Un problema di massimo assoluto

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

Esercizio 1 *Sia dato un triangolo di vertici ABC, rettangolo in C con $B\widehat{A}C = \frac{\pi}{6}$. Denotando con α il piano contenente il triangolo, tracciamo la normale n ad α, tale che un osservatore posto con i piedi in A e disposto lungo n vede C a destra di B. Sia $O \in n$ tale che $\overline{AO} = l$. Nel piano α è data una retta r passante per B e formante un angolo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ con il segmento $\overline{AB}$. Detto M l'intersezione della normale n' a r e passante per O, determinare il valore di x che massimizza il volume della piramide $OABM$.*

Svolgimento

Fissiamo una terna $\Omega\xi\eta\zeta$ di assi cartesiani ortogonali con $\Omega \equiv A$ (cfr. fig. 1).

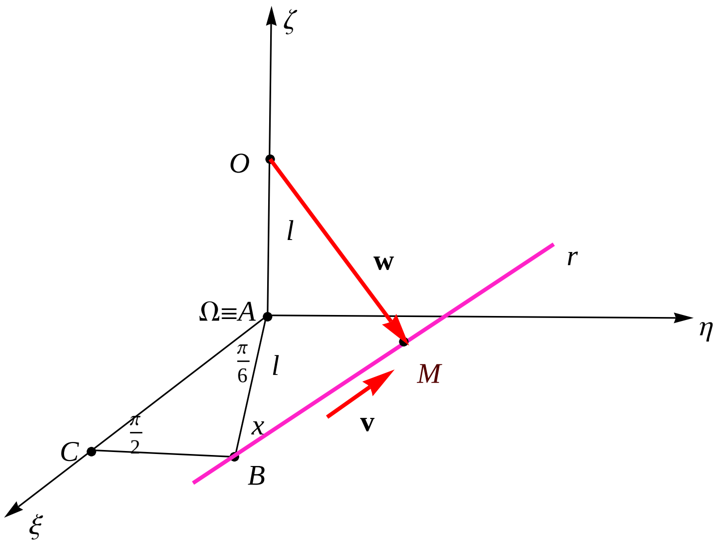

Figura 1: La retta r appartiene al fascio di rette per B contenute nel piano $\xi\eta$.

Il volume della piramide è:

$$V = \frac{S \cdot l}{3}, \tag{1}$$

dove S è l'area di base, cioè l'area del triangolo ABM. Si tratta, dunque, di determinare le coordinate dei punti B e M, dopodichè si applica una nota formula di Geometria analitica per il calcolo di S. L'ordinata di B è $l \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} l$, mentre la misura relativa del segmento CB è l'ascissa di B, cioè$\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{CB}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$. Quindi $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2} l, \frac{l}{2}, 0\right)$. Scriviamo l'equazione della generica retta r passante per B e contenuta nel piano coordinato $\xi\eta$:

$$r : \frac{\xi - \frac{\sqrt{3}}{2} l}{\lambda} = \frac{\eta - \frac{l}{2}}{\mu} = \frac{\zeta}{0}, \tag{2}$$

dove $(\lambda, \mu, 0)$ è una qualunque terna ordinata di numeri direttori di r. Abbiamo:

$$r : \begin{cases} \eta = \frac{\mu}{\lambda}\left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) + \frac{l}{2} \\ \zeta = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Se ci riferiamo esclusivamente al piano coordinato $\xi\eta$ si ha che $\frac{\mu}{\lambda}$ altro non è che il coefficiente angolare di r. Inoltre

$$x = \frac{\pi}{6} - \arctan\frac{\mu}{\lambda}, \tag{4}$$

da cui

$$\frac{\mu}{\lambda} = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tag{5}$$

In tal modo abbiamo espresso il coefficiente angolare in termini dell'angolo x. Le equazioni di r diventano:

$$r : \begin{cases} \eta = \frac{l}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right) \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

Il punto $M(\xi(x), \eta(x), 0)$ è l'intersezione della normale a r condotta da O con la retta r medesima. Se $\mathbf{w}$ è il vettore OM e $\mathbf{v} = (\lambda, \mu, 0)$ ossia un qualunque vettore parallelo a r, deve aversi:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{6}$$

Ma $w = (\xi(x), \eta(x), -l)$, per cui l'equazione precedente si scrive:

$$\lambda\xi(x) + \mu\eta(x) = 0$$

È $\lambda \neq 0$, per cui

$$\xi(x) + \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\eta(x) = 0 \tag{7}$$

Inoltre $M \in r$, quindi le sue coordinate verificano l'equazione di r:

$$\eta(x) = \frac{l}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\left[\xi(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right] \tag{8}$$

Sostituendo la (8) nella (7) otteniamo

$$\xi(x) = \frac{l}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\left[\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 1\right] \tag{9}$$

e quindi:

$$\eta(x) = \frac{l}{2} + \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\left\{\frac{l}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\left[\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 1\right] - \frac{\sqrt{3}}{2}l\right\} \tag{10}$$

Le (9)-(10) sono rispettivamente ascissa e ordinata di M. Per calcolare l'area del triangolo ABM utilizziamo la nota relazione $S = |D|$, dove

$$D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}l & \frac{l}{2} & 1 \\ \xi(x) & \eta(x) & 1 \end{vmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} S(x) = \frac{1}{16}l^2\{&2\left(\sqrt{3} - 3\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)\cdot\left(1 - 2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 3\tan^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right)\} \end{aligned}$$

Il volume della piramide:

$$V\left(x\right)=\frac{S\left(x\right)l}{3},$$

per cui le funzioni $V\left(x\right)$ e $S\left(x\right)$ hanno gli stessi estremi. Derivando $S\left(x\right)$:

$$S'\left(x\right)=\frac{l^2}{8}\{\frac{3+\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\left(\sqrt{3}-\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)}+$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)\left(-1+2\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-3\tan^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right)\},$$

che *dovrebbe* annullarsi per $x=\frac{\pi}{4}$ (cfr. fig. 2).

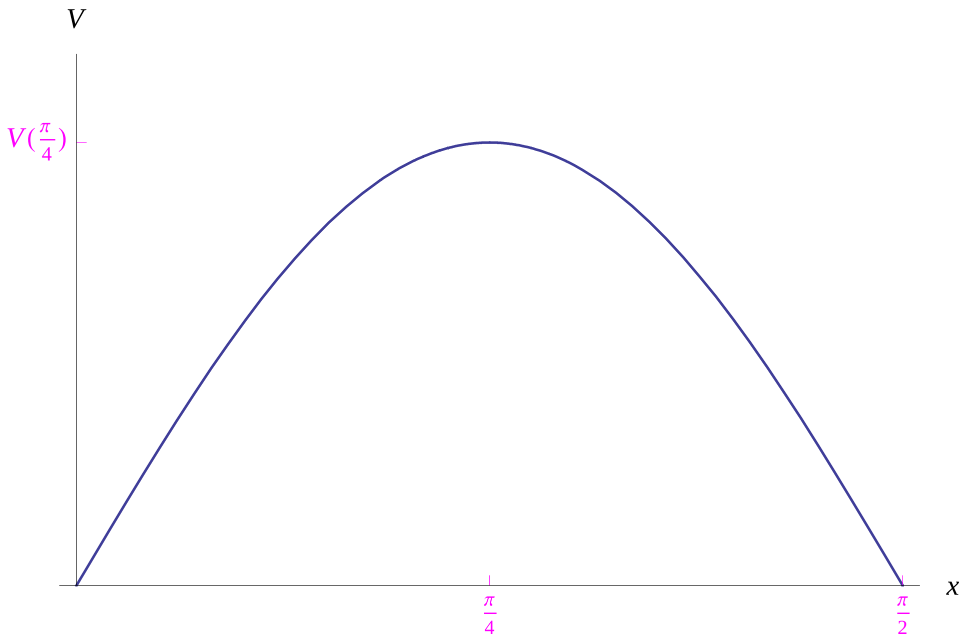

Figura 2: Andamento del volume $V\left(x,l\right)$ per un assegnato l.