

DISCUSSIONE CON MARCELLO COLOZZO

–S. Pioch–

sebastien.pioch@univ-tln.fr

mer. 12 feb. '20 $\longrightarrow$ lun. 17 feb. '20

Torno sull'esercizio "Analisi spettrale dell'energia dissipata per effetto Joule" perché ho alcuni commenti e proposte.

Il segnale studiato $v(t) = 220 \cos(50t)$ fa molto pensare a quello che possiamo trovare a casa nostra, cioè quello che abbiamo nelle prese di corrente. L'ampiezza è la tensione efficace 220 V, alla quale corrisponde la tensione massima $220\sqrt{2}$ V. Ma in questo studio la pulsazione vale $50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, non è la frequenza 50 Hz conosciuta da tutti.

Quindi, propongo di studiare il segnale $v(t) = a \cos(\omega_1 t)$ con $a = 220 \text{ V}$, $\omega_1 = 2\pi f_1$ e $f_1 = 50 \text{ Hz}$, osservato su una durata limitata, e di determinare l'energia di questo segnale.

Il segnale $v(t)$ da una durata limitata può costruirsi col prodotto tra un segnale sinusoidale $x(t)$ (esistendo per un tempo infinito) e una funzione chiamata "porta", notata Π , centrata in $t = 0$, di larghezza Δ (tempo di osservazione) e di ampiezza 1, tale :

$$v(t) = x(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right), \quad x(t) = a \cos(2\pi f_1 t) \quad (1)$$

La figura 1 rappresenta i segnali v , x e Π in blue, nero e rosa rispettivamente. Il tempo di osservazione è fissato a $\Delta = 11/(2f_1) = 0,11 \text{ s}$.

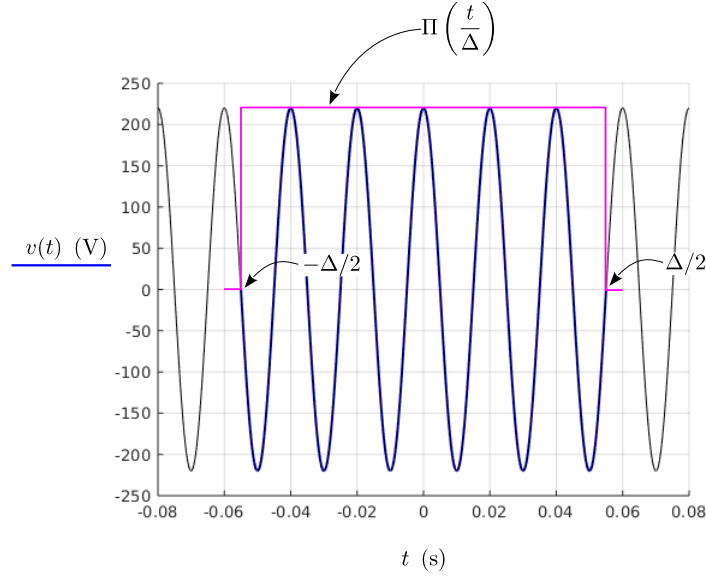


Figura 1: Rappresentazione del segnale $v(t)$ durante un tempo limitato ($\Delta/2 = 11/(2f_1)$).

Ora, per passare nel dominio frequenziale facciamo una trasformata di Fourier dell'espressione (1) :

$$\begin{aligned} V(f) = \mathcal{F}[v(t)] &= \mathcal{F}\left[x(t) \cdot \Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right] \\ &= \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right] \end{aligned} \quad (2)$$

dove “*” è il prodotto di convoluzione. La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \mathcal{F}[a \cos(\omega_1 t)] \\ &= \frac{a}{2} (\delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1)) \\ \Rightarrow \mathcal{F}[x(t)] &= \frac{a}{2} (\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)) \end{aligned} \quad (3)$$

e è riportata in nero nella figura 2.

Adesso, calcoliamo la trasformata di Fourier della porta Π :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right] &= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \\ &= \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega\Delta/2} - e^{-i\omega\Delta/2}) \\ &= \frac{1}{i\omega} 2i \sin(\omega\Delta/2) \frac{\Delta/2}{\Delta/2} \\ \Rightarrow \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right] &= \Delta \operatorname{sinc}(\pi\Delta f), \quad \operatorname{sinc}(\pi\Delta f) = \frac{\sin(\pi\Delta f)}{\pi\Delta f} \quad \omega = 2\pi f \end{aligned} \quad (4)$$

quale appare in rosa nella figura 2.

Sostituendo (3) e (4) nell'espressione (2), lo spettro $V(f)$ ha l'espressione :

$$V(f) = \frac{a\Delta}{2} (\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)) * \text{sinc}(\pi\Delta f)$$

$$\Rightarrow V(f) = \frac{a\Delta}{2} (\text{sinc}(\pi\Delta [f - f_1]) + \text{sinc}(\pi\Delta [f + f_1])), \quad f \in \mathbb{R} \quad (5)$$

e è rappresentato in blu nella figura 2.

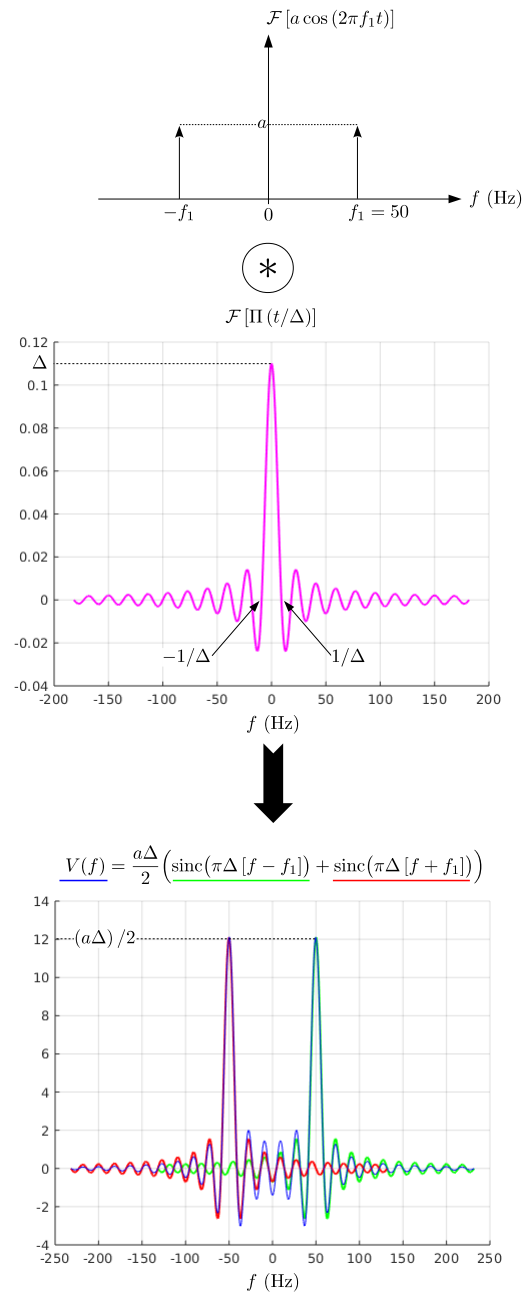


Figura 2: Spettri frequenziali dei segnali temporali x (nero), porta (rosa) e v (blue).

L'energia E dissipata a traverso una resistenza $R = 50 \, \Omega$ (valore molto usata nei materiali di misure elettronica), sulle tutte le frequenze, è dunque :

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V^2(f)}{R} \, df \\ &= \left(\frac{a\Delta}{2} \right)^2 \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\text{sinc}(\pi\Delta[f - f_1]) + \text{sinc}(\pi\Delta[f + f_1]) \right)^2 \, df \\ &= \left(\frac{a\Delta}{2} \right)^2 \frac{1}{R} \left(I_{f_1} + I_{f_1^-} + I_{f_1;f_1^-} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

con

$$I_{f_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(\pi\Delta[f - f_1]) \, df \quad (7)$$

$$I_{f_1^-} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(\pi\Delta[f + f_1]) \, df \quad (8)$$

$$I_{f_1;f_1^-} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \text{sinc}(\pi\Delta[f - f_1]) \text{sinc}(\pi\Delta[f + f_1]) \, df \quad (9)$$

Cominciamoci da calcolare I_{f_1} col cambiamento della variabile $x = \pi\Delta(f - f_1) \implies dx = \pi\Delta \, df$:

$$\begin{aligned} I_{f_1} &= \frac{1}{\pi\Delta} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2 x \, dx}_{=1} \\ &\implies \boxed{I_{f_1} = \frac{1}{\Delta}} \end{aligned} \quad (10)$$

Con un ragionamento identico viene per $I_{f_1^-}$:

$$\boxed{I_{f_1^-} = \frac{1}{\Delta}} \quad (11)$$

Poi sostituendo (10) et (11) in (6), l'espressione dell'energie E è :

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{a\Delta}{2} \right)^2 \frac{1}{R} \left(\frac{2}{\Delta} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \text{sinc}(\pi\Delta[f - f_1]) \text{sinc}(\pi\Delta[f + f_1]) \, df \right) \\ &\implies E = \frac{(a\Delta)^2}{2R} \left(\frac{1}{\Delta} + \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi\Delta[f - f_1]) \text{sinc}(\pi\Delta[f + f_1]) \, df \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Ormai, sappiamo che la potenza istantanea $p(t)$ ai capi di R , colla tensione $v(t)$, è :

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{R} v^2(t) \\ &= \frac{a^2}{R} \cos^2(\omega_1 t) \\ &= \frac{a^2}{R} \left(\frac{1 + \cos(2\omega_1 t)}{2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Per la media della potenza $p(t)$ nel dominio $t \in [-\Delta/2, \Delta/2]$ abbiamo (lasciando la costante $a^2/(2R)$) :

$$\begin{aligned} \langle p(t) \rangle &\propto \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (1 + \cos(2\omega_1 t)) dt \\ &\propto \frac{1}{\Delta} \left(\Delta + \frac{1}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t) \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \right) \\ &\propto 1 + \frac{1}{\Delta\omega_1} \sin(\omega_1 \Delta) \end{aligned} \quad (14)$$

e come :

$$\omega_1 \Delta = 2\pi f_1 \frac{11}{2f_1} = 11\pi \implies \sin(\omega_1 \Delta) = 0 \quad (15)$$

viene finalmente :

$$\langle p(t) \rangle = \frac{a^2}{2R} \quad (16)$$

e l'energia è :

$$E = \langle p(t) \rangle \Delta = \frac{a^2}{2R} \Delta \quad (17)$$

Eguagliando le espressioni delle due energie, abbiamo :

$$\frac{a^2 \Delta^2}{2R} \left(\frac{1}{\Delta} + \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \Delta [f - f_1]) \text{sinc}(\pi \Delta [f + f_1]) df \right) = \frac{a^2 \Delta}{2R} \quad (18)$$

ossia :

$$1 + \Delta \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \Delta [f - f_1]) \text{sinc}(\pi \Delta [f + f_1]) df = 1 \quad (19)$$

quindi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\pi \Delta [f - f_1]) \text{sinc}(\pi \Delta [f + f_1]) df = 0 \quad (20)$$

OSSERVAZIONE. — A la fine del tuo documento sei arrivato a questo risultato :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \left[\frac{11\pi}{100} (\omega - 50) \right]}{(\omega - 50)} \right)^2 d\omega = \frac{11\pi^2}{20} \approx 5,42828$$

Se si introduce la costante $\left(\frac{11\pi}{100} \right)^2$, l'integrale di su è uguale a quella di sopra :

$$\left(\frac{11\pi}{100} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin \left[\frac{11\pi}{100} (\omega - 50) \right]}{\left(\frac{11\pi}{100} \right) (\omega - 50)} \right)^2 d\omega$$

poi col cambiamento della variabile $x = (11\pi/100)(\omega-50) \implies dx = (11\pi/100)d\omega$,
viene :

$$\left(\frac{11\pi}{100}\right)^2 \frac{100}{11\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(x) \, dx}_{\neq} \implies \frac{11\pi^2}{100} \approx 1,085656484$$

Se vai sul sito “WolframAlpha”, e che entri esattamente tua espressione, lui ti da :
1,08566. Ossia una valore uguale della mia, è differente della tua. Quindi, dove è
il “problema” ?