{491\,520}\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{46\,189}{393\,216}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{46\,189}{262\,144}\frac{x}{x^2+1} + \frac{46\,189}{262\,144}\arctan x$

A.4 $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x)^n}; \int \frac{dx}{(\cos x)^n}$

Applicando le (3.101)-(3.102) per valori crescenti di $n = 3, 4, 5$:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right] + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right] + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\left[2\cot x + \frac{\cos x}{\sin^3 x}\right] + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\left[\tan x + \frac{\sin x}{\cos^3 x}\right] + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\left(\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) - \frac{\cos x}{\sin^4 x}\right] + C$$
$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\left(\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) + \frac{\sin x}{\cos^4 x}\right] + C$$

A.5 $\int (\tan x)^n\, dx; \int (\cot x)^n\, dx$

Applicando le (3.105)-(3.106) per $n = 2, 3, ..., 8$:

$$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C$$
$$\int \cot^2 x dx = -\cot x - x + C$$
$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right) + C$$
$$\int \cot^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cot^2 x\right)$$
$$\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$
$$\int \cot^4 x dx = -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$
$$\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right) + C$$
$$\int \cot^5 x dx = -\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\cot^2 x\right) + C$$
$$\int \tan^6 x dx = \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x - x + C$$
$$\int \cot^6 x dx = -\frac{1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x + C$$
$$\int \tan^7 x dx = \frac{1}{6}\tan^6 x - \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 x\right) + C$$
$$\int \cot^7 x dx = -\frac{1}{6}\cot^6 x + \frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{2}\cot^2 x + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cot^2 x\right) + C$$
$$\int \tan^8 x dx = \frac{1}{7}\tan^7 x - \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$
$$\int \cot^8 x dx = -\frac{1}{7}\cot^7 x + \frac{1}{5}\cot^5 x - \frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$