Compito d'esame 27/11/2015

(Soluzione di Marcello Colozzo, sperando in uno svolgimento corretto)

Quesito 1

È data l'hamiltoniana di un oscillatore armonico 2-dim dotato di spin ($s = 1/2$):

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right) + 2\omega\hat{S}_z \tag{1}$$

Si chiede di determinare i valori dei livelli energetici e le loro degenerazioni per energie $E \leq 4\hbar\omega$, esplicitando i corrispondenti autoket in termini delle autofunzioni $|\pm\rangle$ dell'operatore $\hat{S}_z$ e delle funzioni $\psi_{nm}(x, y) = \psi_n(x)\psi_m(x)$, dove $\psi_n(x)$ è l'autofunzione normalizzata dell'oscillatore armonico 1-dim. con autovalore $\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Scriviamo l'hamiltoniana come

$$\hat{H} = \hat{H}^{(orb)} + \hat{H}^{(spin)}, \tag{2}$$

dove

$$\hat{H}^{(orb)} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right), \quad \hat{H}^{(spin)} = 2\omega\hat{S}_z \tag{3}$$

Seguono le equazioni agli autovalori:

$$\hat{H}^{(orb)}|nm\rangle = E^{(orb)}_{n'=n+m}|nm\rangle, \quad \hat{H}^{(spin)}|\pm\rangle = E^{(spin)}_{\pm}|\pm\rangle \tag{4}$$

Dalla teoria dell'oscillatore 2-dim sappiamo che

$$E^{(orb)}_{n'=n+m} = \hbar\omega(n+1), \quad g^{(orb)}_{n'} = n' + 1 \tag{5}$$

L'altro termine

$$\hat{H}^{(spin)}|\pm\rangle = 2\omega\hat{S}_z|\pm\rangle = 2\omega\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right)|\pm\rangle = \pm\hbar\omega|\pm\rangle, \tag{6}$$

per cui

$$E^{(spin)}_{\pm} = \pm\hbar\omega, \quad g^{(spin)} = 1 \tag{7}$$

Gli autoket di $\hat{H}$ sono

$$|nm\rangle|\pm\rangle,$$

avendosi

$$\hat{H}|nm\rangle|\pm\rangle = E|nm\rangle|\pm\rangle$$

Con ovvio significato dei simboli:

$$E = \hbar\omega(n'+1) \pm \hbar\omega = \begin{cases} \hbar\omega(n'+2), & \text{se l'autoket di } \hat{S}_z \text{ è } |+\rangle \\ \hbar\omega n', & \text{se l'autoket di } \hat{S}_z \text{ è } |-\rangle \end{cases} \tag{8}$$

Segue

$$n' = 0 \Longrightarrow E = \begin{cases} 2\hbar\omega, & |+\rangle \\ 0, & |-\rangle \end{cases}, \tag{9}$$

da cui vediamo che lo stato fondamentale (ovviamente non degenere):

$$E_0 = 0,$$

corrispondente all'autostato con $n' = 0$ dell'oscillatore armonico e spin down, quindi l'autoket è

$$|0,0\rangle|-\rangle \tag{10}$$

Aumentiamo n'

$$n' = 1 \Longrightarrow E = \begin{cases} 3\hbar\omega, & |+\rangle \\ \hbar\omega, & |-\rangle \end{cases}, \tag{11}$$

onde il primo livello eccitato è

$$E_1 = \hbar\omega$$

corrispondente all'autostato con $n' = 1$ dell'oscillatore armonico e spin down, quindi gli autoket sono

$$|1,0\rangle\,|-\rangle\,,\ \ |0,1\rangle\,|-\rangle$$

perchè la degenerazione orbitale è in questo esercizio, la degenerazione dell'oscillatore 2-dim. cioè $g_{n'}^{(orb)} = n' + 1$. Valore successivo del numero quantico n':

$$n' = 2 \Longrightarrow E = \begin{cases} 4\hbar\omega, & |+\rangle \\ 2\hbar\omega, & |-\rangle \end{cases}, \tag{12}$$

Però dalla prima delle (9) vediamo l'autovalore $2\hbar\omega$, per cui il secondo livello eccitato comprende lo stato fondamentale dell'oscillatore con spin up, e il livello $n' = 2$ con spin down. Quest'ultimo è degenere $g_2^{(orb)} = 3$. Quindi

$$E_2 = 2\hbar\omega,\ \ g_2 = 4$$

I corrispondenti autoket si scrivono:

$$|0,0\rangle\,|+\rangle\,,\ \ |2,0\rangle\,|-\rangle\,,\ |1,1\rangle\,|-\rangle\,,\ |0,2\rangle\,|-\rangle \tag{13}$$

Passiamo a

$$n' = 3 \Longrightarrow E = \begin{cases} 5\hbar\omega, & |+\rangle \\ 3\hbar\omega, & |-\rangle \end{cases} \tag{14}$$

Dalla prima delle (11) vediamo l'autovalore $3\hbar\omega$, per cui il terzo livello eccitato comprende lo stato $n' = 1$ dell'oscillatore con spin up, e il livello $n' = 3$ con spin down. Quest'ultimo è degenere $g_3^{(orb)} = 4$. Quindi

$$E_3 = 3\hbar\omega,\ \ g_3 = 6$$

I corrispondenti autoket si scrivono:

$$|1,0\rangle\,|+\rangle\,,\ |0,1\rangle\,|+\rangle\,,\ |3,0\rangle\,|-\rangle\,,\ |2,1\rangle\,|-\rangle\,,\ |1,2\rangle\,|-\rangle\,,\ |0,3\rangle\,|-\rangle \tag{15}$$

Passiamo a

$$n' = 4 \Longrightarrow E = \begin{cases} 6\hbar\omega, & |+\rangle \\ 4\hbar\omega, & |-\rangle \end{cases} \tag{16}$$

Dalla prima delle (12) vediamo l'autovalore $4\hbar\omega$, per cui il quarto livello eccitato comprende lo stato $n' = 2$ dell'oscillatore con spin up, e il livello $n' = 4$ con spin down. Quest'ultimo è degenere $g_4^{(orb)} = 5$. Quindi

$$E_4 = 4\hbar\omega,\ \ g_4 = 8$$

I corrispondenti autoket si scrivono:

$$|2,0\rangle\,|+\rangle\,,\ |1,1\rangle\,|+\rangle\,,\ |0,2\rangle\,|+\rangle\,,\ |4,0\rangle\,|-\rangle\,,\ |3,1\rangle\,|-\rangle\,,\ |2,2\rangle\,|-\rangle\,,\ |1,3\rangle\,|-\rangle\,,\ |0,4\rangle\,|-\rangle \tag{17}$$

Abbiamo quindi riprodotto l'intero spettro discreto di $\hat{H}$:

$$E_n = 4\hbar\omega,\ \ g_n = 2n,$$

con autoket:

$$\begin{aligned} &|n-2,0\rangle\,|+\rangle\,,\;\; |n-1,1\rangle\,|+\rangle\,...,|0,n\rangle\,|+\rangle\,,\;\; |0,n\rangle\,|+\rangle\,, \\ &|n-2,0\rangle\,|-\rangle\,,\;\; |n-1,1\rangle\,|-\rangle\,...,|0,n\rangle\,|-\rangle\,,\;\; |0,n\rangle\,|-\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

Quesito 2

$$\begin{aligned} \hat{S}_z\,|\alpha\rangle &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\psi_{00}\,(x,y)\,\frac{\hbar}{2}\,|+\rangle + \psi_{11}\,(x,y)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)|-\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar}{4}\left(\sqrt{3}\psi_{00}\,(x,y)\,|+\rangle - \psi_{11}\,(x,y)\,|-\rangle\right), \end{aligned}$$

per cui $|\alpha\rangle$ non è autoket di $\hat{S}_z$.

$$\begin{aligned} \hat{S}_z^2\,|\alpha\rangle = \hat{S}_z\left(\hat{S}_z\,|\alpha\rangle\right) &= \frac{\hbar}{4}\left(\sqrt{3}\psi_{00}\,(x,y)\,\frac{\hbar}{2}\,|+\rangle - \psi_{11}\,(x,y)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)|-\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8}\left(\sqrt{3}\psi_{00}\,(x,y)\,|+\rangle + \psi_{11}\,(x,y)\,|-\rangle\right) \end{aligned}$$

Cioè

$$\hat{S}_z^2\,|\alpha\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\,|\alpha\rangle\,,$$

Quindi $|\alpha\rangle$ è autoket di $\hat{S}_z^2$ con autovalore $\frac{\hbar^2}{4}$.

$$\hat{S}_x\,|\alpha\rangle = ?$$

Ricordiamo che

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\,\langle-| + |-\rangle\,\langle+|\right)$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} \hat{S}_x\,|\alpha\rangle &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\psi_{00}\,(x,y)\,\frac{\hbar}{2}\,|-\rangle - \psi_{11}\,(x,y)\,\frac{\hbar}{2}\,|+\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar}{4}\left(\sqrt{3}\psi_{00}\,(x,y)\,|-\rangle + \psi_{11}\,(x,y)\,|+\rangle\right) \end{aligned}$$

Quindi $|\alpha\rangle$ non è autoket di $\hat{S}_x$. Riguardo all'hamiltoniana osserviamo che $|\alpha\rangle$ è una combinazione lineare di $|0,0\rangle\,|+\rangle$ e $|1,1\rangle\,|-\rangle$, che sono entrambi autovettori di $\hat{H}$ con autovalore $2\hbar\omega$. In altri termini, i predetti vettori appartengono all'autospazio di $\hat{H}$, corrispondente all'autovalore $2\hbar\omega$. Ne consegue:

$$\hat{H}\,|\alpha\rangle = 2\hbar\omega\,|\alpha\rangle \tag{19}$$