La formula di Riemann-Von Mangoldt

Marcello Colozzo

L'approssimazione di Riemann alla funzione di distribuzione dei primi $\pi(x)$ è

$$R(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} li\left(x^{1/k}\right), \tag{1}$$

dove $\mu(k)$ è la *funzione di Möbius*:

$$\mu(k) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{se } k = p_1 p_2 ... p_r, \quad \text{con } p_i \neq p_j \text{ (primi)}, \quad \forall i \neq j \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \tag{2}$$

mentre $li(x)$ è la funzione logaritmo integrale. Nel 1859 Riemann propose la seguente formula esatta per la distribuzione dei primi:

$$\pi_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} f\left(x^{1/k}\right), \tag{3}$$

dove

$$\pi_0(x) = \begin{cases} \pi(x), & \text{se } x \neq p_m \\ \pi(x) - \frac{1}{2}, & \text{se } x = p_m \end{cases} \tag{4}$$

essendo p_m il primo *m-esimo*. La predetta formula venne dimostrata da Von Mangoldt nel 1895. Nella (3) la funzione $f(x)$ è definita da

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi_0\left(x^{1/k}\right)}{k} \tag{5}$$

La (3) è ottenuta dalla (5) attraverso la formula di inversione di Moebius. Inoltre, dalla (5) vediamo che

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in (-\infty, 2)$$

Una buona approssimazione di $f(x)$ è data da

$$f(x) = li(x) - \ln 2 + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} - \sum_\rho \text{Ei}(\rho \ln x)$$

Qui $\text{Ei}(z)$ è la funzione esponenziale integrale, mentre B è l'insieme degli zeri non banali della funzione zeta di Riemann. Riscriviamo:

$$f(x) = f_c(x) + f_d(x), \tag{6}$$

avendo posto

$$f_c(x) = li(x) - \ln 2 + \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}, \quad f_d(x) = -\sum_\rho \text{Ei}(\rho \ln x) \tag{7}$$

Il pedice c denota che la componente $f_c(x)$ contribuisce alla parte *liscia* della $\pi_0(x)$, mentre il pedice d indica che la componente $f_d(x)$ ricostruisce le discontinuità della $\pi_0(x)$.

In definitiva

$$\pi_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k} \left[li\left(x^{1/k}\right) - \ln 2 + \int_{x^{1/k}}^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t} - \sum_\rho \text{Ei}\left(\rho \ln x^{1/k}\right) \right] \tag{8}$$

Per esplicitare la sommatoria sugli zeri non banali, iniziamo con il dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 1

$$\mathrm{Ei}\,(\ln x) = li\,(x)\,, \quad \forall x \in (0, +\infty) \tag{9}$$

Dimostrazione. Nel campo reale

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{10}$$

e

$$li\,(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \quad \forall x \in (0, +\infty) \tag{11}$$

Esplicitiamo

$$\mathrm{Ei}\,(\ln x) = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t}{t} dt,$$

eseguendo il cambio di variabile

$$t' = e^t \Longrightarrow dt' = e^t dt, \quad t = \ln t',$$

mentre gli estremi di integrazione diventano:

$$-\infty < t = \ln t' \leq \ln x \Longleftrightarrow 0 < t' \leq x,$$

da cui

$$\mathrm{Ei}\,(\ln x) = \int_0^x \frac{dt'}{\ln t'} = li\,(x)$$

■

Nel caso in esame abbiamo le funzioni integrali

$$\mathrm{Ei}\,(\rho \ln x)\,, \quad li\,(x^\rho)$$

Siamo tentati a scrivere

$$\mathrm{Ei}\,(\rho \ln x) = li\,(x^\rho)\,,$$

giacchè

$$\rho \ln x = \ln x^\rho$$

Ma nel campo complesso questa identità non è corretta, in quanto

$$\ln x^\rho = \rho \ln x - 2\pi n i$$

Per maggiori dettagli, si veda [6]–[7]. Per esplicitare la sommatoria, rammentiamo che gli zeri non banali della zeta di Riemann compongono un insieme B infinito numerabile, contenuto nella striscia critica:

$$(0,1) \times (-\infty, +\infty)$$

Inoltre, sono simmetrici rispetto all'asse reale (si distribuiscono per coppie complesse coniugate) e rispetto alla *retta critica* $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$.

Ne consegue l'enumerazione che dà luogo alla seguente successione bilatera:

$$\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}}\,,$$

onde

$$\sum_\rho \mathrm{Ei}\,(\rho \ln x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \mathrm{Ei}\,(\rho_n \ln x)$$

Per la simmetria rispetto all'asse reale

$$\rho_{-n} = \rho_n^*, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Escludiamo $n = 0$, in quanto darebbe luogo a uno zero banale. Tenendo poi conto della simmetria rispetto alla retta critica, dovrà aversi:

$$\rho_n = \alpha_n + i\beta_n \Longrightarrow (1 - \alpha_n) + i\beta_n \text{ è uno zero}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\sum_\rho \mathrm{Ei}\,(\rho \ln x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \{\mathrm{Ei}\,[(\alpha_n + i\beta_n)\ln x] + \mathrm{Ei}\,[(1 - \alpha_n + i\beta_n)\ln x]\} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{Ei}\,[(\alpha_n + i\beta_n)\ln x] + \mathrm{Ei}\,[(1 - \alpha_n + i\beta_n)\ln x] + \\ &+ \mathrm{Ei}\,[(\alpha_n - i\beta_n)\ln x] + \mathrm{Ei}\,[(1 - \alpha_n - i\beta_n)\ln x]\}\end{aligned}$$

Cioè

$$\begin{aligned}f_d\,(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \{&\mathrm{Ei}\,[(\alpha_n + i\beta_n)\ln x] + \mathrm{Ei}\,[(1 - \alpha_n + i\beta_n)\ln x] + \\ &+ \mathrm{Ei}\,[(\alpha_n - i\beta_n)\ln x] + \mathrm{Ei}\,[(1 - \alpha_n - i\beta_n)\ln x]\}\end{aligned}$$

Osserviamo che $f_d\,(x)$ è una funzione reale, per cui tale dovrà essere il secondo membro. È facile convincersi che ciò avviene automaticamente per

$$\alpha_n = \frac{1}{2}, \quad \forall n$$

Infatti, in tal caso il termine *n-esimo* della sommatoria diventa:

$$\mathrm{Ei}\,(\rho_n \ln x) + \mathrm{Ei}\,(\rho_n^* \ln x)\,,$$

con $\rho_n = \frac{1}{2} + i\beta_n$. Poniamo

$$\mathrm{Ei}\,(\rho_n^* \ln x) = \mathrm{Ei}\,(\lambda z^*)\,, \tag{12}$$

essendo

$$\lambda \overset{def}{=} \ln x, \quad z \overset{def}{=} \rho_n \tag{13}$$

Dalla definizione dell'esponenziale integrale:

$$\mathrm{Ei}\,(\lambda z^*) = \int_{\gamma(z_\infty, \lambda z^*)} \frac{e^w}{w} dw = \left[\int_{\gamma(z_\infty, \lambda z)} \frac{e^w}{w} dw\right]^* = [\mathrm{Ei}\,(\lambda z)]^* \tag{14}$$

Segue

$$\begin{aligned}\mathrm{Ei}\,(\rho_n \ln x) + \mathrm{Ei}\,(\rho_n^* \ln x) &= \mathrm{Ei}\,(\rho_n \ln x) + [\mathrm{Ei}\,(\rho_n \ln x)]^* \\ &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mathrm{Ei}\,(\rho_n \ln x)]\end{aligned} \tag{15}$$

cioè il termine *n-esimo* è una funzione reale.

Bibliografia

[1] Newman D.J.: *Analitic number theory,* Springer, 1998.

[2] Vardi I.: *Computational Recreations in Mathematica*, Addison-Wesley, 1991

[3] Gizzetti A.: *Lezioni di Analisi Matematica*, Veschi, 1971

[4] von Mangoldt H.: Zu Riemanns Abhandung “uber die Anzhal der Primzahelen unter einer gegebenen Grösse”, *J. Reine Angew. Math.,* v. 114, 1895.

[5] Riesel R., Göhl G., Some Calculations Related to Riemann’s Prime Number Formula, Matematics of Computations, Vol. 24, N. 112, 1970.

[6] Fichera G., De Vito L.: *Funzioni analitiche di una variabile complessa,* Veschi, 1987.

[7] Edwards H.M., *Riemann’s Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974

[8] Riesel H.: *Prime Numbers and Computer Method for Factorization,* Boston, 1985

[9] Wagon S.: *Guida a Mathematica,* McGrawHill,1995.