Doppio piano inclinato

Marcello Colozzo http://extrabyte.infohttp://extrabyte.info

Esercizio 1 *(Esercizio tratto da [1]. La soluzione è nostra).*

Un blocco A di massa m_1 posto su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo θ_1 rispetto al piano orizzontale è collegato ad un filo che passa sopra una puleggia ideale a un blocco B di massa m_2, posto su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo θ_2 rispetto al piano orizzontale, come in Figura 1.

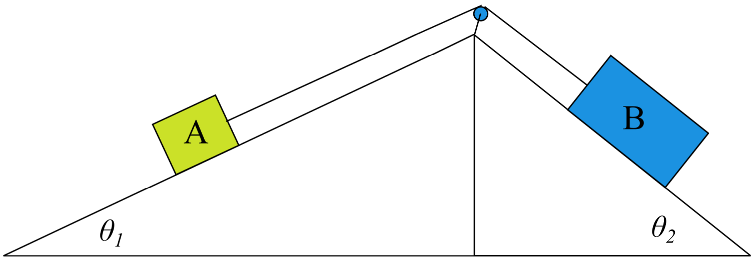

Figura 1: Esercizio 1.

(a) Dimostrare che l'accelerazione di ciascun blocco è data da

$$a = \frac{m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1}{m_1 + m_2} g \tag{1}$$

e che la tensione del filo è

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\sin\theta_1 + \sin\theta_2) g \tag{2}$$

(b) Calcolare accelerazione e tensione per $m_1 = 3.70\,\text{kg}$ ed $m_2 = 4.86\,\text{kg}$, essendo $\theta_1 = 28°$ e $\theta_2 = 42°$. In quale direzione si muove m_1 lungo il piano inclinato? (c) Per gli stessi valori di m_1 e degli angoli θ, determinare i valori di m_2 per i quali m_1 accelera in salita, accelera in discesa, non accelera.

Soluzione

Quesito (a)

Senza perdita di generalità, supponiamo $m_2 > m_1$. Non dobbiamo fare altro che applicare il secondo principio della dinamica al singolo blocco. Iniziamo con A; il diagramma delle forze agenti è illustrato in fig. 2 ove abbiamo orientato una coppia di assi cartesiani (x, y).

Per il predetto principio:

$$\mathbf{R}_{N_1} + \mathbf{T} + m_1\mathbf{g} = m_1\mathbf{a} \tag{3}$$

dove $\mathbf{R}_{N_1}$ e $\mathbf{T}$ sono rispettivamente la reazione normale del vincolo e la tensione del filo (supponiamo che quest'ultimo sia inestensibile e di massa trascurabile). Proiettando la (3) sugli assi coordinati (x, y)

$$\begin{cases} T - m_1 g \sin\theta_1 = m_1 a \\ R_{N_1} - m_1 g \cos\theta_1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

A noi interessa la prima:

$$T = m_1 a + m_1 g \sin\theta_1 \tag{5}$$

Passiamo al blocco B. Qui adottiamo un sistema di assi coordinati (ξ, η) come in fig. 3.

Con ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{R}_{N_2} + \mathbf{T} + m_2\mathbf{g} = m_2\mathbf{a} \tag{6}$$

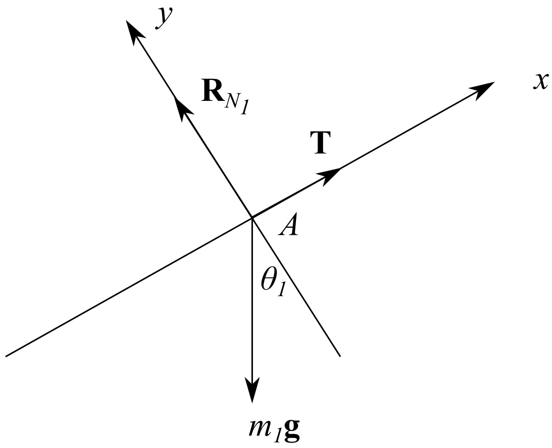

Figura 2: Esercizio 1.

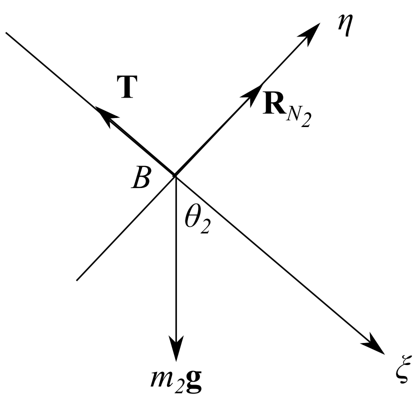

Figura 3: Esercizio 1.

Proiettando sugli assi coordinati:

$$\begin{cases} -T + m_2 g \sin\theta_2 = m_2 a \\ R_{N_2} - m_2 g \cos\theta_2 = 0 \end{cases}, \tag{7}$$

da cui

$$T = -m_2 a + m_2 g \sin\theta_2 \tag{8}$$

Le (5)-(8) costituiscono un sistema lineare di due equazioni nelle incognite (a, T). Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1}{m_1 + m_2} \\ T &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right) g \end{aligned} \tag{9}$$

Quesito (b)

$$\begin{aligned} a &= \frac{4.86 \cdot \sin 42° - 3.70 \cdot \sin 28°}{4.86 + 3.70} \cdot 9.8 = 1.73\,\mathrm{m\,/\,s^2} \\ T &= 23.4\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Quesito (c)

$$\begin{aligned} A \text{ accelera in salita} &\iff a > 0 \iff m_2 \sin\theta_2 > m_1 \sin\theta_1 \\ &\iff m_2 > m_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = 2.60\,\mathrm{kg} \\ A \text{ accelera in discesa} &\iff a < 0 \iff 0 \le m_2 < 2.60\,\mathrm{kg} \\ A \text{ accelera non accelera} &\iff a = 0 \iff m_2 = 2.60\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Resnick R., Halliday D. 2001. *Fisica 1.* Liguori Editore.

[2] Fazio M., Guazzoni P. *Problemi di fisica generale.* CEA

[3] Spiegel M. *Meccanica Razionale* Collana Schaum

[4] Mencuccini C., Silvestrini V., *Fisica 1.* Liguori Editore